Пицык В.В.
Доктор технических наук, профессор
Тунгушпаев А.Т.
Кандидат технических наук, старший научный сотрудник

Метод рекуррентного оценивания параметров многомерных регрессий с матричными коэффициентами в задачах обработки результатов траекторных измерений

Ставится задача статистического оценивания параметров регрессионной модели, допускающей включение в нее дополнительных групповых регрессоров или, напротив, исключения их из модели при обработке результатов траекторных измерений при выполнении натурных испытаний образцов ВВТ. Решение задачи находится в классе методов ньютоновского типа. Результат сформулирован в виде теоремы и её следствий и является обобщением известных процедур одновременного и пошагового оценивания на случай произвольного числа матричных регрессоров. Приводится типовой пример, подтверждающий преимущество предлагаемого метода оценивания по сравнению с известными методами.

Устойчивый интерес специалистов в области траекторных измерений (ТИ), предназначенных для получения экспериментальных данных о движении летательных аппаратов (ЛА) при их полигонных испытаниях [1,2,4-6,8,12,18], к регрессионному анализу находит свое выражение в расширении сферы его практического применения. Объясняется это, в частности, тем, что на стыке компьютеризации и последних достижений в теории многомерной статистики открылись новые возможности для создания эффективных в вычислительном отношении пакетов статистических программ, которые могут успешно применяться при исследовании сложных процессов, наблюдаемых в ходе полигонных испытаний вооружения и военной техники (ВВТ). Это позволяет и в дальнейшем рассматривать регрессионный анализ как перспективный метод обработки результатов траекторных измерений для оценки характеристик движения объектов на испытаниях.

Библиография работ по регрессионному анализу обширна. Многие из них приведены в монографиях [1-3,8-12]. Это далеко не полный список работ, число которые продолжает расти.

Вместе с тем, несмотря на развитую теорию, на которой базируются современные вычислительные процедуры регрессионного анализа, в ней нерешенной до конца остаётся задача выбора наилучшего в известном смысле множества вероятных регрессоров. Ее содержательный смысл заключается в ответе на вопрос о том, какие именно переменные следует включать в уравнение регрессии и какие из них можно не рассматривать в качестве аргументов регрессионной зависимости?

На первый взгляд, кажется естественным желание включить в исходную модель, по возможности, большее число переменных. Однако ограничением для этого является известное в математике «проклятие размерности», сопровождаемое возрастанием дисперсии оценки параметров регрессионной модели. К тому же затраты, связанные с получением информации о большом числе переменных, вынуждают ограничивать расширение модели при решении многомерных задач. В настоящее время не существует пока единой статистической процедуры для выбора «наилучшей» в этом смысле модели регрессии. И потому при решении прикладных задач нередко приходится, опираясь на интуицию и опыт, принимать субъективные решения по выбору размерности модели, учитывая физическое содержание решаемой задачи. Иными словами, при математической постановке задачи предполагается, что подлежащая изучению многомерная модель уже выбрана. И после того, как произведен выбор модели, ее неизвестные параметры оцениваются известными статистическими методами [3,8,10-17].

Во многих случаях по результатам оценки параметров модели возникает потребность в уточнении исходной модели путем включения в нее дополнительных перемен-

ВООРУЖЕНИЕ И ЭКОНОМИКА №1(13) 2011 г.

ных (или, напротив, исключения их из модели). Зачастую при переходе от исходной регрессионной модели к модели с дополнительно вводимыми (или исключаемыми) переменными эти дополнительные переменные включают в первоначально выбранную модель (или исключают из нее) поочередно [14,16,17]. Однако процедура поочередного включения (исключения) дополнительных переменных не всегда представляется удобной, по крайней мере, по следующим причинам.

Во-первых, она может оказаться трудоемкой при большом числе переменных, когда необходимо исследовать влияние в отдельности каждой из них на результат оценки параметров модели. Во-вторых, в известных процедурах поочередного включения дополнительных переменных, как правило, используется допущение о некоррелированности результатов наблюдений, в то время как их корреляция может иметь существенное значение при оценке параметров модели. И, в-третьих, что, по-видимому, является не менее важным, процедура последовательного, пошагового, увеличения (уменьшения) размерности решаемой задачи в случае плохой обусловленности матриц систем уравнений приводит к накоплению погрешностей вычисления.

Задача выбора регрессионной модели имеет первостепенное значение при построении методов обработки траекторных измерений, содержащих систематические (регулярные) и случайные погрешности. В особенности, когда, наряду с оценкой параметров модели движения объектов, требуется изучить влияние на результат их оценки различных по физической природе факторов, порождающих систематические погрешности. При обработке результатов траекторных измерений желательно, по возможности, рассматривать в регрессионной модели каждую такую группу факторов, с тем, чтобы по результатам анализа принимать решение о включении их в регрессионную модель, или же, напротив, исключения их из первоначально выбранной модели.

Таким образом, возникает важная в научном и прикладном отношении задача оценивания параметров регрессионной модели, допускающей включение в нее дополнительных групповых (матричных), а не только по отдельности скалярных, регрессоров или, напротив, исключения их из модели при обработке результатов траекторных измерений.

Введём основные допущения (ограничения) в её постановке.

Модель движения. При определении движения летательного аппарата по результатам траекторных измерений будем рассматривать его как твердое тело постоянной или переменной массы, считая при этом, что его ось симметрии совпадает с вектором скорости движения центра масс. Рассмотрение движения ЛА в «схеме материальной точки» позволяет определять его координаты $x_j = x_j(t)$ и производные от них по времени (фазовые координаты) в текущий момент времени $t \in [a,b]$, где a и b – известные границы интервала времени.

Совокупность величин x_j образует замкнутую область (пространство) $R^m \subset \mathrm{E}_m$ точек $(x_1.x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_m)$ в m-мерном евклидовом пространстве E_m. В дальнейшем мы будем называть область R^m пространством состояния математической модели объекта в пространстве E_m.

Для обозначения координат точек $x_j = x_j(t)$ в текущий момент времени t введем m- мерный вектор $X(t) = X = \left\| x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m \right\|^{\mathrm{T}}$, где T – знак транспонирования.

В дальнейшем предполагается, что кинематическая модель движения ЛА описывается известной зависимостью

$$x_j = x_j(t) = \sum_{k=0}^{n_j} p_{jk}\varphi_{jk}(t),$$

$$j = 1, 2, \cdots, m, \qquad (1)$$

где $\varphi_{jk}(t)$ – заданная система линейно-независимых функций, обладающих известными аналитическими свойствами, n_j –

заданное целое, p_{jk} – неизвестные параметры модели (1).

В ряде практических случаев движение ЛА будем описывать полиномиальной моделью

$$x_j = x_j(t) = \sum_{k=0}^{n_j} a_{jk} t^k , \qquad (2)$$

где a_{jk} – неизвестные коэффициенты полинома (2).

При использовании моделей движения (1) и (2) задача определения движения ЛА состоит в оценке неизвестных параметров p_{jk} и a_{jk} по результатам ТИ и, в отдельных случаях, – в уточнении числа n_j компонентов (регрессоров), входящих в первоначально выбранную аддитивную модель.

Определение координат. Координаты ЛА x_j определяют как точки пересечения линий или поверхностей положения, соответствующих геометрическим величинам $l_i = l_i(t),\ i = 1,2,\cdots,n$. Величинами l_i могут быть радиальные дальности до ЛА, его углы места и азимутальные углы, направляющие косинусы углов и др. Они рассчитываются известными косвенными методами по результатам прямых измерений параметров сигналов, выполняемых средствами ТИ [1]. Предполагая известными тип и число p средств ТИ, считаем известным число n измеряемых величин l_i, которое связано соотношением $n \geq m$ с числом m определяемых величин x_j.

Совокупность величин l_i образует пространство R^n точек $(l_1, l_2, \cdots, l_i, \cdots, l_n)$. Для обозначения координаты этих точек в текущий момент времени t введем n-мерный вектор

$$L(t) = L = \left\| l_1, l_2, \cdots, l_i, \cdots, l_n \right\|^{\mathrm{T}}.$$

Предполагается известной функциональная зависимость

$$l_i(t) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m;\ t, Y),$$
$$i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (3)$$

между измеряемыми $l_i(t)$ и определяемыми $x_j(t)$ величинами для известного вектора Y геодезических координат средств ТИ. Размерность вектора Y, введенного в соотношение (3), определяется числом p средств ТИ. При определении координат ЛА в пространстве E_2 он имеет размерность $2p$, для пространства E_3 его размерность равна $3p$.

Предполагается, что функции f_i определены для всех значений аргументов $x_j \in Q_X$ в открытом выпуклом множестве $Q_X \subset R^m$ и $(q+1)$-раз непрерывно дифференцируемы в нем, $q = 1, 2, \cdots$.

Набором (вектором)

$$F(X;\ t, Y) = \left\| f_1, f_2, \cdots, f_i, \cdots, f_n \right\|^{\mathrm{T}}$$

заданных функций f_i описывается выбранный метод определения величин $x_j = x_j(t)$ по измерениям величин $l_i(t)$

Уравнение (3), вообще говоря, описывает метод траекторных измерений [1]. В дальнейшем мы будем пользоваться векторной формой его выражения:

$$L = F(X;\ t, Y). \qquad (4)$$

Модель результатов траекторных измерений задана векторным уравнением

$$\tilde{L}(t) = \tilde{L} = \left\| \tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_i, \cdots, \tilde{l}_n \right\|^{\mathrm{T}} =$$
$$= L + C + \Xi, \qquad (5)$$

где C и Ξ – соответственно, векторы систематических и случайных погрешностей результатов измерения.

Систематическая погрешность C рассматривается как результат совокупного воздействия на процесс измерения различных по физической природе факторов. Каждый из них приводит к возникновению соответствующей составляющей систематической погрешности. Поэтому можно считать, что для известного числа h_i факторов, порождающих систематическую погрешность c_{ih} результата измерения величины l_i, $i=1,2,\cdots,n$, $h=1,2,\cdots,h_i$, общее число систематических погрешностей в результатах измерения всех величин

$L=\left\|l_1,l_2,\cdots,l_i,\cdots,l_n\right\|^{\mathrm{T}}$ равно $\sum_{i=1}^{n}h_i$.

Следовательно, вектор

$C=\left\|C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots,C_n\right\|^{\mathrm{T}}$ с компонентами $C_i=\left\|c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{ih},\cdots,c_{ih_i}\right\|^{\mathrm{T}}$ будет иметь такую же размерность.

Каждая из систематических погрешностей c_{ih}, как компонента вектора C_i, $i=1,2,\cdots,n$, носит детерминированный характер в отдельном эксперименте и может случайным образом меняться от эксперимента к эксперименту. В отдельно проведенном сеансе измерений ее можно описывать математической моделью:

$$c_{ih}=\psi_{ih}\left(b_{ih1},b_{ih2},\cdots,b_{ih\lambda},\cdots,b_{ih\lambda_{ih}};t\right),\ i=1,2,\cdots,n;\ h=1,2,\cdots,h_i, \tag{6}$$

где ψ_{ih} – известные аналитические функции (в частном случае, функции времени);

$b_{ih\lambda}$ – неизвестные параметры модели;

$\lambda=1,2,\cdots,\lambda_{ih}$ – номер параметра $b_{ih\lambda}$;

λ_{ih} – общее число параметров $b_{ih\lambda}$, $i=1,2,\cdots,n$; $h=1,2,\cdots,h_i$.

В модели (6) функции $\psi_{ih\lambda}$ определены для всех значений аргументов $b_{ih\lambda}\in Q_B$ в открытом выпуклом множестве $Q_B\subset R^{\Upsilon}$. Замкнутую область R^{Υ}, образованную совокупностью точек $\left(b_{ih1},b_{ih2},\cdots,b_{ih\lambda},\cdots,b_{ih\lambda_{ih}}\right)$, будем называть областью состояния математической модели (6). Она имеет размерность $\Upsilon=\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{h_i}\lambda_{ih}$, равную общему числу параметров $b_{ih\lambda}$ данной модели.

Составим из функций $\psi_{ih\lambda}$ следующие составные векторы:

а) вектор

$\Psi_{ih}=\left\|\psi_{ih1},\psi_{ih2},\cdots,\psi_{ih\lambda},\cdots,\psi_{ih\lambda_{ih}}\right\|^{\mathrm{T}}$ размерности λ_{ih}. Компонентами его являются функции $\psi_{ih\lambda}$ с соответствующим номером $\lambda=1,2,\cdots,\lambda_{ih}$. Эти функции введены для описания отдельно рассматриваемой систематической погрешности c_{ih}, которая возникает из-за воздействия на процесс измерения величины $l_i\in\left\{l_1.l_2,\cdots,l_n\right\}$ отдельного мешающего фактора с номером $h\in\left\{1,2,\cdots,h_i\right\}$;

б) вектор

$\Psi_i=\left\|\Psi_{i1},\Psi_{i2},...,\Psi_{ih},...,\Psi_{ih_i}\right\|^{\mathrm{T}}$ размерности $\sum_{h=1}^{h_i}\lambda_{ih}$. Его компоненты представляют собой набор функций Ψ_{ih}, которые используются для описания систематической погрешности

$C_i=\left\|c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{ih},\cdots,c_{ih_i}\right\|^{\mathrm{T}}$, которая возникает из-за воздействия на процесс измерения величины $l_i\in\left\{l_1.l_2,\cdots,l_n\right\}$ всех мешающих факторов $h=1,2,\cdots,h_i$;

в) вектор

$\Psi=\left\|\Psi_1,\Psi_2,...,\Psi_i,...,\Psi_n\right\|^{\mathrm{T}}$ размерности Υ, составленный из набора функций Ψ_i. Он используется для аддитивного представления систематической погрешности $C=\left\|C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots,C_n\right\|^{\mathrm{T}}$ с помощью введенных выше векторных функций Ψ_{ih}.

Выделим из параметров $b_{ih\lambda}$ модели систематической погрешности (6) составные векторы:

г) вектор

$B_{ih} = \left\| b_{ih1}, b_{ih2}, \cdots, b_{ih\lambda}, \cdots, b_{ih\lambda_{ih}} \right\|^{\mathrm{T}}$ размерности λ_{ih}. Компонентами его являются коэффициенты $b_{ih\lambda}$ модели (6), введенной для описания отдельно рассматриваемой систематической погрешности c_{ih}, возникающей под воздействием отдельного мешающего фактора с номером h на процесс измерения отдельной величины l_i;

д) вектор

$B_i = \left\| B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{ih}, \ldots, B_{ih_i} \right\|^{\mathrm{T}}$ размерности $\sum_{h=1}^{h_i} \lambda_{ih}$. Его компоненты представляют собой набор векторных коэффициентов B_{ih}. Эти коэффициенты используются совместно с векторными функциями Ψ_{ih} для представления систематической погрешности C_i, измерения величины l_i в векторной форме

$$C_i = \Psi_i\left(B_i\right) = = \left\| \begin{matrix} \Psi_{i1}\left(B_{i1}\right), \Psi_{i2}\left(B_{i2}\right), \\ \ldots, \Psi_{ih}\left(B_{ih}\right), \ldots, \Psi_{ih_i}\left(B_{ih_i}\right) \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}}; \quad (7)$$

$i = 1, 2, \cdots, n$;

е) вектор $B = \left\| B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n \right\|^{\mathrm{T}}$. Он составлен из набора векторных коэффициентов B_i, имеет размерность Υ и используется для представления систематической погрешности C измерения векторной величины L в векторной форме

$$C = \Psi\left(B\right) = = \left\| \begin{matrix} \Psi_1\left(B_1\right), \Psi_2\left(B_2\right), \ldots, \\ \Psi_i\left(B_i\right), \ldots, \Psi_n\left(B_n\right) \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}}; \quad (8)$$

Случайная погрешность результатов измерения векторной величины L задана в модели (5) вектором $\Xi = \Xi(t) = = \left\| \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_n \right\|^{\mathrm{T}}$. Его компонентами $\xi_i = \xi_i(t)$ являются случайные погрешности результатов измерения соответствующей величины l_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Будем считать, что вектор Ξ относится к классу случайных нормальных векторов, у которых математическим ожиданием $\mathrm{M}\left[\Xi\right]$ является нулевой вектор. Случай, когда математическое ожидание – не нулевой вектор, можно учесть добавлением в модель (5) дополнительных слагаемых. Предполагается также известной корреляционная (дисперсионно-ковариационная) матрица $D\left[\Xi\right]$ случайного вектора Ξ.

Во многих практических случаях, когда величины l_i измеряются различными и не влияющими друг на друга средствами ТИ, случайные погрешности $\xi_i = \xi_i(t)$ результатов их измерения, вообще говоря, статистически независимы. Тогда для известной дисперсии $D\left[\xi_i\right] = \sigma_i^2$ каждой из случайных величин ξ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, где σ_i – известное среднее квадратическое отклонение, корреляционная матрица $D\left[\Xi\right]$ может записываться так [3,8,11,14]:

$$D\left[\Xi\right] = \left\| \sigma_i^2 \delta_{ik} \right\|, \; i, k = 1, 2, \cdots, n, \quad (9)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Если для случайных погрешностей имеет место соотношение $\sigma_i = \sigma_0$, где σ_0 – известное, одинаковое для всех случайных величин $\xi_i = \xi_i(t)$ среднее квадратическое отклонение, то корреляционная матрица $D[\Xi]$ может быть представлена соотношением

$$D[\Xi] = \sigma_0^2 \mathrm{E}, \qquad (10)$$

где E – единичная матрица.

С использованных введенных обозначений для каждого фиксированного момента времени t векторную (в общем случае нелинейную) модель регрессии, соответствующую уравнению (5), можно записать так

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right] = L + C = F(X;Y) + \\ +\Psi(B);\; D\left[\tilde{L}\right] = D[\Xi], \qquad (11)$$

где $\tilde{L} = \tilde{L}(t),\; L = L(t),\; \Psi(B;\; t)$.

Ее компонента L определена соотношением (4) для заданных значений вектора Y геодезических координат средств ТИ. В том случае, когда геодезические координаты Y содержат в себе заранее неизвестные систематические погрешности Δ_Y, которые, как дополнительные параметры, подлежащие определению, модель регрессии (11) можно записать уравнением

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right] = L + C = F(X, \Delta_Y; \tilde{Y}) + \\ +\Psi(B);\; D\left[\tilde{L}\right] = D[\Xi], \qquad (12)$$

где $\tilde{Y} = Y + \Delta_Y$ – вектор данных о геодезических координатах, используемых при обработке результатов траекторных измерений: Размерность векторов $\tilde{Y}$ и Δ_Y определена размерностью вектора Y.

Векторы B, Ψ, C имеют следующую структуру:

$$B = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_i = \left[\begin{matrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{ih} = \begin{pmatrix} b_{ih1} \\ b_{ih2} \\ \vdots \\ b_{ih\lambda} \\ \vdots \\ b_{ih\lambda_{ih}} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ B_{ih_i} \end{matrix} \right] \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} \right\|; \quad \Psi = \left\| \begin{matrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_i = \left[\begin{matrix} \Psi_{i1} \\ \Psi_{i2} \\ \vdots \\ \Psi_{ih} = \begin{pmatrix} \psi_{ih1} \\ \psi_{ih2} \\ \vdots \\ \psi_{ih\lambda} \\ \vdots \\ \psi_{ih\lambda_{ih}} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \Psi_{ih_i} \end{matrix} \right] \\ \vdots \\ \Psi_n \end{matrix} \right\|;$$

$$C=\left\|\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_i=\left[\begin{matrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ih}=\psi_{ih}\left(b_{ih1},b_{ih1},\cdots,b_{ih\lambda},\cdots,b_{ih_{ih}};\ t\right) \\ \vdots \\ c_{ih_i}\end{matrix}\right] \\ \vdots \\ C_n\end{matrix}\right\|.$$

В уравнении (12) известными (исходными) являются следующие величины.

1. Результаты траекторных измерений $\tilde{L}$ векторной величины L в текущий момент времени t.

2. Вектор $\tilde{Y}$ заданных геодезических координат средств ТИ, используемых при обработке результатов измерений.

3. Число m определяемых координат вектора X с использованием модели (4) или число n_j и a_{jk} определяемых параметров модели движения ЛА (1) и (2), соответственно.

4. Модель (8) систематических погрешностей C результатов траекторных измерений с неизвестными параметрами B модели.

5. Статистические свойства случайных погрешностей результатов траекторных измерений: $\mathrm{M}[\Xi]$ и $D[\Xi]$.

По исходным данным требуется определить следующие величины.

1. Вектор координат ЛА $(x_1.x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_m)$ и их производных по времени t (вектор состояния X).

2. Параметры B модели (8) систематических погрешностей измерения.

3. Систематические погрешности Δ_Y в значениях геодезических координат средств ТИ.

Перейдем к описанию модели оценки этих величин.

Модель оценки. Будем находить оценки параметров X, B и Δ_Y уравнения регрессии (12) при следующих допущениях, отражающих характерные условия проведения траекторных измерений при полигонных испытаниях ВВТ.

Предполагается, что на испытаниях используется такой состав и количество p средств ТИ, который наделяет полигонный измерительный комплекс свойствами структурной и временной избыточности. Смысл этих свойств состоит в следующем.

1. Число n измеряемых величин $l_i=l_i(t_k)$, по которым оцениваются параметры модели регрессии (12), связаны с числом m координат вектора X, числом Υ компонентов вектора B и числом $3p$ компонентов вектора Δ_Y соотношением.

$$n\geq m+\Upsilon+3p \tag{13}$$

Иными словами, общее число определяемых величин X, B и Δ_Y в фиксированный момент времени $t_k \in [0,\tau]$ не должно превышать общего числа уравнений в совместной системе (12).

2. Каждая изменяемая во времени величина $l_i = l_i(t_k)$ принимает различные значения в фиксированные моменты времени $t_k \in [0,\tau]$:

$$\forall i = 1,2,\cdots,n,\ \forall t_{k_\alpha} \neq t_{k_\beta}:\ l_{ik_\alpha} \neq l_{ik_\beta};$$
$$k_\alpha, k_\beta = 1,2,\cdots,s, \qquad (14)$$

где $l_{ik_{\alpha(\beta)}} = l_i\left(t_{\alpha(\beta)}\right)$.

3. Число s моментов времени измерений, для которых выполняется условие (14), должно быть достаточным для однозначного определения величин X, B и Δ_Y из решения уравнения(12). Для этого требуется, чтобы для величины s выполнялось условие

$$s \geq \left[\frac{\Upsilon + 3p}{n-m}\right]_0, \qquad (15)$$

где символом $[a]_0$ обозначена операция округления числа a до ближайшего целого в направлении к положительной бесконечности.

Соотношения (14) и (15) выражают, соответственно необходимые и достаточные условия, при которых возможно находить оценку векторного параметров X, B и Δ_Y модели регрессии (12) для фиксированных моментов времени измерения $t = t_k \in [0,\tau]$.

Введем составной вектор $\mathrm{P} = \left\| X \middle| B \middle| \Delta_Y \right\|^{\mathrm{T}}$ размерности $\nu = m + \Upsilon + 3p$ для перехода к обобщенному виду записи уравнение регрессии (12):

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right] = L + C = F(X, \Delta_Y; \tilde{Y}) +$$
$$+\Psi(B) = \Theta(\mathrm{P});\ D\left[\tilde{L}\right] = D[\Xi], \qquad (16)$$

где $\Theta(\mathrm{P})$ – функциональное отношение между векторными величинами $\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right]$ и P. Следуя [14], мы будем называть это отношение регрессией случайной величины $\tilde{L}$ на неслучайную величину P.

При выборе метода оценивания вектора P с использованием обобщенной модели (16) необходимо стремиться, во-первых, к построению удобных в практическом применении рекуррентных вычислительных процедур. И, во-вторых, чтобы они, в отличие от известных процедур оценивания параметров многомерных регрессий [14,16,17], предусматривали возможность включения в первоначально выбранную модель (или, напротив, исключения из нее) как отдельных, так и целых групп переменных с матричными коэффициентами, влияние которых на исследуемый процесс требуется оценивать особо. В, в-третьих, что весьма существенно, чтобы в вычислительных процедурах не требовалось увеличения размерности обращаемых матриц.

В дальнейшем мы будем рассматривать общий класс моделей оценки, в которых функция регрессии $\Theta(\mathrm{P})$ – нелинейная по своим параметрам. Что касается линейных моделей, выбор которых в регрессионном анализе вовсе не столь ограничен, как это может показаться на первый взгляд [14], то в нашем изложении они рассматриваются как частный случай. К нему можно прийти, применяя надлежащие преобразования, или же численные методы ньютоновского (квазиньютоновского) типа [7]. С их помощью для оценивания параметра P сначала строится ее модельная квадратичная аппроксимация, и затем на основе ее решения находится новое приближение обобщенным методом наименьших квадратов с применением линейной модели.

В качестве меры приближения оценки $\mathrm{P}^* \in R^\nu$, как координат точки пространства R^ν, к параметру P нелинейной модели (16) выберем, согласно [7], критериальную функцию

$$V = V(\mathrm{P}) = \Phi^{\mathrm{T}}(\mathrm{P}) D^{-1}[\Xi] \Phi(\mathrm{P}) \qquad (17)$$

где векторной функцией

$$\Phi(\mathrm{P}): R^n \to R^{\nu}, n > \nu \qquad (18)$$

обозначена невязка измерения

$$\Phi(\mathrm{P}) = \tilde{L} - \Theta(\mathrm{P}). \qquad (19)$$

В качестве дополнительных условий потребуем, чтобы функция $V(\mathrm{P})$ достигала локального минимума при значениях $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}$, и чтобы этот минимум не был вырожденным.

В перечисленных выше ограничениях можно находить оценку вектора P из решения нелинейной задачи о наименьших квадратах [7,10,11]: найти

$$\min_{\mathrm{P}\in R^{\nu}} V(\mathrm{P}) = \Phi^{\mathrm{T}}(\mathrm{P}) D^{-1}[\Xi]\Phi(\mathrm{P}) \qquad (20)$$

где функция невязки $\Phi(\mathrm{P})$: $\Phi(\mathrm{P})$ $R^n \to R^{\nu}$, $n > \nu$, – нелинейная по аргументу P.

Решение задачи (20) представляет собой вектор координат точек $\mathrm{P}^* \in R^{\nu}$, удовлетворяющих необходимому и достаточному условию экстремума функции $V(\mathrm{P})$ в области R^{ν} при введенных выше ограничениях.

При построении вычислительных процедур решения нелинейно задачи (20) в классе методов полностью или частично ньютоновского типа требуется нахождение произведения вида

$$\left\| \begin{matrix} \left\|J(\mathrm{P})\right\|^{\mathrm{T}} D^{-1}[\Xi] J(\mathrm{P}) + \\ + S(\mathrm{P}) \end{matrix} \right\|^{-1} \left\|J(\mathrm{P})\right\|^{\mathrm{T}} D^{-1}[\Xi]\Phi(\mathrm{P}) \qquad (21)$$

в методе Ньютона или произведения вида

$$\left\| \left\|J(\mathrm{P})\right\|^{\mathrm{T}} D^{-1}[\Xi] J(\mathrm{P}) \right\|^{-1} \left\|J(\mathrm{P})\right\|^{\mathrm{T}} D^{-1}[\Xi]\Phi(\mathrm{P}) \qquad (22)$$

в методе Гаусса-Ньютона,

где $J(\mathrm{P}) \in R^{n+\nu}$ – матрица первых производных функции $\Phi(\mathrm{P})$ по координатам вектора P (матрица Якоби);

$S(\mathrm{P})$ – слагаемое в выражении для матрицы вторых производных функции $\Phi(\mathrm{P})$ по координатам вектора P [7].

При нахождении этих произведений возникают известные вычислительные сложности, особенно для матриц большой размерности [7]. Они часто встречаются и при обработке результатов траекторных измерений, особенно в тех ситуациях, когда возникает потребность во включении в исходную модель регрессии (15) одного или нескольких параметров, или, напротив, исключения из всего набора параметров исходной модели определенной части ее параметров.

Для формального отражения в модели регрессии (15) подобных ситуаций представим вектор P в виде составного вектора, содержащего блочные компоненты:

$$\mathrm{P} = \begin{cases} \mathrm{P}_1 = X \textit{при оценке вектора } X, \\ \mathrm{P}_2 = B \textit{при оценке вектора } B, \\ \mathrm{P}_3 = \Delta_Y \textit{ при оценке вектора } \Delta_Y, \\ \mathrm{P}_{ij} = \left\|\mathrm{P}_i \mathrm{P}_j\right\|^{\mathrm{T}}, \; i,j = 1,2,3, \; i \neq j, \\ \mathrm{P}_{ijk} = \left\|\mathrm{P}_i \mathrm{P}_j \mathrm{P}_k\right\|^{\mathrm{T}}, \; i,j = 1,2,3, \; i \neq j. \end{cases} \qquad (23)$$

Размерность ν такого вектора P будет определяться его структурой, в зависимости от того, какие компоненты блочных векторов X, B и Δ_Y будут использованы в модели регрессии (16) при обработке результатов траекторных измерений. Чтобы учитывать все многообразие подобных случаев, представляется естественной следующая форма задания вектора P, у которого компоненты P_{α} (блочные или скалярные) обозначены натуральными числами $\alpha = 1, 2, \cdots, \bar{\alpha}$:

$$\mathrm{P} = \left\| \mathrm{P}_1 \middle| \mathrm{P}_2 \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_{\alpha} \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_{\bar{\alpha}} \right\|^{\mathrm{T}}. \qquad (24)$$

Введенные исходные данные и предположения (1)–(24) мы будем учитывать при формулировке исследуемой задачи оценивания параметров регрессионной модели, используемой при обработке результатов траекторных измерений, с включением в нее дополнительных матричных, а не только по отдельности скалярных, регрессоров или, напротив, исключения их из модели.

Перейдем к постановке исследуемой задачи.

Пусть модель регрессии задана уравнением

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right]=\Theta\left(\mathrm{P}\right);\ D\left[\tilde{L}\right]=D\left[\Xi\right]. \quad (25)$$

В этом уравнении вектором $\tilde{L}$ обозначены известные результаты измерений векторной величины L. Вектор P, который требуется определить по значениям вектора $\tilde{L}$, является аргументом известной нелинейной векторной функции $\Theta\left(\mathrm{P}\right)$, обладающей известными аналитическими свойствами.

Измерения выполняются средствами ТИ при испытаниях образцов вооружения и военной техники. Погрешности результатов измерений описываются аддитивной моделью (5). Вектор случайной составляющей погрешности Ξ относится к классу случайных нормальных векторов. Его статистические свойства определены математическим ожиданием $\mathrm{M}\left[\Xi\right]$ – нулевым вектором, и известной корреляционной (дисперсионно-ковариационной) матрицей $D\left[\Xi\right]$.

Пусть в исходную модель (25) требуется дополнительно включить определенное число $\bar{\alpha}$ неизвестных параметров P_α (векторных или скалярных), чтобы исходная модель при их включении приняла вид:

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right]=\Theta\left(\mathrm{P}\right)+\sum_{\alpha=1}^{\bar{\alpha}}\Theta_\alpha\left(\mathrm{P}_\alpha\right);$$

$$D\left[\tilde{L}\right]=D\left[\Xi\right]. \quad (26)$$

Предполагается, что функции $\Theta_\alpha\left(\mathrm{P}_\alpha\right)$, $\alpha=1,2,\cdots,\bar{\alpha}$, входящие в уравнение (26), известны и наделены необходимыми аналитическими свойствами.

Если заменить правую часть этого уравнения известным функциональным отношением $Z\left(\bar{\mathrm{P}}\right)$ между векторной величиной $\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right]$ и расширенным вектором $\bar{\mathrm{P}}=\left\|\mathrm{P}_0\left|\mathrm{P}_1\right|\ldots\left|\mathrm{P}_\alpha\right|\ldots\left|\mathrm{P}_{\bar{\alpha}}\right.\right\|^{\mathrm{T}}$ размерности $\bar{\nu}$, в котором блочный вектор P_0 равен исходному вектору P, представленному в форме (24), то можно описать расширенную модель регрессии уравнением

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right]=Z\left(\bar{\mathrm{P}}\right);\ D\left[\tilde{L}\right]=D\left[\Xi\right]. \quad (27)$$

Как и в задаче (20), выберем в качестве меры приближения оценки $\bar{\mathrm{P}}^*\in R^{\nu+\bar{\nu}}$ к параметру $\bar{\mathrm{P}}$ нелинейной модели (27) критериальную функцию

$$\bar{V}=\bar{V}\left(\bar{\mathrm{P}}\right)=\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\mathrm{P}}\right)D^{-1}\left[\Xi\right]\bar{\Phi}\left(\bar{\mathrm{P}}\right), \quad (28)$$

где векторной функцией

$$\bar{\Phi}\left(\bar{\mathrm{P}}\right):\ R^n\to R^{\nu+\bar{\nu}},\ n>\nu+\bar{\nu} \quad (29)$$

обозначена невязка измерения

$$\bar{\Phi}\left(\bar{\mathrm{P}}\right)=\tilde{L}-Z\left(\bar{\mathrm{P}}\right). \quad (30)$$

Ставится задача: требуется построить оценку вектора $\bar{\mathrm{P}}$ при заданных выше ограничениях из решения нелинейной задачи о наименьших квадратах:

найти

$$\min_{\mathrm{P}\in R^{\nu+\bar{\nu}}}\bar{V}\left(\bar{\mathrm{P}}\right)=\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\left(\bar{\mathrm{P}}\right)D^{-1}\left[\Xi\right]\bar{\Phi}\left(\bar{\mathrm{P}}\right) \quad (31)$$

где функция невязки $\bar{\Phi}\left(\bar{\mathrm{P}}\right):\ R^n\to R^{\nu+\bar{\nu}}$, $n>\nu+\bar{\nu}$ – нелинейная по аргументу $\bar{\mathrm{P}}$.

Задачу (31) можно рассматривать, как обобщение задачи (20) на случай, когда в исходную модель регрессии (24) включается дополнительно произвольное число матричных (а не только скалярных) компонентов P_α, $\alpha=1,2,\cdots,\bar{\alpha}$, или, напротив, когда они исключается из уже имеющейся модели.

Перейдем к решению поставленной задачи.

Будем находить решение задачи (31) в классе методов полностью ньютоновского типа с использованием квадратичной модели (28) функции $V(\overline{\mathrm{P}})$ в окрестности заданного вектора $\overline{\mathrm{P}}_0 \in R^{\nu+\overline{\nu}}$, предполагая, что существует такое значение $\overline{\mathrm{P}}^{\circ} \in Q_{\overline{\mathrm{P}}} \subset R^{\nu+\overline{\nu}}$ вектора $\overline{\mathrm{P}}$, что $V(\overline{\mathrm{P}}^0) = 0$.

При введенных ограничениях решение задачи (31) можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть для квадратичной модели (28) функции $V(\overline{\mathrm{P}})$, в которой функция невязки измерений $\Phi(\overline{\mathrm{P}})$: $R^n \to R^{\nu+\overline{\nu}}$, $n > \nu + \overline{\nu}$ – нелинейная, дважды дифференцируемая по векторной переменной $\overline{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_\alpha \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_{\overline{\alpha}} \right\|^{\mathrm{T}}$ в открытом выпуклом множестве $Q_{\overline{\mathrm{P}}} \subset R^{\nu+\overline{\nu}}$. И пусть существует такое значение $\overline{\mathrm{P}}^0 = \left\| \mathrm{P}_0^0 \middle| \mathrm{P}_1^0 \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_\alpha^0 \middle| \ldots \middle| \mathrm{P}_{\overline{\alpha}}^0 \right\|^{\mathrm{T}} \subset R^{\nu+\overline{\nu}}$ для аргумента $\overline{\mathrm{P}}$, что $V(\overline{\mathrm{P}}^0) = 0$.

Тогда решением задачи (31) будет последовательность векторов $\mathrm{P}^*_{\alpha(1)}, \mathrm{P}^*_{\alpha(2)}, \cdots, \mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}$, $\alpha = 0,1,2,\cdots,\overline{\alpha}$, порожденная методом Ньютона. На каждом шаге $\omega = 0,1,2,\ldots$ приближения этой последовательности к значению P^0_α, $\alpha = 0,1,2,\cdots,\overline{\alpha}$, оценка $\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}$ определятся рекуррентным соотношением

$$\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)} = \mathrm{P}^*_{\alpha(\omega)} - W_{\alpha(\omega)} J^{\mathrm{T}}_{\alpha(\omega)} D^{-1}[\Xi] \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\alpha}}^{\overline{\alpha}} R_{\nu(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \quad \alpha = 0,1,2,\cdots,\overline{\alpha}, \tag{32}$$

а ее корреляционная (дисперсионно-ковариационная) матрица $D\left[\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}\right]$ находится из соотношения

$$D\left[\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}\right] = W_{\alpha(\omega)} J^{\mathrm{T}}_{\alpha(\omega)} D^{-1}[\Xi] \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\alpha}}^{\overline{\alpha}} R_{\nu(\omega)} D[\Xi] \left\| \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\alpha}}^{\overline{\alpha}} R_{\nu(\omega)} \right\|^{\mathrm{T}} D^{-1}[\Xi] J_{\alpha(\omega)} W_{\alpha(\omega)},$$

$$\alpha = 0,1,2,\cdots,\overline{\alpha}, \tag{33}$$

где

$$W_{\alpha(\omega)} = \left\| J^{\mathrm{T}}_{\alpha(\omega)} D^{-1}[\Xi] \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\alpha}}^{\overline{\alpha}} R_{\nu(\omega)} J_{\alpha(\omega)} + S_{\alpha(\omega)} \right\|^{-1}, \quad \alpha = 0,1,2,\cdots,\overline{\alpha}; \tag{34}$$

$$R_{\nu(\omega)} = \mathrm{E} - J_{\alpha(\omega)} W_{\nu(\omega)} J^{\mathrm{T}}_{\alpha(\omega)} D^{-1}[\Xi] \prod_{\rho=1}^{\nu-1} R_{\rho(\omega)}, \quad \nu = 1,2,\cdots,\overline{\alpha}, \tag{35}$$

$\prod_{\rho=1}^{\nu-1} R_{\rho(\omega)} = \mathrm{E}$, если $\nu = 1$, где E – единичная матрица;

$J_{\alpha(\omega)} \in R^{n+\nu}$ – матрица первых частных производных функции $\Phi = \Phi\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$ по координатам P_α вектора $\overline{\mathrm{P}}$ (матрица Якоби), определенная на итерационном шаге $\omega = 0,1,2,\cdots$;

$$S_{\alpha(\omega)} = \frac{\partial\left(J^{\mathrm{T}}_{\alpha(\omega)} D^{-1}\left[\Xi\right]\right)}{\partial \mathrm{P}_{\alpha(\omega)}} \Phi_{(\omega)}. \quad (36)$$

$S_{\alpha(\omega)}$ –матица вторых частных производных функции $\Phi = \Phi\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$ по координатам P_α вектора $\overline{\mathrm{P}}$, определенная на итерационном шаге $\omega = 0,1,2,\cdots$.

Доказательство теоремы проводится в рамках стандартных предположений о локальной и *q*-квадратичной сходимости метода Ньютона применительно к нелинейной модели (27) и целевой функции (28). В ходе доказательства устанавливается симметричность матрицы $D^{-1}\left[\Xi\right]\prod_{\rho=1}^{\nu-1} R_{\rho(\omega)}$ и идемпотентность матрицы $\prod_{\rho=1}^{\nu-1} R_{\rho(\omega)}$. Отсюда в результате безусловной минимизации целевой функции (28) следует оптимальность оценки $\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}$ и справедливость утверждения теоремы.

Полученный и сформулированный в виде теоремы результат позволяет находить решение поставленной задачи по оцениванию параметров регрессионной модели при обработке результатов траекторных измерений, предусматривающей включение в нее групповых (матричных) регрессоров, или же исключение их из первоначально выбранной модели.

Проанализируем полученный результат решения задачи.

Сформулируем результаты исследования решения (32)–(36) сформулированной задачи (31) в виде следствий из приведенной теоремы.

Следствие 1. Если в модели регрессии (27) справедливы допущения об отсутствии систематических погрешностей в результатах траекторных измерений и погрешностей в определении геодезических координат средств ТИ:

$$\mathrm{M}\left[\Xi\right] = \mathrm{O},\ C = \mathrm{O},\ \Delta_Y = \mathrm{O}, \quad (37)$$

то решение задачи (31) можно получить, пользуясь известными процедурами решения нелинейной задачи о наименьших квадратах методом Ньютона [7].

Следствие 2. Если справедливы допущения (37), и если в приближённых вычислениях можно пренебречь значениями $S_{\alpha(\omega)}$, считая их равными нулю, то для решения задачи (31) можно применить известную процедуру решения нелинейной задачи о наименьших квадратах методом Гаусса-Ньютона [7].

Следствие 3. Если в модели регрессии (27) функция $Z\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$ линейна относительно своих аргументов и справедливы допущения

$$\mathrm{M}\left[\Xi\right] = \mathrm{O},\ \Delta_Y = \mathrm{O}, \quad (38)$$

то решение задачи (31) можно получить, применяя известную процедуру оценивания линейных регрессий с двумя матричными коэффициентами [14].

Для рассматриваемого в постановке задачи (31) случая нами дано обобщение описанной в [14] процедуры оценивания линейных регрессий на произвольное конечное число матричных коэффициентов.

Приведем алгоритм и пример решения задачи по оцениванию параметров многомерной модели регрессии с матричными коэффициентами при обработке результатов траекторных измерений согласно разработанному методу.

Опишем вычислительную схему (алгоритм) оценки параметров многомерных регрессий предложенным методом, пользуясь приведенной ниже блок-схемой. Для придания ей большей наглядности, не нарушая общности при ее описании, ограничимся рассмотрением случаев, отмеченных целочисленными значениями $\alpha = 0,1,2$. А именно, когда в исходную модель включаются один, два и три регрессора, соответственно.

Блок-схема алгоритма (**рисунок 1**) содержит следующие основные функциональные компоненты.

1. Блок управления последовательностью выполнения арифметических и логических операций, в зависимости от первоначально выбранной модели регрессии (27). С его помощью выполняется вполне определенный цикл программы при построении оценки $\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}$,

2. Блок исходных данных, в котором хранятся следующие необходимые для работы алгоритма величины и исходные модели:

наблюдаемые значения $\tilde{L}(t)=\tilde{L}$ векторной величины $L(t)=L$ в фиксированные моменты времени $t=t_k\in[0,\tau]$;

кинематическая модель движения ЛА, заданная известной функциональной зависимостью (1) или (2) с заранее неизвестными параметрами p_{jk}, a_{jk};

данные $\tilde{Y}$ о геодезических координатах Y средств ТИ, различающиеся между собой на величину заранее неизвестных систематических погрешностей Δ_Y;

вид уравнения связи (4) между измеряемыми величинами L и определяемыми координатами X;

модель (5) результатов траекторных измерений;

модель (8) систематической погрешности C измерения с заранее неизвестными параметрами B;

модель распределения случайных погрешностей результатов траекторных измерений и ее параметры $\mathrm{M}[\Xi]$ и $D[\Xi]$;

вид критериальной функции $\bar{V}=\bar{V}(\bar{\mathrm{P}})$ и функции $\bar{\Phi}(\bar{\mathrm{P}})$ невязки измерений;

начальное приближение P^0_α для построения оценки вектора $\bar{\mathrm{P}}$;

значение e_0 меры e, устанавливающей близость искомой оценки $\mathrm{P}^*_{\alpha(\omega+1)}$ к истинному значению вектора $\bar{\mathrm{P}}$ на каждом шаге $\omega=0,1,2,\cdots$ приближения.

3. Блок модели регрессии (27) с неизвестным заранее векторным параметром $\bar{\mathrm{P}}$.

Вектор $\bar{\mathrm{P}}$ представлен в модели следующими блоками:

$\bar{\mathrm{P}}=\mathrm{P}_0$ – для $\alpha=0$;

$\bar{\mathrm{P}}=\left\|\mathrm{P}_0|\mathrm{P}_1\right\|^{\mathrm{T}}$ – для $\alpha=1$;

$\bar{\mathrm{P}}=\left\|\mathrm{P}_0|\mathrm{P}_1|\mathrm{P}_2\right\|^{\mathrm{T}}$ – для $\alpha=2$.

4. Модель оценки вектора $\bar{\mathrm{P}}$ с использованием квадратичного критерия (28). Общие соотношения (32)–(36), приведенные в сформулированном выше утверждении, конкретизируются в блоках 4.1–4.3 применительно к выбранным значениям $\alpha=0,1,2$.

В блоке 4.1 находится оценка $\mathrm{P}^*_{0(\omega+1)}$ вектора $\bar{\mathrm{P}}=\mathrm{P}_0$ методом Ньютона на итерационном цикле с номером $\omega=0,1,2,\cdots$ из соотношения

$$\mathrm{P}^*_{0(\omega+1)}=\mathrm{P}^*_{0(\omega)}-\left\|J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)}D^{-1}[\Xi]J_{0(\omega)}\right\|^{-1}J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)}D^{-1}[\Xi]\Phi_{(\omega)}. \quad (39)$$

Соотношением (39) описывается известная процедура нелинейного среднеквадратического оценивания векторного параметра регрессионной модели с одной блочной компонентой $\bar{\mathrm{P}}=\mathrm{P}_0$. По-существу, оно раскрывает смысл первого следствия теоремы для сформулированных условий (37).

ВООРУЖЕНИЕ И ЭКОНОМИКА №1(13) 2011 г.

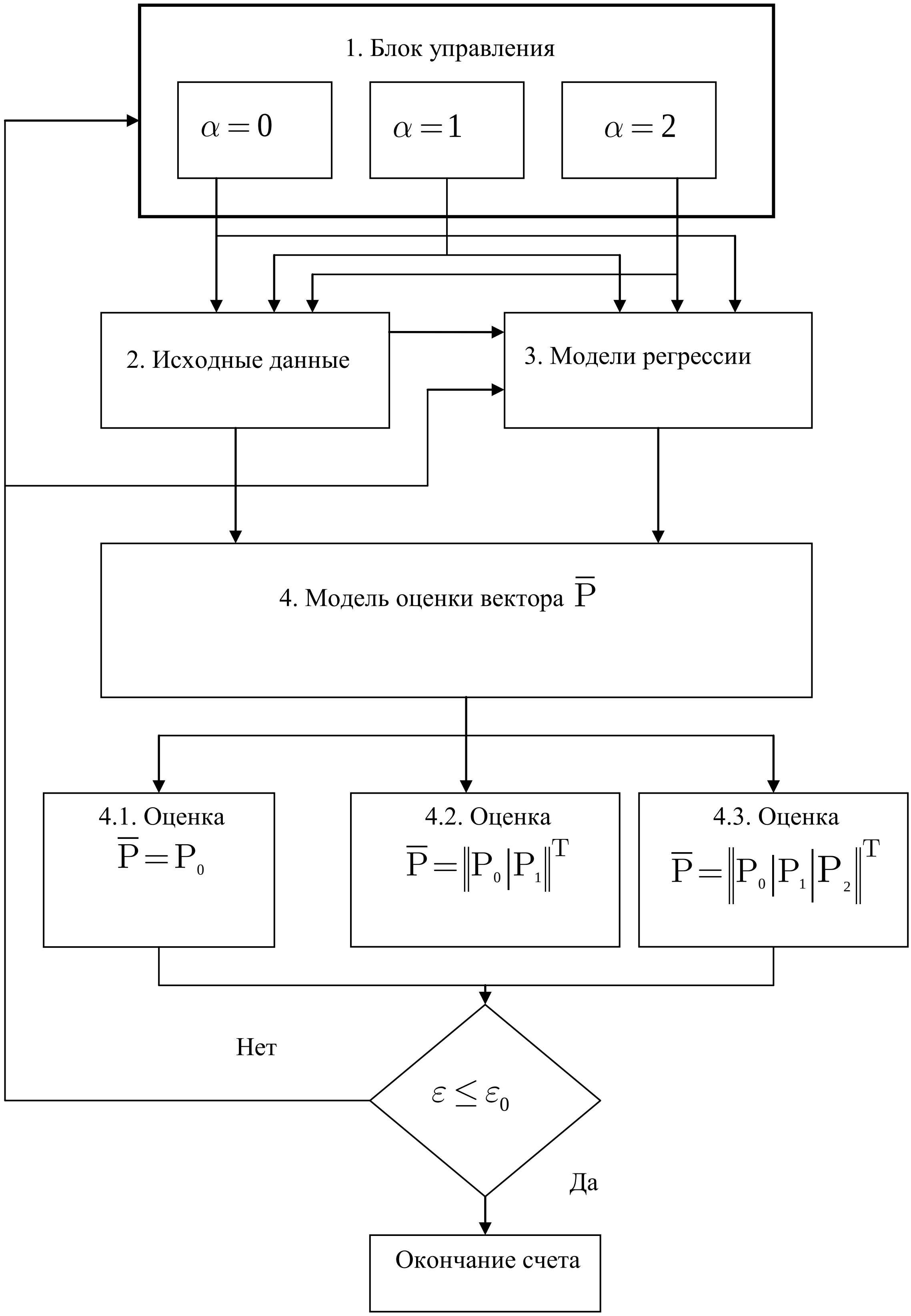

Рисунок 1. - Блок-схема алгоритма оценивания многомерных регрессий с матричными коэффициентами

В блоке 4.2 реализуется процедура последовательного среднеквадратического оценивания двух блочных компонентов векторного параметра $\overline{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \right\|^{\mathrm{T}}$ с помощью соотношений

$$\mathrm{P}^{*}_{0(\omega+1)} = \mathrm{P}^{*}_{0(\omega)} - \left\| J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] J_{0(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{1(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \qquad (40)$$

$$\mathrm{P}^{*}_{1(\omega+1)} = \mathrm{P}^{*}_{1(\omega)} - \left\| J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} J_{1(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \qquad (41)$$

где $$R_{0(\omega)} = \mathrm{E} - J_{0(\omega)} \left\| J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] J_{0(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi], \qquad (42)$$

$$R_{1(\omega)} = \mathrm{E} - J_{1(\omega)} \left\| J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} J_{1(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)}. \qquad (43)$$

Соотношениями (40)–(43) описывается процедура нелинейного среднеквадратического оценивания векторного параметра регрессионной модели с двумя блочными компонентами $\overline{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \right\|^{\mathrm{T}}$. Соотношения раскрывают смысл второго следствия теоремы.

В блоке 4.3 реализуется процедура последовательного среднеквадратического оценивания трех блочных компонентов векторного параметра $\overline{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \middle| \mathrm{P}_2 \right\|^{\mathrm{T}}$ с помощью соотношений

$$\mathrm{P}^{*}_{0(\omega+1)} = \mathrm{P}^{*}_{0(\omega)} - \left\| J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] J_{0(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{1(\omega)} R_{2(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \qquad (44)$$

$$\mathrm{P}^{*}_{1(\omega+1)} = \mathrm{P}^{*}_{1(\omega)} - \left\| J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} J_{1(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} R_{2(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \qquad (45)$$

$$\mathrm{P}^{*}_{2(\omega+1)} = \mathrm{P}^{*}_{2(\omega)} - \left\| J^{\mathrm{T}}_{2(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} R_{1(\omega)} J_{2(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{2(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} R_{1(\omega)} \Phi_{(\omega)}, \qquad (46)$$

где $$R_{0(\omega)} = \mathrm{E} - J_{0(\omega)} \left\| J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi] J_{0(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{0(\omega)} D^{-1}[\Xi], \qquad (47)$$

$$R_{1(\omega)} = \mathrm{E} - J_{1(\omega)} \left\| J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} J_{1(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{1(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)}. \qquad (48)$$

$$R_{2(\omega)} = \mathrm{E} - J_{2(\omega)} \left\| J^{\mathrm{T}}_{2(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} R_{1(\omega)} J_{2(\omega)} \right\|^{-1} J^{\mathrm{T}}_{2(\omega)} D^{-1}[\Xi] R_{0(\omega)} R_{1(\omega)}. \qquad (49)$$

Соотношениями (44)–(49), раскрывающими смысл третьего следствия теоремы, описывается процедура нелинейного среднеквадратического оценивания векторного параметра регрессионной модели с тремя блочными компонентами $\overline{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \middle| \mathrm{P}_2 \right\|^{\mathrm{T}}$.

Результаты оценивания вектора $\overline{\mathrm{P}}$ поступают в логический блок сравнения для проверки условия $\varepsilon \le \varepsilon_0$. В этом условии величиной ε_0 обозначено заранее заданное значение меры, по которому принимается решение о прекращении или продолжении итерационного цикла вычислений. В качестве сравниваемой величины ε можно использовать, в частности, значение остаточной суммы квадратов невязки [14]:

$$\varepsilon = \Phi^{\mathrm{T}}_{(\omega)} \Phi_{(\omega)} - \mathrm{P}^{*}_{\alpha(\omega+1)} \Phi_{(\omega)}. \qquad (50)$$

Если условия $\varepsilon \le \varepsilon_0$ выполняется, то следует команда «останов». В противном случае, расчет продолжается.

Проиллюстрируем возможности применения описанного метода на практическом примере, встречающемся при обработке результатов траекторных измерений.

Пример. Рассмотрим в качестве регрессионной модели (26) линейную модель

$$\mathrm{M}\left[\tilde{L}\right] = \Theta \bar{\mathrm{P}}; \; D\left[\tilde{L}\right] = D\left[\Xi\right]. \quad (51)$$

Предположим, что в модели (50) известны результаты измерения векторной величины $L = \left\| l_1, l_2, ..., l_k, ..., l_{10} \right\|^{\mathrm{T}}$, представленные вектором $\tilde{L}$, и известна регрессионная матрица Θ:

$$\tilde{L} = \begin{Vmatrix} 2.580026 \\ 4.660026 \\ 1.730026 \\ 8.700026 \\ 6.080026 \\ 4.200182 \\ 1.510624 \\ 3.600338 \\ 5.950234 \\ 2.880208 \end{Vmatrix}; \quad \Theta = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -4 & 8 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 2 & 0 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 0 & 8 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 8 & 4 & 24 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 13 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 9 & 5 \\ -7 & 8 & 9 & 8 & 0 & 3 & 8 & 12 \end{Vmatrix}.$$

Вектор параметров модели $\bar{\mathrm{P}} = \left\| 0.7 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0 \quad 10^{-5} \quad 8 \cdot 10^{-7} \right\|^{\mathrm{T}}$ (52) заранее неизвестен.

Ставится задача: найти оценку неизвестного вектора $\bar{\mathrm{P}}$ по известным значениям элементов матрицы Θ и вектора $\tilde{L}$ для заданной модели регрессии (50) и для заданного значения $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ меры приближения оценки $\bar{\mathrm{P}}^*$ к истинному значению вектора $\bar{\mathrm{P}}$ (50).

При обработке результатов траекторных измерений физический смысл задачи может заключаться в нахождении оценки вектора систематических погрешностей $\bar{\mathrm{P}}$ для известного вектора невязки измерений $\tilde{L}$ и заданной регрессионной матрицы Θ.

Перейдем к решению задачи, придавая ей определённый физический смысл.

Предположим вначале, что координаты вектора $\bar{\mathrm{P}}$ образуют три группы параметров: $\bar{\mathrm{P}} = \left\| \mathrm{P}_0 \middle| \mathrm{P}_1 \middle| \mathrm{P}_2 \right\|^{\mathrm{T}}$, которые можно рассматривать как блочные векторы $\mathrm{P}_0 = \left\| \mathrm{P}_{01} \mathrm{P}_{02} \mathrm{P}_{03} \mathrm{P}_{04} \right\|^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{P}_1 = \left\| \mathrm{P}_{11} \mathrm{P}_{12} \right\|^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{P}_2 = \left\| \mathrm{P}_{21} \mathrm{P}_{22} \right\|^{\mathrm{T}}$. Каждая из групп объединяет систематической погрешности, порожденные вполне определенными физическими факторами. Для оценки влияния их на величину погрешности $\bar{\mathrm{P}}$ будем последовательно вводить блоки P_α, $\alpha = 0, 1, 2$, в исходную модель регрессии (51).

И тогда с помощью соотношений (39)–(49) получим следующие оценки $\overline{\mathrm{P}}^*_\alpha$ для векторов P_α.

1. При включении в исходную модель (51) только одного блочного вектора P_0:

$$\overline{\mathrm{P}}^* = \left\| 0,7000004589; 0,000011474; 0,000006398; 0,0100004895 \right\|^{\mathrm{T}}. \quad (53)$$

2. При дополнительном включении в исходную модель второго блочного вектора P_1:

$$\overline{\mathrm{P}}^* = \left\| \mathrm{P}^*{}_0 \middle| \mathrm{P}^*{}_1 \right\|^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left\| 0,6999999834; 0,40000066; 0,4999997; 0,01000057; 0,4083*10^{-5}; 0,3727*10^{-5} \right\|^{\mathrm{T}}. \quad (54)$$

3. При дополнительном включении в исходную модель, вместо второго блочного вектора P_1, блочного вектора P_2:

$$\overline{\mathrm{P}}^* = \left\| \mathrm{P}^*{}_0 \middle| \mathrm{P}^*{}_2 \right\|^{\mathrm{T}} = \left\| 0,7; 0,399999; 0,499999; 0,01; 0,1*10^{-5}; 0,8*10^{-6} \right\|^{\mathrm{T}}. \quad (55)$$

Сопоставляя результаты оценки с истинными значениями (52), можно заметить следующее.

Пренебрежение компонентами P_1 P_2 блочного вектора $\overline{\mathrm{P}}$ приводит к значительной погрешности оценивания второго P_{02} и третьего P_{03} его элементов. Об этом также свидетельствует значительная величина остаточной суммы $\varepsilon = 0,00003 > \varepsilon_0$. Поэтому, в соответствии с блок-схемой алгоритма, из блока сравнения поступает команда в блок 3 на уточнение первоначально выбранной модели.

При дополнительном включении в модель второй группы параметров оценка (54) более близка к значениям (52) по сравнению с оценкой (53) только одного блочного вектора P_0. При этом значение критерия $\varepsilon = 0,00002 > \varepsilon_0$ меньше, чем предыдущее значение.

Если вместо второй группы параметров P_1 включить в модель третью группу P_2, то получим оценку (55). Эта оценка свидетельствует о том, что вторая группа параметров модели систематической погрешности менее значима, чем третья, и именно её целесообразно включать в модель регрессии.

Из полученных результатов, проиллюстрированных практическим примером, следует вывод о возможности рекуррентного среднеквадратического оценивания многомерных регрессий с матричными коэффициентами в задачах обработки результатов траекторных измерений.

Второй важный для практики вывод заключается в том, что при вычислении параметров блочной модели регрессии можно избежать обращения исходной матрицы. Обращая последовательно матрицы меньшей размерности, можно повысить точность оценки вектора $\overline{\mathrm{P}}$ в случае, когда обращаемые матрицы плохо обусловлены.

Анализ полученных результатов позволяет сформулировать следующие выводы.

По мере усложнения вооружения все более значимую роль играет информационное обеспечение процессов его испытания и эксплуатации. Для его совершенствования неуклонно развиваются измерительные системы и методы обработки измерительной информации. Этим объясняется повышенный интерес к прогрессивным методам обработки измерительной информации, в частности, к регрессионному анализу. Для эффективного использования таких методов при обработке результатов траекторных измерений важным этапом является выбор исходной регрессионной модели, в особенности, когда наряду с оценкой параметров модели движения объектов требуется изучить влияние на результат их оценки различных по физической природе факторов, порождающих систематические погрешности. Для этого часто возникает потребность во включении в первоначальную регрессионную модель дополнительных регрессоров, или же, напротив, исключения их из модели.

Такая задача имеет большое значение при построении алгоритмов обработки результатов траекторных измерений с применением моделей с произвольным конечным числом блочных компонентов. Её решению посвящены проведенные в статье исследования.

Основные их результаты сводятся к следующему.

1. Сформулированы основные допущения (ограничения) в постановке задачи оценивания параметров регрессионной модели, допускающей включение в нее дополнительных групповых (матричных), а не только по отдельности скалярных регрессоров или, напротив, исключения их из модели при обработке результатов траекторных измерений. Дана ее содержательная и математическая постановка. Сформулированная задача рассматривается как обобщение задачи с одним или двумя регрессорами на случай, когда в исходную модель регрессии включается дополнительно произвольное число матричных (а не только скалярных) компонентов или, напротив, когда они исключается из уже имеющейся модели.

2. Дано аналитическое решение поставленной задачи, которое сформулировано в виде теоремы и ее следствий.

Из утверждения теоремы вытекает, что для нахождения решения задачи в классе методов полностью или частично ньютоновского типа не требуется обращения исходной расширенной матрицы уравнения регрессии. Достаточно обратить матрицу, используемую для первоначальной регрессионной модели, чтобы затем находить оценки для остальных ее матричных коэффициентов, последовательно обращая при этом матрицы размерности меньшей, чем размерность исходной расширенной матрицы.

Если допустить линейную зависимость столбцов исходной расширенной матрицы уравнения регрессии и (или) линейную зависимость столбцов блочных ее компонентов, то утверждение теоремы остается справедливым при использовании обобщенных обратных матриц. Утверждение справедливо также и для случая, когда исходная модель регрессии является моделью неполного ранга

3. Приведены алгоритм и примеры практического применения метода решения поставленной задачи, характерные для обработки результатов траекторных измерений. Для наглядности их описания приведена блок-схема алгоритма.

Проведенные расчеты подтверждают корректность полученных результатов и сформулированных теоретических выводов.

Список использованных источников

1 Агаджанов П.А., Дулевич В.Е., Коростелев А.А. и др. Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных. – М.: Сов. радио, 1969. – 504 с.

2 Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. – «Космические исследования», – 1963. – т. 1, вып. 1.

3 Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.- М.: Наука, 1977. – 224 с.

4 Буренок В.М., Ляпунов В.М., Мудров В.И. Теория и практика планирования и управления развитием вооружения. – М.: Издательский дом «Граница», 2005. – 520 с. ISBN 5-94691-183-X..

5 Буренок В.М., Найденов В.Г. Методы повышения эффективности применения средств и систем обеспечения испытаний вооружения, военной и специальной техники. – М.: Издательский дом «Граница», 2006. – 264 с. ISBN 5-94691-241-0 (978-5-94691-241-9).

6 Бутко Г.И., Ивницкий В.А., Порывкин Ю.П. Оценка характеристик систем управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1983. – 273 с.

7 Денис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.

8 Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.

9 Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. – М.: М.: Мир, 1976. – 648 с.

10 Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1966. – 150 с.

11 Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории математико-статистической теории обработки наблюдений. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.

12 Мудров В.И. Кушко В.Л. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки. – М.: Радио и связь. –, 1983. – 304 с.

13 Рао .С.Р. Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548 с.

14 Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980.– 456 с.

15 Сейдж Э.П., Мелс Дж. Л. Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974. – 248 с.

16 Cochran W.H. The omission or addition of an independent variety in multiple linear regressions. J.R. Stat. Soc. Suppl., 5, 171-176.

17 Quenoulle M.H. An application of least squares to family diet surveys. Econometrica, 1950, 18. – 27-44.

18 Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. - М.: Наука, 1976. – 416 с.