Горевич Б.Н.
Доктор технических наук, профессор.

Применение элементов имитации в дифференциальных моделях военных действий

Предложены приемы составления дифференциальных уравнений, описывающих процессы военных действий, позволяющие выполнить смешанное аналитико-имитационное моделирование исследуемого процесса. В качестве практических примеров разработаны модели процесса наведения зенитной управляемой ракеты на воздушную цель и процесса изменения численности вооружения воюющей группировки войск.

Введение. Дифференциальные модели являются одним из способов аналитического описания процессов военных действий. Они позволяют, зная сходные состояния объектов и интенсивности переходов, определить состояния объектов в заданный момент времени и, таким образом, исследовать динамику процесса.

Основным достоинством дифференциальных моделей (как и прочих аналитических моделей), в случае их адекватности, удовлетворительной для исследования, является простота записи (по сравнению с имитационными моделями) и малое время счета. Благодаря этому дифференциальные модели нашли широкое использование в исследовании различных процессов, начиная от описания функционирования отдельных устройств, до боевых действий группировок войск, включающих в совой состав большое количество применяемых сил и средств. В последнем случае, как правило, используются модели Ланчестера или модели динамики средних. Такие модели продолжают получать дальнейшее теоретическое развитие (см., например, публикации [1 - 5]), а также находят практическое воплощение в виде специализированных "экспресс-моделей" в современных моделирующих комплексах, таких как "Спектр", "Арбат-НВ".

Решение дифференциальных уравнений в простейших моделях осуществляется аналитически, а в случае сложных моделей типа упомянутых "экспресс-моделей" – численно. При этом, в соответствии с теорией дифференциального исчисления, при выполнении дифференцирования не допускаются разрывы функций и скачкообразные изменения параметров. Однако реальные исследуемые процессы могут быть разрывными, иметь скачкообразное изменение параметров и оцениваемых показателей, в том числе стохастическое. Учет в аналитической модели этих особенностей процесса позволил бы повысить ее адекватность при сохранении малого времени счета.

Введение названных уточнений в структуру дифференциальной модели возможно при численном методе ее решения благодаря тому, что решение дифференциальных уравнений численными методами по своему характеру соответствует имитационному моделированию – прежде всего, выполняется пошагово во времени. В связи с этим уточнение модели заключается в том, что на дискретную основу численного решения дифференциальных уравнений следует наложить логические и стохастические функции, детализирующие описание исследуемого процесса. В результате может быть получена желаемая гибридная модель, сочетающая достоинства аналитических и имитационных моделей.

Далее предлагаются специальные приемы, позволяющие с позиций имитационного моделирования провести указанную корректировку дифференциальных уравнений.

1. Приемы численного дифференцирования с использованием элементов имитации

Будем исходить из того, что численное решение дифференциальных уравнений выполняется одношаговыми методами. Сущность этих методов состоит в пошаговом решении дифференциального уравнения $dy(t)/dt = f(t, y(t))$ при начальном условии $y(t_0) = y_0$. Вместо исходного дифференциального уравнения в точках $t_j = t_0 + j\cdot\Delta t$ (j = 0, 1, …) решается разностное уравнение

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t\cdot\varphi(t_j, y_j). \qquad (1)$$

Функция φ задается формулами типа Рунге-Кутта, связывающими Δt, t_j, y_j с позиции

ций минимизации погрешности метода вычислений. В простейшем случае при $\varphi = f$ имеет место метод Эйлера.

Для повышения адекватности модели исследуемому процессу при пошаговом решении разностного уравнения (1) необходимо следовать определенным рекомендациям и приемам.

1.1. Выбор шага вычислений. Величина Δt, с одной стороны, определяет точность численного решения дифференциального уравнения. Так, при вычислении по методу Эйлера, погрешность вычислений в j-м узле составляет $\Delta t^2 \cdot f'(\xi_j)/2$, $t_{j-1} \le \xi_j \le t_j$. При использовании метода Рунге-Кутта точность может быть существенно выше. В случае сложных моделей, включающих совокупности сцепленных друг с другом по входным и выходным переменным систем дифференциальных уравнений, при малом шаге вычислений время счета может составить десятки минут и часы. Следовательно, выбор шага вычислений является результатом компромисса между точностью и временем вычислений.

Кроме того, моделируемый процесс, как в приведенном ниже примере управления полетом зенитной управляемой ракеты, может иметь определенную дискретную структуру, с которой также следует согласовывать значение Δt. Значение Δt, как показано ниже, влияет и на структуру моделируемых стохастических процессов, что также необходимо учитывать.

1.2. Приемы моделирования детерминированных скачкообразных изменений процесса. Будем различать случай скачкообразного изменения процесса в заданный момент (моменты) времени и невременной случай скачкообразного изменения процесса – в зависимости от достигнутого значения параметра, учитываемого в дифференцируемой функции.

При необходимости описать скачкообразное изменение процесса в заданный момент времени условие скачка дифференцируемой функций $f(t, y(t))$ задается с помощью одной из логических функций, реализованных в среде моделирования, например, функции $if\ [A, x_1, x_2]$, которая возвращает x_1, если логическое условие A верно, и x_2 в остальных случаях. Для этих целей так же удобно использовать функцию Хевисайда $\Phi(x)$, возвращающую 1, если $x \ge 0$, и 0 – в остальных случаях.

Так, если до момента скачка $t_{ск}$ дифференциальное уравнение, описывающее процесс, задавалось функцией $f_1(t, y(t))$, а начиная с этого момента – функцией $f_2(t, y(t))$, то модель процесса имеет вид

$$dy(t)/dt = if\ [t < t_{ск}, f_1(t, y(t)), f_2(t, y(t)].$$

Решение разностного уравнения, соответствующего данному дифференциальному уравнению, будет выполняться пошагово с переходом с функции f_1 на f_2 начиная с j-го шага, на котором значение t_j достигнет $t_{ск}$.

Аналогично, с помощью функции Хевисайда, можно записать

$$dy(t)/dt = f_1(t, y(t))[1-\Phi(t- t_{ск})] + f_2(t, y(t)[\Phi(t- t_{ск})].$$

За счет вложений в логическую функцию количество скачков может быть любым. На рисунке 1 показан результат моделирования процесса, развитие которого до момента t_1 описывается функцией $f_1(t, y(t)) = ty^{1/3}$, в интервале $[t_1, t_2]$ – функцией $f_2(t, y(t)) = ty^{-1/2}$, а с момента t_2 – функцией $f_3(t, y(t)) = ty^{1/6}$. Модель процесса имеет вид

$$dy(t)/dt = if\ [t \le t_2, if\ (t < t_1, ty^{1/3}, ty^{-1/2}), ty^{1/6}], y(0) = 1.$$

Рисунок 1 – Моделирование процесса с временными скачками

Если описанное выше дифференцирование со скачкообразным изменением процесса в заданные моменты времени, возможно, вообще говоря, как численными, так и аналитическими методами, то учет скачкообразного изменения процесса в зависимости от достигнутого значения некоторого его параметра или от достигнутого значения самой дифференцируемой функции, возможен только при численном дифференцировании.

В основе учета невременного скачкообразного изменения исследуемого процесса лежит оценка на каждом шаге вычислений достигнутого значения переключающего параметра (или самой функции) и принятие решения на "переключение" процесса по схеме, описанной выше. Для удобства моделирования целесообразно изменение переключающего параметра описывать дифференциальным уравнением в одной системе уравнений с дифференцируемой функцией.

Пример 1. Исследуемый процесс $y(t)$ описывается дифференциальным уравнением $dy(t)/dt = ty^{1/3}$, $y(0) = 1$. При достижении уровня $y(t) = 100$ процесс скачкообразно изменяется и развивается в соответствии с уравнением $dy(t)/dt=ty^{1/6}$.

Модель процесса задается системой уравнений:

$dy(t)/dt = ty^{1/3}\Phi(100 - y_2(t)] + ty^{1/6}\Phi(100 - y_2(t)]$, $dy_2(t)/dt = ty_2^{1/3}$.

Результат численного решения системы приведен на рисунке 2 - а).

Пример 2. Исследуемый процесс $y(t)$ описывается дифференциальным уравнением $dy(t)/dt = ty^{1/3}$, $y(0) = 1$. Изменение переключающего параметра описывается уравнением $s(t) = t^3/3$. При достижении параметром значения $s(t) = 50$ процесс останавливается и возобновляется в виде $dy(t)/dt = ty^{1/6}$, $y(0) = 1$ при $s(t)\geq100$. Модель процесса задается системой уравнений:

$dy(t)/dt = ty^{1/3}\Phi(50 - s(t)] + ty^{1/6}\Phi(100 - s(t)]$, $ds(t)/dt = t^2$.

Результат численного решения системы приведен на рисунке 2 - б).

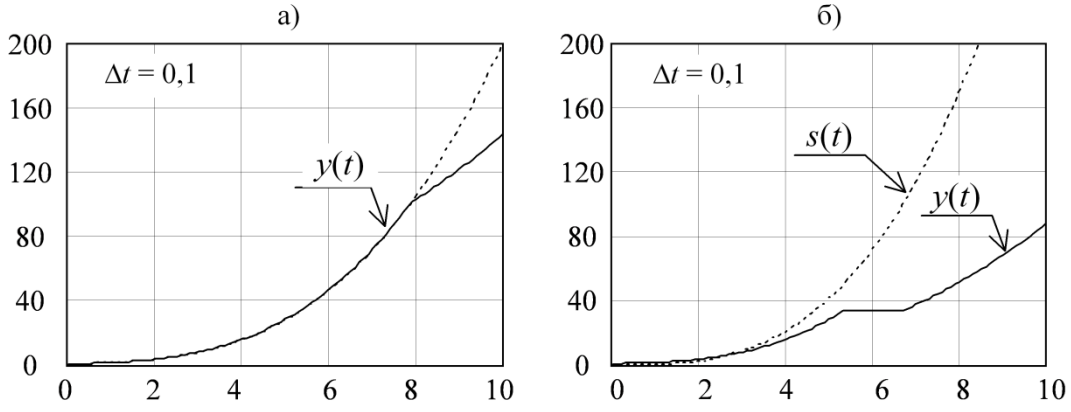

Рисунок 2 – Моделирование скачка процесса: а) в зависимости от достигнутого им значения; б) в зависимости от достигнутого значения переключающего параметра

С использованием описанных приемов возможно моделирование различных комбинаций скачков временного и невременного характера.

1.3. Приемы моделирования стохастических изменений процесса. Пошаговый характер численного дифференцирования дает возможность использования на отдельных шагах вычисления разностного уравнения (1) датчиков случайных чисел. Эта возможность позволяет имитировать различные стохастические особенности исследуемого процесса – от его регулярного стохастического изменения (имитация различных шумов), до моделирования случайных событий в отдельных точках процесса (типа отказа устройства, поражения цели и т.п.).

На основе датчика равномерно распределенной случайной величины стандартными приемами метода Монте-Карло могут моделироваться различные непрерывные случайные величины с известными законами распределения (методом обратных функций) и дискретные случайные события с известными вероятностями (методом розыгрыша попадания равномерно распределенной величины на интервал, пропорциональный вероятности события).

1.3.1. Моделирование регулярных стохастических изменений. Порядок моделирования рассмотрим на основе отдельных примеров.

Пример 3. Результаты моделирования случайных непрерывных процессов различной природы с шагом $\Delta t = 1$ представлены на рисунке 3 (верхняя часть рисунка). Модели описываются следующими уравнениями:

а) случайный процесс, возрастающий на каждом шаге на величину $rnd(1)$, где $rnd(x)$ – значение равномерно распределенной на интервале $[0, x]$ случайной величины:

$$dy_1(t)/dt = rnd(1),\ y_1(0) = rnd(1);$$

б) гауссов случайный процесс, со среднеквадратичным отклонением на каждом шаге $\sigma_y = 10$ и средним $m_y = 0$. Значения случайной величины вычисляются по методу обратных функций с использованием встроенной функции $gnorm(\alpha, m_y, \sigma_y)$, возвращающей α% - ную квантиль нормального распределения с параметрами m_y, σ_y:

$$dy_2(t)/dt = gnorm(rnd(1), m_y, \sigma_y),\ y_2(0) = gnorm(rnd(1), m_y, \sigma_y);$$

в) случайный процесс, возрастающий на каждом шаге на случайную величину, имеющую показательный закон распределения с параметром $\lambda = 0.1$. Значения случайной величины вычисляются по методу обратных функций:

$$dy_3(t)/dt = -ln[1 - (rnd(1))] /\lambda,\ y_3(0) = -ln[1 - (rnd(1))] /\lambda.$$

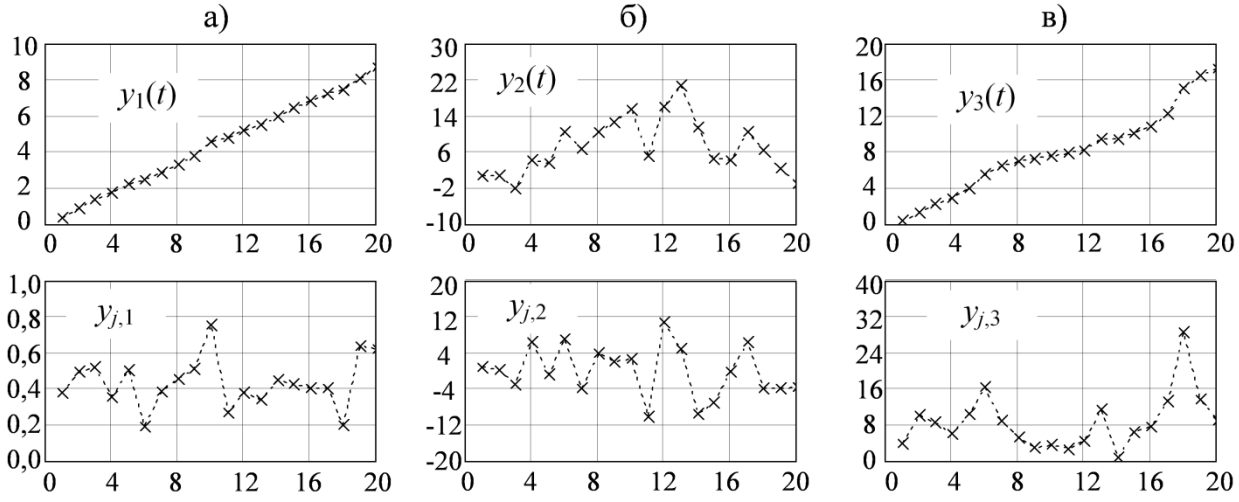

Рисунок 3 – Реализации, полученные при моделировании случайных непрерывных процессов различной природы

Приведенные выше модели случайных процессов объединяет порядок пошагового вычисления значений процесса. Здесь случайные величины представляют собой константы дифференциальных уравнений. Вследствие этого, не зависимо от метода

численного решения, его сущность в соответствии с разностным уравнением (1) заключается в пошаговом весовом суммировании вычисляемых на каждом шаге значений случайной величины. Весовой коэффициент каждого слагаемого равен Δt.

В нижней части рисунка 3 по результатам расчетов показаны значения случайных величин $y_{j,1}$, $y_{j,2}$, $y_{j,3}$, (j = 0, 1, …), вычисленных на каждом шаге моделирования соответствующего процесса и суммируемых при построении процесса с весовым коэффициентом Δt.

Отмеченное взвешивание случайных величин определяет зависимость степени "случайности" процесса от шага моделирования. Использование чрезмерно малого шага в заданном временном диапазоне моделирования приводит к "сглаживанию" процесса, снижению величины случайного отклонения на каждом шаге моделирования. В связи с этим при моделировании конкретных случайных процессов необходимо согласовывать выбор параметров процесса и шага моделирования.

Аппарат численного решения дифференциальных уравнений в совокупности с встроенными функциями среды моделирования позволяет сформировать в решаемой системе уравнений самостоятельный датчик случайных чисел с определенными характеристиками, не имеющий описанного выше кумулятивного эффекта. Например, случайный процесс, близкий к гауссовому, синтезирован в виде результатов численного решения следующего дифференциального уравнения

$$dy(t)/dt = [runif(1, m_1, m_2) - ceil(y)]\ /\Delta t,\ y(0) = runif(1, m_1, m_2),$$

где $runif(n, m_1, m_2)$ – вектор n независимых случайных чисел, каждое из которых имеет равномерное распределение на интервале $[m_1, m_2]$; $ceil(x)$ – наименьшее целое, не меньшее x.

Одна из реализаций процесса, полученных при m_1 =-1, m_2 = 2, приведена на рисунке 4.

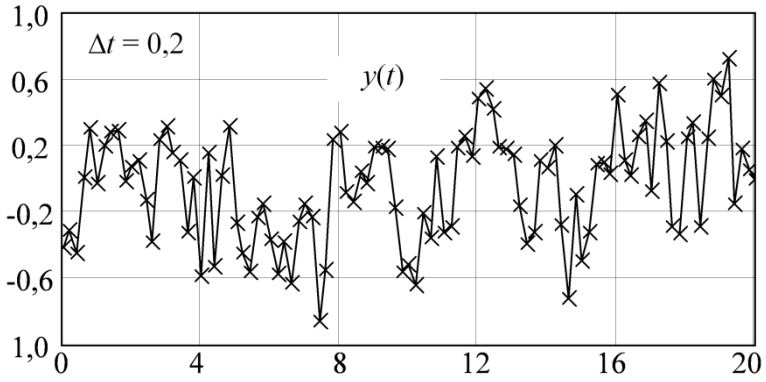

Рисунок 4 – Реализация синтезированного случайного процесса

Формирование случайного процесса может осуществляться за счет аддитивного или мультипликативного наложения на детерминированную функцию значений случайной величины, рассчитанных в отдельных точках. Одним из вариантов формирования случайного процесса может быть также использование детерминированной функции в качестве параметра закона распределения случайной величины, определяемой пошагово методами Монте-Карло (розыгрышем событий или методом обратных функций).

Соответствующие процессы приведены в следующем примере.

Пример 4. В качестве детерминированной составляющей используется функция, являющаяся решением рассмотренного ранее уравнения $dy(t)/dt = ty^{1/3}$ при $y(0) = 100$. Шаг моделирования $\Delta t = 1$.

а) аддитивная смесь с равномерно распределенной в интервале [0, 10] случайной величиной:

$$dy_1(t)/dt = ty_1^{1/3} + rnd(10);$$

б) мультипликативная смесь с равномерно распределенной в интервале [0, 2] случайной величиной:

$$dy_2(t)/dt = ty_2^{1/3} \cdot rnd(2);$$

в) гауссов процесс с динамически изменяющимся средним $m_y(t) = y(t)$ и постоянным среднеквадратичным отклонением $\sigma_y = 50$:

$dy_3(t)/dt = gnorm(rnd(1), ty_3^{1/3}, 50)$.

Результаты моделирования приведены на рисунке 5.

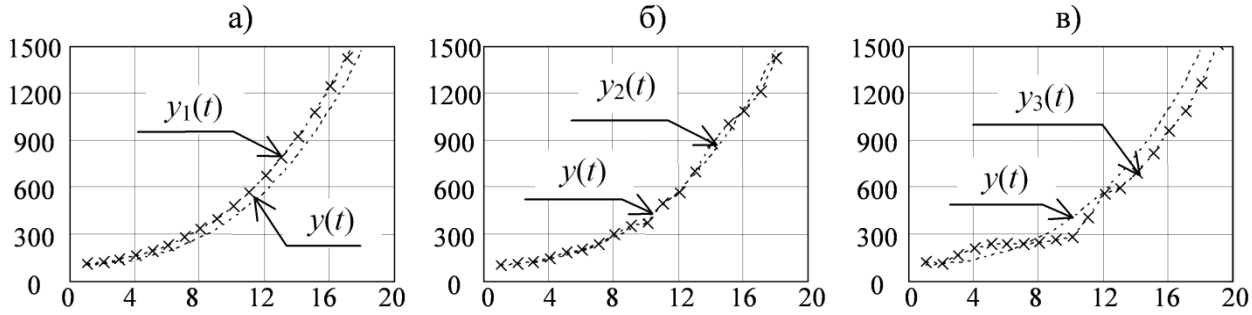

Рисунок 5 – Реализации, полученные при моделировании случайных процессов с детерминированной составляющей

1.3.2. Моделирование отдельных случайных событий и нерегулярных стохастических изменений процесса. Моделирование может осуществляться по схеме, описанной в пункте 1.2, в зависимости от момента времени, или от значения переключающего параметра (или самой функции). В отличие от описанного в пункте 1.2 детерминированного случая, решение об изменении процесса должно приниматься на основе розыгрыша случайного события с известной вероятностью. Событие считается свершившимся, если значение равномерно распределенной величины попадает на интервал, пропорциональный вероятности p рассматриваемого события. Математически это условие записывается логической функцией $if[p < rnd(1), x_1, x_2]$.

Пример 5. Рассматриваются два гауссовых процесса с известными параметрами, описывающих траектории движения цели и наводимой на нее ракеты. В момент встречи ракеты с целью происходит поражение цели с вероятностью p. Необходимо оценить распределение по времени случайных моментов поражения цели.

Модель процесса обстрела цели опишем следующей системой дифференциальных уравнений

$dy_1(t)/dt = gnorm(rnd(1), ty_1^{1/3}, 50)$, $y_1(0) = 100$,

$dy_2(t)/dt = gnorm(rnd(1), ty_2^{1/5}, 50)$, $y_2(0) = 1000$,

$ds(t)/dt = if\ [y_2 \le y_1, if\ (p < rnd(1), 0, 2000), 0]$, $y(0) = 10$.

Первое и второе уравнения описывают соответственно траектории ракеты и цели. Третье уравнение представляет собой индикаторную функцию, предназначенную для отображения результатов розыгрыша случайного события поражения цели с вероятностью p в момент пересечения траекторий.

Две реализации моделирования процесса обстрела цели для $p = 0.8$ приведены на рисунке 6. На первой реализации разыгрываемое событие поражения цели произошло после пересечения траекторий – цель не поражена. На второй реализации событие свершилось в точке пересечения траекторий – цель поражена.

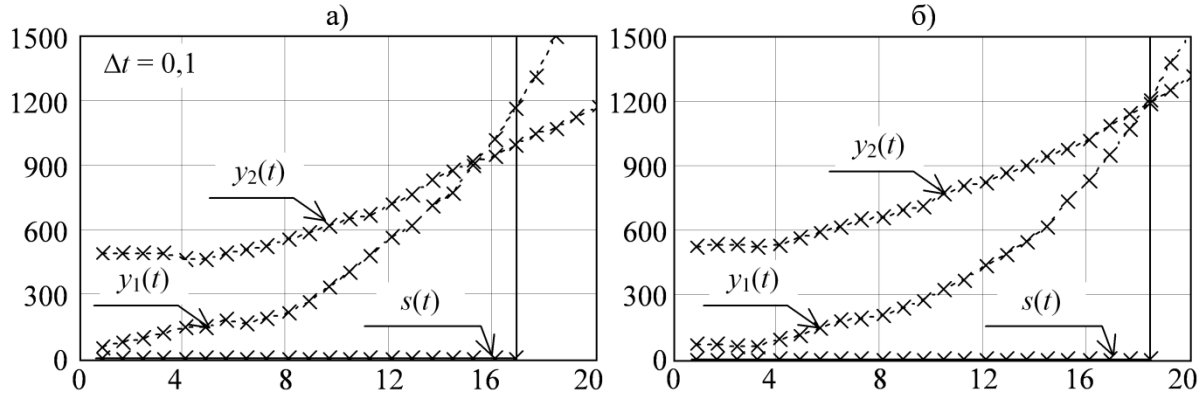

Рисунок 6 – Реализации моделирования процесса обстрела цели: а) цель не поражена; б) цель поражена в точке встречи в момент t = 23

2. Пример моделирования процесса наведения зенитной управляемой ракеты на воздушную цель

2.1. Описание моделируемого процесса. Моделирование осуществляется в координатах *R-H* "дальность-высота" (рисунок 7). Положение цели $R_{ц0}$, $H_{ц0}$ на момент начала моделирования считается заданным. Траектория цели определяется в общем случае динамически изменяющимися характеристиками ее вектора скорости – абсолютной величиной $V_ц(t)$ и углом $\Theta_ц(t)$, составляемым с направлением горизонтальной оси координат. Траектория ракеты определяется методом наведения ее на цель, который позволяет рассчитать в каждый момент времени после пуска ракеты потребное расстояние между ракетой и целью $D(t)$ и угол визирования цели из местоположения ракеты $\varphi(t)$.

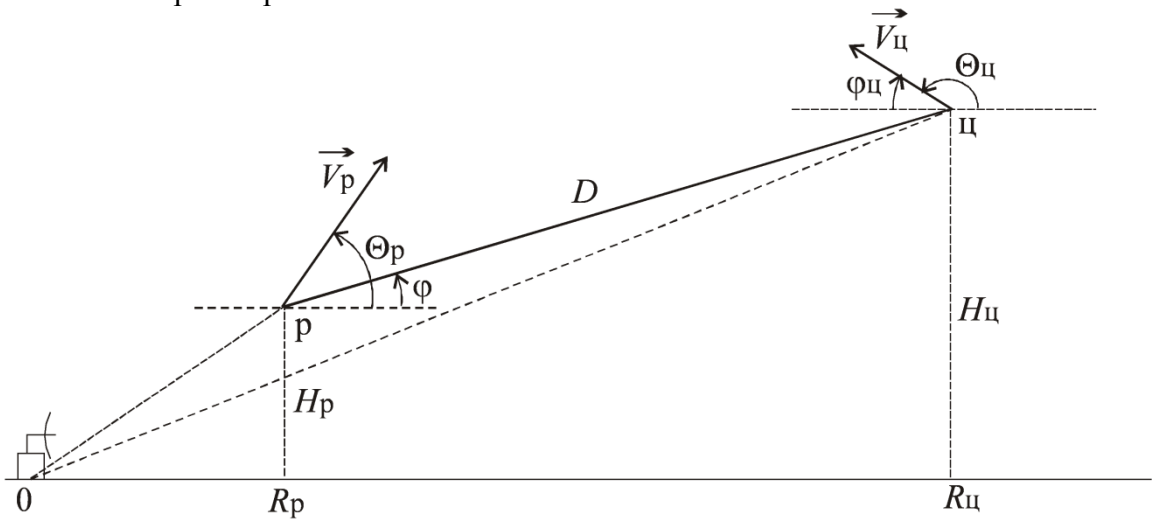

Рисунок 7 – Схема наведения ракеты на цель

В начале системы координат размещены ракета перед пуском и наземный пеленгатор. Пеленгатор осуществляет циклическое, с периодом Δt, измерение параметров траекторий цели и ракеты и передачу команд управления на ракету. Наведение ракеты осуществляется в соответствии с методом пропорциональной навигации. Пуск ракеты по цели производится в момент $t = 0$. Уравнения метода наведения:

$$dD(t)/dt = V_ц(t)\cos(\Theta_ц(t) - \varphi(t)) - V_р(t)\cos(\Theta_р(t) - \varphi(t)),$$

$$d\varphi(t)/dt = [V_ц(t)\sin(\Theta_ц(t) - \varphi(t)) - V_р(t)\sin(\Theta_р(t) - \varphi(t))]/D(t),$$

$$D(0) = R_{ц0},\ \varphi(0) = \mathrm{arctg}(H_{ц0}/R_{ц0}),\ \Theta_р(t) = k\varphi(t) + c,$$

где k, c – константы метода, реализованные в конкретной системе вооружения.

Скорость цели $V_ц(t)$ оценивается пеленгатором с погрешностью, распределенной по

нормальному закону с известным значением дисперсии $\sigma_{V_ц}^2$. Скорость ракеты $V_р(t)$ имеет переменный характер – возрастает по закону $V_{р.н}(t)$ с момента старта на разгонном участке полета и снижается по закону $V_{р.п}(t)$ на пассивном участке, после окончания работы двигателя. Момент окончания работы двигателя ракеты является равномерно распределенной в интервале $[t_{дв.1}, t_{дв.2}]$ случайной величиной.

Требуется оценить ошибки наведения ракеты на цель.

2. Построение модели и результаты моделирования. Дополним исходную систему уравнений зависимостями, описывающими изменение координат цели $R_ц(t)$, $H_ц(t)$ и ракеты $R_р(t)$, $H_р(t)$:

$dR_ц(t)/dt = V_ц(t)\cos\Theta_ц(t)$, $dH_ц(t)/dt = V_ц(t)\sin\Theta_ц(t)$,

$dR_р(t)/dt = V_р(t)\cos\Theta_р(t)$, $dV_р(t)/dt = V_р(t)\sin\Theta_р(t)$,

$R_ц(0) = R_{ц0}$, $H_ц(0) = H_{ц0}$, $R_р(0) = 0$, $V_р(0) = 0$.

Для учета в модели случайной погрешности измерения скорости цели и случайного характера окончания работы двигателя ракеты используем приемы, описанные в примерах 4,5. В соответствии с этим, в исходной системе уравнений метода, а также в уравнениях для расчета значений $R_р(t)$, $V_р(t)$ произведем замену:

$$V_ц(t) \rightarrow gnorm(rnd(1), V_ц(t), \sigma_{V_ц}),$$

$$V_р(t) \rightarrow if\ [t \le runif(1, t_{дв.1}, t_{дв.2}), V_{р.н}(t), V_{р.п}(t)].$$

Реализации моделирования процесса наведения ракеты на цель, при движении ее по разным траекториям, приведены на рисунке 8. При моделировании использовались значения параметров пеленгатора и ракеты гипотетической системы вооружения.

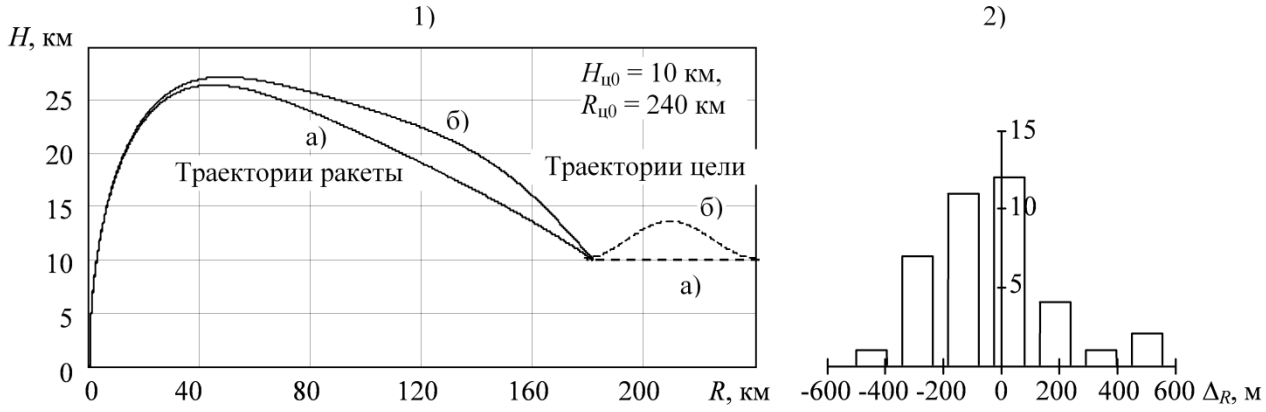

Рисунок 8 – 1) Реализации моделирования процесса наведения ракеты: а) – на прямолинейно движущуюся и б) – на маневрирующую по закону синуса цель; 2) Гистограмма промахов ракеты по маневрирующей цели

Моделирование показывает, что в точке встречи от реализации к реализации имеет место разброс координат траектории ракеты, обусловленный действием случайных факторов. Гистограмма разности координат $\Delta_R = R_ц - R_р$ в точке встречи ракеты с маневрирующей по закону синуса целью получена по сорока реализациям моделирования процесса.

Применимость построенной модели не ограничивается приведенными результатами. Модель позволяет исследовать разнообразные условия наведения ракеты на цель, в том числе случайные факторы, связанные с ошибками измерения различных координат цели и ракеты. Незначительные доработки модели по схеме, приведенной в пункте 1.3.2. позволяют оценивать не только траекторные характеристики ракеты, но и возможность поражения цели.

3. Пример моделирования процесса изменения численности вооружения воюющей группировки войск

3.1. Описание моделируемого процесса. Группировка имеет на начало боевых действий 100 %-ный состав вооружения, и в ходе боевых действий несет потери. Ожидаемый ежедневный выход вооружения из строя оценивается в процентах от текущего состава. Прогнозируется, что выход вооружения

из строя лежит в пределах $[m_1, m_2]$ % в дневное время суток и $[m_3, m_4]$ % – в ночное время.

Восполнение состава группировки осуществляется за счет войскового и заводского ремонта вооружения. Предполагается, что этими видами ремонта будет охвачено соответственно $k_в$% и $k_з$% выходящего из строя вооружения. Оставшаяся часть вооружения выбывает из состава группировки безвозвратно. Возможности по восстановлению вооружения оцениваются потенциальной производительностью ремонтных органов – для войсковых реморганов она составляет $\mu_в$ ед./сутки, для заводских – $\mu_з$ ед./сутки.

Войсковой ремонт поврежденного вооружения начинается немедленно. Начало заводского ремонта осуществляется с задержкой $t_{н.з}$, обусловленной доставкой вооружения на удаленные от района боевых действий рембпредприятия. Поступление вооружения из заводского ремонта задержано на время $t_{зад.з}$, обусловленное доставкой на рембпредприятия, выполнением ремонта и возвращением в строй.

Для принятия обоснованного решения на ведение боевых действий необходимо оценить предполагаемую динамику состава вооружения в течение операции продолжительностью $T_{оп}$ = 35 суток.

3.2. Построение модели и результаты моделирования. Будем считать потери вооружения равномерно распределенной в заданных пределах $[m_1, m_2]$, $[m_3, m_4]$ случайной величиной. Временной характер потерь опишем в виде ряда вложенных функций, отражающих уровень потерь каждую очередную половину суток. Функция потерь $k(t)$ будет иметь вид

$\varphi_0(t) = if\ [t > 0.5,\ runif(1,m_3,m_4),\ runif(1,m_1,m_2)]$, $\varphi_1(t) = if\ [t < 1, \varphi_0(t),\ runif(1,m_1,m_2)]$,

$\varphi_2(t) = if\ [t < 1.5,\ \varphi_1(t),\ runif(1,\ m_3,\ m_4)]$, $\varphi_3(t) = if\ [t < 2,\ \varphi_2(t),\ runif(1,\ m_1,\ m_2)]$, …,

$\varphi_{67}(t) = if\ [t < 34,\ \varphi_{66}(t),\ runif(1,\ m_1,\ m_2)]$, $k(t) = if\ [t > 34.5,\ runif(1,\ m_3,\ m_4),\ \varphi_{67}(t)]$.

Система дифференциальных уравнений, отражающая изменение численности вооружения в составе группировки и в реморганах, имеет вид

$dN(t)/dt = - N(t)k(t) + [\mu_в\Phi(N_{в.рф}(t)) + N(t)k(t)k_в(1-\Phi(N_{в.рф}(t))] + [\mu_з\Phi(N_{з.рф}(t)) + N(t)k(t)k_з(1-\Phi(N_{з.рф}(t))]\ if\ [t > t_{зад.з},1,0]$,

$dN_{в.рф}(t)/dt = N(t)k(t)k_в - \mu_в$, $dN_{з.рф}(t)/dt = N(t)k(t)k_з - \mu_з\ if\ [t > t_{н.з},1,0]$,

$dN_в(t)/dt = N(t)k(t)k_в$, $dN_з(t)/dt = N(t)k(t)k_з$,

$dN_{пот.в}(t)/dt = \mu_в$, $dN_{пот.з}(t)/dt = \mu_з\ if\ [t > t_{н.з},1,0]$,

$N(0) = 100$, $N_{в.рф}(t) = 0$, $N_{з.рф}(t) = 0$, $N_в(t) = 0$, $N_з(t) = 0$, $N_{пот.в}(t) = 0$, $N_{пот.з}(t) = 0$.

Первое уравнение описывает снижение численности вооружения группировки из-за боевых потерь (вычитаемое) и восполнение состава группировки вследствие войскового (первое слагаемое в скобках) и заводского (второе слагаемое в скобках) ремонта. При описании динамики поступления вооружения из войскового ремонта использован прием, представленный в пункте 1.2. (пример 2), позволивший учесть скачкообразное изменение производительности реморганов в зависимости от их загруженности – при полной загрузке реморганов их производительность равна потенциальной величине $\mu_в$; при недогрузке – равна интенсивности выхода вооружения в войсковой ремонт $N(t)k(t)k_в$. В качестве переключающего параметра используется динамически рассчитываемый объем ремфонда войсковых реморганов $N_{в.рф}(t)$. Аналогично описывается динамика поступления вооружения из заводского ремонта. Здесь в качестве переключающего параметра используется показатель объема ремфонда заводских реморганов $N_{з.рф}(t)$. Дополнительно с помощью приема, описанного в пункте 1.2, учтена временная задержка $t_{зад.з}$ поступления вооружения из заводского ремонта.

Второе и третье уравнения описывают изменение объема ремфонда, находящегося в войсковых ($N_{в.рф}(t)$) и заводских ($N_{з.рф}(t)$) реморганах соответственно. Четвертое и пятое уравнения описывают динамику выхода вооружения в войсковой $N_в(t)$ и заводской $N_з(t)$ ремонт соответственно. Шестое и седьмое уравнения описывают потенциальные возможности реморганов войскового $N_{пот.в}(t)$ и заводского $N_{пот.в}(t)$ ремонта соответственно. Для заводского ремонта учтена задержка его начала.

Результаты моделирования для m_1= 8%, m_2= 12%, m_3= 0, m_4= 5%, $k_в$= 35%, $k_з$= 50%,

$\mu_в$= 0,015·N(0) ед./сут, $\mu_з$= 0,025·N(0) ед./сут, $t_{зад.з}$= 15 сут, $t_{н.з}$= 5 сут приведены на рисунке 9.

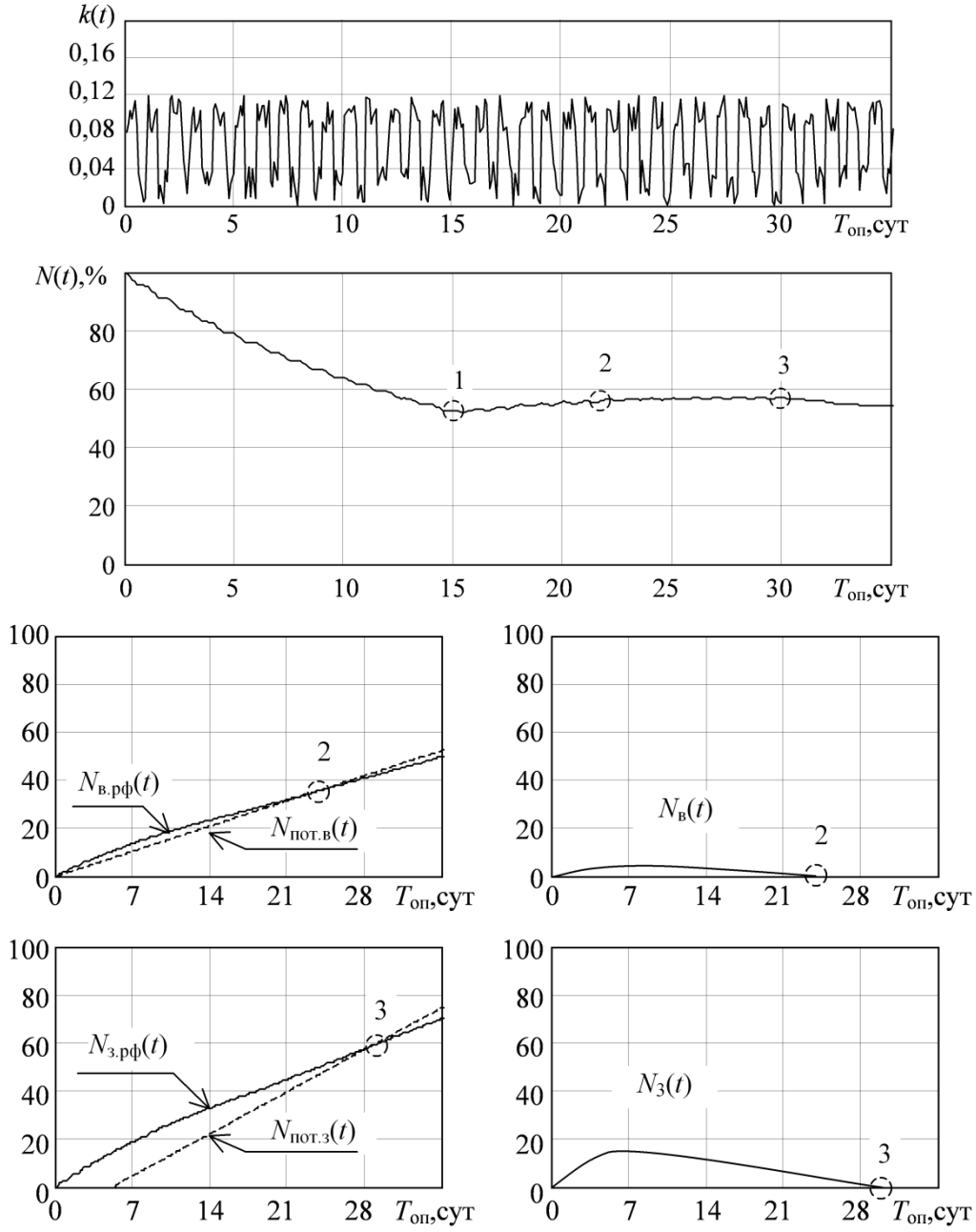

Рисунок 9 – Реализации моделирования процесса изменения состава вооружения группировки войск

На графике $N(t)$ имеются несколько характерных точек, отражающих особенности имитационного моделирования: точка 1 – временной скачок функции, обусловленный началом возвращения вооружения из заводского ремонта (выполнено условие $t > t_{зад.з}$); точка 2 – невременной скачок ввиду изменения объема поступлений вооружения из войскового ремонта (выполнено условие $N_{в.рф}(t) < N_{пот.в}(t)$, изменившее производительность войсковых реморганов); точка 3 – невременной скачок, обусловленный изменением производительности заводских реморганов (выполнено условие $N_{з.рф}(t) < N_{пот.з}(t)$).

Таким образом, модель позволяет оценивать динамику состава вооружения в зависимости от основных показателей системы восстановления поврежденного вооружения. Использование элементов имитационного моделирования позволило учесть скачкообразное изменение динамически изменяющихся переменных и, тем самым, повысить адекватность модели.

Заключение

Предложенные в статье подходы к использованию элементов имитационного моделирования при численном решении систем дифференциальных уравнений направлены на повышение адекватности дифференциальных моделей различных процессов военных действий. Круг моделируемых процессов достаточно широк и включает те процессы, которые возможно описать дифференциальными уравнениями – от функционирования простейших устройств до сложных процессов боевых действий, для описания пространственно-временного характера которых требуется большое количество сцепленных друг с другом по входным и выходным переменным систем дифференциальных уравнений.

Предложенные приемы позволяют имитировать особенности как детерминированных, так и стохастических процессов. В последнем случае, естественно, возникает характерная для имитационного моделирования самостоятельная задача обработки статистических данных, полученных по результатам моделирования.

Перечень предложенных в статье практических приемов имитационного моделирования не является исчерпывающим, и может быть расширен, прежде всего, за счет совершенствования подходов к описанию стохастических процессов.

Список использованных источников:

1. Ахметов Д.Е., Беломытцев А.В., Васкецов С.Л. О роли упрощенных оптимизационных моделей // Военная мысль, 2008, №1.
2. Буравлев А.И., Гордеев В.С. Модель динамики противоборства неоднородных группировок сил // Вооружение и экономика, 2009, № 1(5).
3. Буравлев А.И. Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сторон // Вооружение и экономика, 2009, № 4 (8).
4. Горевич Б.Н. Выработка способа противовоздушной обороны объекта на основе комплексного использования разнотипных математических моделей боевых действий // Военная мысль, 2008, №9.
5. Горевич Б.Н. Анализ возможностей системы восстановления вооружения и военной техники в новом облике Вооруженных Сил // Военная мысль, 2010, №1.