Буравлев А.И.
Доктор технических наук, профессор

Когнитивное моделирование систем: новый подход

Предложен новый подход к построению когнитивных моделей на основе общих принципов теории систем. Когнитивная модель формируется как динамическая модель системы, удовлетворяющая условиям устойчивости, управляемости и учитывающая характер взаимодействия с внешней средой. Задание структуры модели позволяет значительно упростить настройку ее параметров по экспериментальным и экспертным данным. Сформулирована задача оптимального управления системой как задача динамического программирования. Приводится пример, демонстрирующий применимость рассмотренного подхода.

Когнитивная модель – это модель слабо структурированной системы, основанной на установлении причинно-следственных связей между ее элементами и оценке уровня их взаимодействия[1,2]. Когнитивная модель относится к классу концептуальных моделей и отражает собой первоначальный уровень наших знаний о системе (процессе). Именно поэтому когнитивное моделирование нашло свое применение в социально-экономической, военно-политической, экологической сфере, где уровень знаний о системах и процессах чаще бывает недостаточным для их описания формализованными математическими средствами[3,4,5,6]. На базе когнитивных моделей далее строятся имитационные и аналитические модели, описывающие характер взаимодействия элементов системы, системы и внешней среды с помощью математических и алгоритмических соотношений.

Когнитивная модель оперирует с двумя видами объектов:

-множеством факторных переменных, определяющих состояние системы и ее эволюцию во времени;

-множеством причинно-следственных связей между факторами, определяющих характер, силу и направленность взаимодействия элементов в системе.

Поэтому первичной формализованной схемой когнитивной модели является взвешенный ориентированный граф $\mathbf{G} = (X, V)$, где X - множество вершин графа, описывающее исходное множество факторных переменных системы; V - матрица смежности, определяющая направленность и силу взаимодействия факторных переменных в системе. Поскольку когнитивные модели используются в целях анализа текущего состояния системы и прогнозирования его изменения под действием внешней среды, то в соответствии с общей теорией систем множество факторных переменных целесообразно разделить на две группы:

- внутренние факторные переменные, определяющие текущее состояние системы и непосредственно влияющие на ее целевые показатели. Эти факторные переменные также называют целевыми[2];

- внешние факторные переменные, связанные с действием внешней среды на систему.

В свою очередь внешние факторные переменные целесообразно подразделить на *управляемые* переменные, которые могут изменять свои значения в соответствии с целями, задаваемыми системе, и *неуправляемые* факторные переменные. Неуправляемые факторные переменные также могут изменяться с течением времени, причем иногда

[1]Axelrod R. The Analysis of Cognitive Maps //Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites/ Ed. by R. Axelrod.-Princeton University Press, 1976.

[2] Максимов В.И., Корноушенко Е.К. Аналитические основы применения когнитивного подхода при решении слабоструктурированных задач.//Труды ИПУ РАН, 1999, т.II.

[3] Axelrod R. The Mathematics of Cognitive Maps //Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites/ Ed. by R. Axelrod.-Princeton University Press, 1976.

[4] Коврига С.В., Максимов В.И. Когнитивная технология стратегическим управлением сложных социально-экономических объектов в нестабильной внешней среде //Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC-2001): Сборник статей 1-ой международной конференции.- М.: ИПУ РАН, 2001.

[5] Макаренко Д.И. Когнитивный подход к анализу и прогнозированию развития социально-экономических систем и ситуаций// Успехи современного естествознания, 2004, №5, прил. №1.

[6] Макаренко Д.И., Хрусталев Е.Ю. Когнитивное моделирование наукоемких оборонно-ориентированных производств. Препринт #WP/2007/215/- М.: ЦЭМИ, 2007.

случайным образом, однако исследователю неизвестны цели воздействия на систему.

В результате такой декомпозиции мы представляем исходную систему в виде трех взаимодействующих частей: объекта управления, управляющей подсистемы и внешней среды[7].

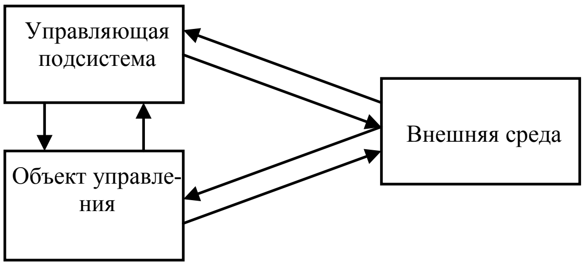

Рис.1-Схема декомпозиции системы

Управляющая подсистема может быть как частью исследуемой системы, так и выступать ее внешним дополнением. В первом случае мы получаем систему с внутренним управлением, во втором случае - систему с внешним управлением. Цели и механизмы управления системой могут генерироваться как внутри системы, так и задаваться извне. Для сложных организационно-экономических и организационно-технических систем управление является комбинированным и осуществляется как внутренней управляющей подсистемой, так и внешней средой. В этом случае из внешней среды задаются цели управления и ресурсные ограничения, а внутренняя управляющая подсистема осуществляет формирование механизмов управления для достижения поставленных целей.

В результате мы приходим к структуре когнитивной модели, представляющей собой трехдольный орграф, где множество вершин X представляет собой объединение трех подмножеств: подмножество внутренних факторов системы Y, подмножество управляемых факторов U и подмножество неуправляемых факторов Z внешней среды:

$$X = Y \cup U \cup Z,$$

связанных между собой матрицей взаимодействия $\mathbf{V} = \left(X \times X \right)$. В работах по когнитивному моделированию[2,3,5] значения факторных переменных оцениваются в порядковой, интервальной или метрической шкале в зависимости от доступности соответствующих средств и методов измерения. Наиболее часто значения факторных переменных $x \in X$ представляются в нормированной метрической шкале в виде переменных $-1 \le x \le 1$, где $x = -1$ означает минимально возможное, $x = 1$- максимально возможное значение фактора. При этом $x = 0$ часто принимается как номинальное значение фактора. В таком случае вектор числовых характеристик факторных переменных $\mathbf{x}$ представляется как трехкомпонентная совокупность векторов

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}),$$

Взаимодействие факторных переменных элементов характеризуется силой и направлением и задается на основе опытных данных, частных результатов моделирования и оценок экспертов, выступающих носителями знаний о системе и протекающих в ней процессах. Сила и направление взаимодействия задается величиной $-1 \le v_{ij} \le 1$, где знаки определяют направление действия одной факторной переменной на другую. Величины v_{ij} являются числовыми характеристиками матрицы взаимодействия $\mathbf{V}$.

С учетом принятого представления о структуре когнитивной модели матрица взаимодействия $\mathbf{V}$, в общем случае, будет иметь следующий вид:

V	Y	U	Z
Y	**A**	**D**	**F**
U	**B**	**0**	**0**
Z	**C**	**E**	**0**

Здесь **0** – нулевая матрица; **A, B, C, D, E, F –** матрицы взаимодействия между различными компонентами вектора факторных переменных модели.

Такая структуризация позволяет более четко определить характер и силу взаимодействия факторных переменных в когнитивной модели.

В качестве примера рассмотрим систему, состояние которой определяется двумя факторными переменными y_1, y_2, находящимися под действием двух управляющих факторов u_1, u_2 и одного неуправляемого

[7] Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем.- М.: Мысль, 1978.

фактора z_1. Взаимодействие факторов задает взвешенный орграф (рис.2):

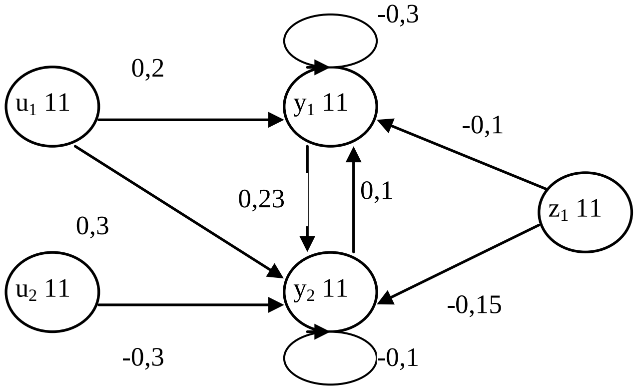

Рис.2.- Орграф системы

Матрица взаимодействия факторных переменных имеет следующий вид:

V	y1	y2	u1	u2	z1
y1	0	0,2	0	0	0
y2	0,1	0	0	0	0
u1	0,2	0,1	0	0	0
u2	0	0,3	0	0	0
z1	-0,1	-0,15	0	0	0

Из данной матрицы нетрудно выделить все подматрицы частных взаимодействий **A, B, C, D, E, F.**

Для описания характера взаимодействия между факторными переменными в работах по когнитивному моделированию принимается гипотеза о том, что изменение факторной переменной системы на будущем интервале времени пропорционально изменению связанных с ней факторных переменных на текущем интервале времени[2,4,5]

$$\Delta\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{V}\Delta\mathbf{x}(t), \qquad (1)$$

где $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-1)$ - приращение вектора числовых значений факторных переменных на интервале $\Delta t = 1$; t - текущий момент времени.

Данная гипотеза является вполне оправданной для линейных систем. Однако, в большинстве своем, исследуемые системы являются нелинейными. Нелинейности проявляются во взаимодействиях системы и внешней среды, примером чего выступают различные кризисные явления (отказы, повреждения), возникающие как во внешней среде, так и в системе[8]. Нелинейность присутствует и во взаимодействии управляющей подсистемы и объекта управления в виде эффектов «насыщения». Такие эффекты присущи социально-экономическим системам, где действуют объективные законы убывающей производительности труда, насыщения потребительского спроса, снижения деловой активности при росте налоговой ставки и др. Более сложные нелинейности связаны с неоднозначной зависимостью между факторными переменными при их разнонаправленном изменении (эффект «гистерезиса»). Эти особенности динамики нелинейных систем необходимо учитывать при построении когнитивной модели системы.

Взаимодействие систем с внешней средой осуществляется путем обмена веществом, энергией, информацией (рис.1). Характер эволюции системы зависит от того, как распределяются потоки вещества, энергии, информации между системой и внешней средой[8]. Если выходящий поток этих субстанций больше входящего потока, то система эволюционирует в соответствии с фундаментальным законом роста ее энтропии, что проявляется в деградации ее физических, информационных, интеллектуальных и психофизиологических составляющих. Если входящий поток вещества, энергии, информации превышает выходящий поток, то система развивается, увеличивая свои функциональные возможности[9]. При равенстве этих потоков система может сколь угодно находиться в равновесном состоянии. Для определенности характера взаимодействия системы и внешней среды будем считать, что действие неуправляемых факторов $\mathbf{z}(t)$ однозначно приводит к ухудшению целевых параметров системы, т.е. вызывает ее деградацию, а действие управляемых факторов $\mathbf{u}(t)$ способствует ее развитию.

Для описания эволюции системы под действием внешних неуправляемых факторов целесообразно использовать модель, в которой скорость изменения факторных

---

[8] Прангишвили И.В. Системный подход и общесистемные закономерности. - М.: СИНТЕГ, 2000.

[9] Хакен Г. Информация и самоорганизация.- М.: Ком Книга /URSS, 2005.

переменных на интервале Δt пропорциональна их текущему значению и аддитивному воздействию факторов внешней среды

$$\frac{\Delta \mathbf{y}(t)}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{C}\mathbf{z}(t), \qquad (2)$$

при начальном условии $\mathbf{y}(0) > 0$. При этом матрица системы $\mathbf{A}$ должна обеспечивать устойчивое поведение системы при отсутствии внешних возмущений ($\mathbf{z} = 0$).

При задании элементов матрицы $\mathbf{A}$ исследователь (эксперт) не может сразу оценить, будет полученная система устойчивой или нет. Поэтому необходимо использовать критерии устойчивости систем. Матрица $\mathbf{A}$ является устойчивой, если ее характеристическое уравнение

$$\left|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right| = 0 \qquad (3)$$

имеет корни с отрицательной действительной частью[10]. Здесь $\mathbf{I}$ обозначает единичную матрицу.

Другим критерием устойчивости является критерий Рауса-Гурвица, который устанавливает определенные соотношения между коэффициентами характеристического уравнения (2)

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

и определителями Рауса -Гурвица

$$\Delta_1 = \left|a_1\right| > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \ldots, \Delta_n > 0. \qquad (4)$$

Критерий Рауса-Гурвица дает необходимые и достаточные условия устойчивости системы. Для нелинейных систем используются другие критерии устойчивости[11].

Так как под действием неуправляемых факторов внешней среды система деградирует, то приращение ее целевых факторных переменных на интервале Δt будет отрицательным ($\Delta \mathbf{y} < 0$). Отсюда получаем неравенство

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{C}\mathbf{z} < 0, \qquad (5)$$

которое должно выполняться для всех неотрицательных значений факторных переменных. В этом случае матрица $\mathbf{C}$ должна быть отрицательной.

Управление системой направлено на достижение определенных целей. Эти цели количественно выражаются одним или несколькими показателями, зависящими от состояния системы. Управляющие воздействия должны быть согласованы с целями управления. Это согласование осуществляется путем задания управляющей матрицы $\mathbf{B}$ так, чтобы положительное (отрицательное) направление изменения управляющих факторов приводило к положительному (отрицательному) изменению целевых факторов[12]. Далее мы будем считать, что положительное изменение управляющих факторов $\mathbf{u} > 0$ приводит к положительному росту целевых факторов ($\Delta \mathbf{y} > 0$) в соответствии с целями управления. При этом достижение верхней границы значений целевых факторов $\mathbf{y}(t) = 1$ соответствует абсолютному достижению целей управления.

Как указывалось выше, действие управляющих факторов на систему происходит при наличии «эффекта насыщения». Данный эффект проявляется в том, что скорость изменения состояния системы уменьшается с увеличением достигаемого уровня целевых переменных. Для учета «эффекта насыщения» предлагается изменение факторных переменных представлять нелинейной зависимостью

$$\frac{\Delta \mathbf{y}(t)}{\Delta t} = \mathbf{B}\big(\mathbf{y}(t)\big)\mathbf{u}(t), \qquad (6)$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} b_{11}(1-y_1) & b_{12}(1-y_1) & \ldots & b_{1m}(1-y_1) \\ b_{21}(1-y_2) & b_{22}(1-y_2) & & b_{2m}(1-y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}(1-y_n) & b_{n2}(1-y_n) & & b_{nm}(1-y_n) \end{pmatrix}_{n\times m}$$

- управляющая матрица, обеспечивающая обратную связь по состоянию объекта управления.

Объединяя выражения (2) и (6), получаем обобщенную модель эволюции системы в разностной форме

$$\frac{\Delta \mathbf{y}(t)}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\big(\mathbf{y}(t)\big)\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{z}(t). \qquad (7)$$

[10] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц – М.: Наука, 1988.

[11] Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А. Красовского - М.: Наука, 1987.

[12] Максимов В.И. Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций//Проблемы управления.- 2005.- №1.

с начальными условиями $\mathbf{y}(0) > 0$.

При $\Delta t \to 0$ разностная модель превращается в дифференциальную модель

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{y}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{z}(t)$$

эволюции управляемой нелинейной динамической системы.

Полученная модель отражает структуру и характер взаимодействия факторных переменных в системе. Это существенно облегчает настройку модели под конкретные статистические, либо экспертные данные. Исследователю достаточно задать матрицы взаимодействия **A, B, C,** после чего когнитивная модель может быть использована для анализа и прогнозирования эволюции системы.

Построим когнитивную модель системы для рассмотренного выше примера.

Из общей матрицы взаимодействия выделим подматрицы **A, B, C** частных взаимодействий факторных переменных системы

A	**y1**	**y2**
y1	**0**	**0,2**
y2	**0,1**	**0**

;

C	**y1**	**y2**
z1	**-0,1**	**-0,15**
z2	**0**	**0**

B	**y1**	**y2**
u1	**0,2**	**0,1**
u2	**0**	**0,3**

Проверим выполнение условия устойчивости для матрицы **A.** Для этого выпишем ее характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \\ a_{21} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$$

Так как $a_{12} = 0,2 > 0$; $a_{21} = 0,1 > 0$, то один корень характеристического уравнения будет положительным, а второй - отрицательным. В этом случае матрица системы $\mathbf{A}$ будет неустойчивой. Такой же результат получим, если найдем определители Рауса-Гурвица.

Коэффициенты характеристического уравнения равны $a_1 = 0$; $a_2 = -a_{21}a_{12}$, а

определители Рауса - Гурвица составляют

$$\Delta_1 = a_1 = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = 0.$$

На рис.2. показана динамика свободного движения системы, представленной уравнениями в разностной форме

$$y_1(t+\Delta t) = y_1(t) + 0,2\Delta t y_2(t);$$

$$y_2(t+\Delta t) = y_2(t) + 0,1\Delta t y_1(t)$$

при заданных начальных условиях $y_1(0) = 0,6$; $y_2(0) = -0,2$.

Из графика видно, что обе факторные переменные непрерывно увеличиваются и выходят за границу существования системы $y = 1$.

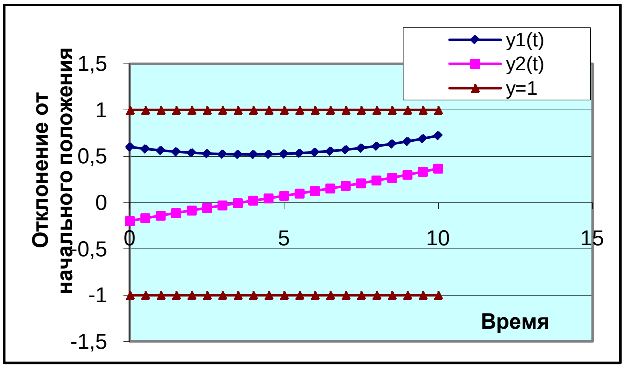

Рис.2-Динамика свободного движения неустойчивой системы

Для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнить условия критерия Рауса-Гурвица. Выпишем характеристическое уравнение для матрицы $\mathbf{A}$ в общем виде

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

где $a_1 = -(a_{11} + a_{22})$; $a_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

По критерию Рауса-Гурвица определители $\Delta_1 = a_1 > 0$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$.

Отсюда получаем требуемые соотношения между элементами матрицы системы

$$a_{11} + a_{22} < 0; \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0.$$

Скорректируем матрицу системы, приняв, например, $a_{11} = -0,3$; $a_{22} = -0,1$. В этом случае критерий Рауса-Гурвица выполняется и система становится устойчивой. На рис.3. показана динамика свободного движения системы, откуда видно, что система устойчиво отрабатывает начальные возмущения и возвращается в нулевое состояние.

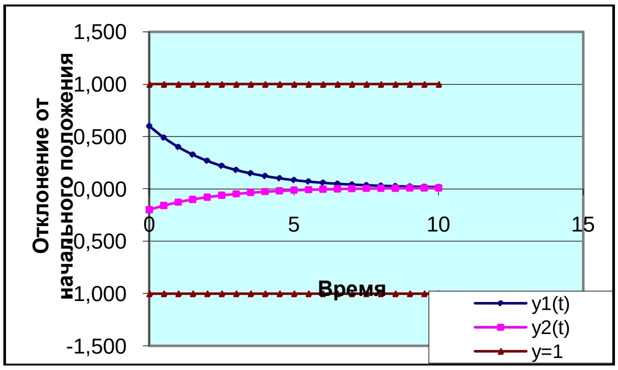

Рис.3.- Динамика свободного движения устойчивой системы

Введение ненулевых диагональных элементов в матрицу системы **A** равносильно появлению рефлексивных связей для факторных переменных **y** в орграфе **G**. На рис. 2 эти связи изображены петлями для соответствующих узлов графа.

Матрица действия внешних факторов **C** имеет отрицательные значения, что удовлетворяет условию (5).

Запишем систему уравнений для эволюции устойчивой системы под действием внешней среды в разностной форме

$$y_1(t+\Delta t)=(1-0,3\Delta t)\,y_1(t)+0,2\Delta t y_2(t)-0,1\Delta t z_1\ ;$$

$$y_2(t+\Delta t)=0,1\Delta t y_1(t)+(1-0,1\Delta t)\,y_2(t)-0,15\Delta t z_1$$

с начальными условиями $y_1(0)=0,6$; $y_2(0)=-0,2$ и величиной внешнего фактора $z_1=1$. На рис. 4 показана динамика деградации состояния системы под действием внешней среды.

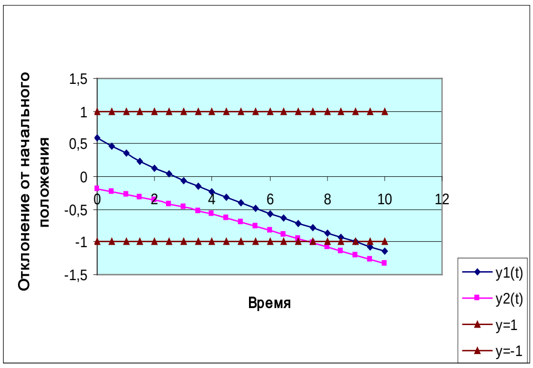

Рис. 4- Динамика деградации системы

Сформируем управляющую матрицу

$$\mathbf{B}(\mathbf{y})=\begin{pmatrix}0,2y_1(1-y_1) & 0,1y_1(1-y_1)\\ 0 & 0,3y_1(1-y_1)\end{pmatrix}$$

и выпишем систему разностных уравнений для эволюции системы:

$$y_1(t+\Delta t)=(1-0,3\Delta t)\,y_1(t)+0,2\Delta t y_2(t)+0,2(1-y_1(t))u_1+0,1\Delta t(1-y_1(t))u_2-0,1\Delta t z_1$$

$$y_2(t+\Delta t)=0,1\Delta t y_1(t)+(1-0,1\Delta t)\,y_2(t)+0,3\Delta t(1-y_2(t))u_2-0,15\Delta t z_1$$

с начальными условиями $y_1(0)=0,6$; $y_2(0)=-0,2$.

Для увеличения значений целевых факторов зададим максимально возможные управления $u_1=1$; $u_2=1$. На рис. 5 показана эта траектория в координатах $y_1(t)$, $y_2(t)$. Видно, что при таком управлении обеспечивается стабилизация системы по целевым показателям $y_1(t_N)=0,59$; $y_2(t_N)=0,51$.

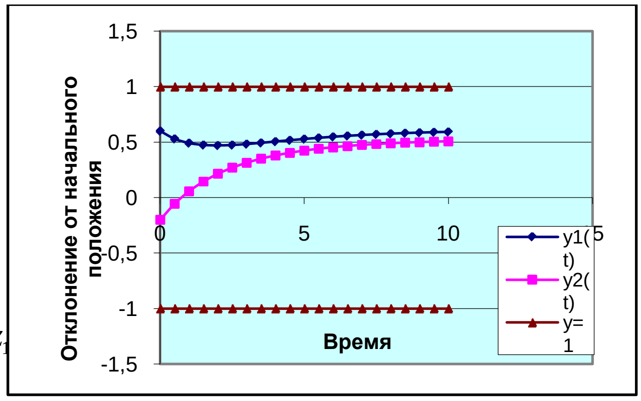

Рис.5-Динамика управляемой системы 1

Дальнейшее увеличение целевых показателей возможно при изменении параметров управляющей матрицы **B.** Так, например, изменение параметров управляющей матрицы

B	y_1	y_2
u_1	0,9	0,4
u_2	0	-0,8

приводит к тому, что целевые факторы системы стремятся к своим максимальным значениям $y_1(t)=0,91$; $y_2(t)=0,82$ (рис.6).

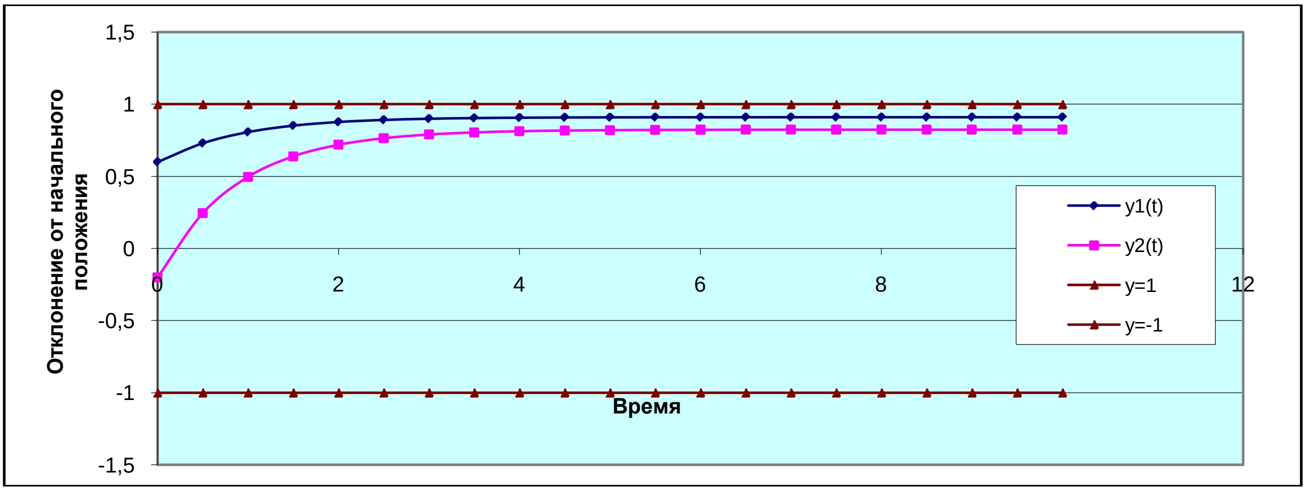

Рис.6-Динамика управляемой системы 2

Таким образом, построена когнитивная модель системы, учитывающая проблему устойчивости системы и нелинейные эффекты воздействии управления и внешней среды.

Для формирования управления, обеспечивающего перевод системы из некоторого начального состояния $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$ в заданное конечное состояние $\mathbf{y}(T)=\mathbf{y}_N$ за конечное время T, рассмотрим задачу оптимального управления системой.

В качестве модели эволюции системы рассмотрим разностную схему уравнения (7)

$$\mathbf{y}(k+1)=\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}(k)+\tilde{\mathbf{B}}(k)\mathbf{u}(k)+\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z}(k);$$
$$(k=1,2,\ldots N),$$

где $\mathbf{y}(k)=\mathbf{y}(t_k)$ - вектор состояния системы в момент t_k; $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{A}$; $\tilde{\mathbf{B}}(k)=\Delta t\mathbf{B}(\mathbf{y}_k)$; $\tilde{\mathbf{C}}=\Delta t\mathbf{C}$ - матрицы системы; $\Delta t=\dfrac{T}{N}$ - длительность интервала наблюдения; N - число шагов дискретного процесса. В качестве критерия управления системой рассмотрим минимум суммарных затрат

$$F\left(\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2),\ldots,\mathbf{u}(N)\right)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{d}^T\mathbf{u}(k), \quad (8)$$

где $\mathbf{d}=\left(d_1,d_2,\ldots,d_m\right)$ - неотрицательный вектор (столбец) удельных затрат на реализацию управления при ограничении на вектор управления

$$0\le\mathbf{u}(k)\le\mathbf{1}. \quad (9)$$

Сформулированная задача является задачей терминального управления, для решения может быть использован метод динамического программирования.

Выпишем функциональное уравнение Беллмана для произвольного шага $k=\overline{1,N}$:

$$F(k)=\min_{\substack{\mathbf{u}(k),\ldots,\mathbf{u}(N)\\ 0\le\mathbf{u}(r)\le\mathbf{1}}}\sum_{r=k}^{N}\mathbf{d}^T\mathbf{u}(k)=\min_{0\le\mathbf{u}(k)\le\mathbf{1}}\left\{\mathbf{d}^T\mathbf{u}(k)+\min_{\substack{\mathbf{u}(k+1),\ldots,\mathbf{u}(N)\\ 0\le\mathbf{u}(r)\le\mathbf{1}}}\sum_{r=k+1}^{N}\mathbf{d}^T\mathbf{u}(k)\right\}=\min_{0\le\mathbf{u}(k)\le\mathbf{1}}\left\{\mathbf{d}^T\mathbf{u}(k)+F(k+1)\right\};$$

$$F(N+1)=0. \quad (10)$$

При $k=N$ из (10) получаем $F(N)=\min\limits_{0\le\mathbf{u}(N)\le 1}\mathbf{d}^T\mathbf{u}(N)$.

Обозначим

$\mathbf{\Delta}(N)=\mathbf{y}(N)-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}(N-1)-\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z}(N)$ - отклонение вектора состояния для неуправляемого движения системы на N-ом шаге и свяжем это отклонение с управлением на этом шаге

$$\tilde{\mathbf{B}}(N)\mathbf{u}(N)\le\mathbf{\Delta}(N). \quad (11)$$

В результате получаем задачу линейного программирования, решением которой является условно оптимальное управление $\mathbf{u}^*(N)$, зависящее от состояния системы на предыдущем $(N-1)$-ом шаге

$$\mathbf{u}^*(N)=\mathbf{u}^*\left(y(N-1)\right). \quad (12)$$

Переходя к шагу $N-1$ в соответствии с рекуррентным уравнением (10), получаем новую задачу линейного программирования

$$F(N-1)=\mathbf{d}^T\mathbf{u}(N-1)+\mathbf{d}^T\mathbf{u}^*(N)\to\min$$

при ограничениях

$$\tilde{\mathbf{B}}(N-1)\mathbf{u}(N-1)\le\ \ (N-1);$$

$$0\le u(N-1)\le 1,$$

где

$$\boldsymbol{\Delta}(N-1)=\mathbf{y}(N-1)-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}(N-2)-\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z}(N-1).$$

Решение этой задачи дает оптимальное управления для предпоследнего шага.

Переходя последовательно к номерам $k=N-2,\ N-3,...,1$ и решая на каждом шаге задачи линейного программирования, получаем условно оптимальные решения $\mathbf{u}^*(N),\ \mathbf{u}^*(N-1),...,\ \mathbf{u}^*(1)$, зависящие от состояния системы в начале каждого шага. Поскольку начальное состояние системы $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$ известно, то с помощью уравнения эволюции (7) можно определить все будущие состояния системы и соответствующие им безусловные управления.

Получим алгоритм управления системой для рассматриваемого примера.

Выпишем систему неравенств (11) для последнего шага

$$\begin{pmatrix}0,2 & 0,1\\ 0 & 0,3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_1(N)\\ u_2(N)\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\hat{\Delta}_1(N)\\ \hat{\Delta}_2(N)\end{pmatrix},$$

где $\hat{\Delta}_1(N)=\dfrac{\Delta_1(N)}{\Delta t\left[1-y_1(N-1)\right]}$;

$$\hat{\Delta}_2(N)=\frac{\Delta_2(N)}{\Delta t\left[1-y_2(N-1)\right]}.$$

Из этой системы неравенств с учетом ограничений $0\le u(N)\le 1$ получаем

$$u_2(N)=\min\left\{\frac{\Delta_2(N)}{0,3},\ 1\right\};$$

$$u_1(N)=\min\left\{\frac{\Delta_1(N)-0,1u_2(N)}{0,2},\ 1\right\}.$$

Подставим выражение $u_1(N)$ в целевую функцию

$$F(N)=d_1u_1(N)+d_2u_2(N)=d_1\min\left[\frac{10\hat{\Delta}_1(N)-u_2(N)}{2},\ 1\right]+d_2u_2(N)$$

и найдем условия, при которых эта функция обращается в минимум.

Поскольку величины, входящие в линейную форму $F(N)$ неотрицательны, то при $d_1<d_2$ минимум целевой функции достигается, если $u_2(N)=0$, а при $d_1>d_2$, если $u_1(N)=0$.

Отсюда получаем следующий алгоритм формирования управлений на последнем шаге:

$$u_2(N)=\begin{cases}0, & d_1<d_2\\ \min\left\{\dfrac{\Delta_2(N)}{0,3},\ 1\right\}, & d_1>d_2\end{cases};$$

$$u_1(N)=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{\Delta_1(N)-0,1u_2(N)}{0,2},\ 1\right\}, & d_1<d_2\\ 0, & d_1>d_2\end{cases}. \quad (13)$$

На предпоследнем шаге выражения для управлений (12) сохраняют свою структуру, а целевая функция принимает вид

$$F(N-1)=F(N)+d_1u_1(N-1)+d_2u_2(N-1)=F(N)+d_1\min\left[\frac{10\Delta_1(N-1)-u_2(N-1)}{2},\ 1\right]+d_2u_2(N-1)$$

Так как $F(N)\ge 0$, то минимум функции $F(N-1)$ снова реализуется управлениями (13) при новых значениях отклонений $\Delta_1(N-1),\ \Delta_2(N-1)$.

На рис. 7 показана траектория движения системы при оптимальном управлении $u_1^*(k)=0$; $u_2^*(k)=1$ с параметрами удельных затрат $d_1=1$; $d_2=0,5$. Система стабилизируется при выходных параметрах $y_1(t_N)=0,26$; $y_2(t_N)=0,43$.

Сравнивая с графиком рис.5, можно увидеть, что при данном управлении система стабилизируется на более низких уровнях целевых показателей. Это связано, прежде всего, с ограниченностью управлений. Для достижения такого же эффекта потребуется гораздо большее время для управления системой.

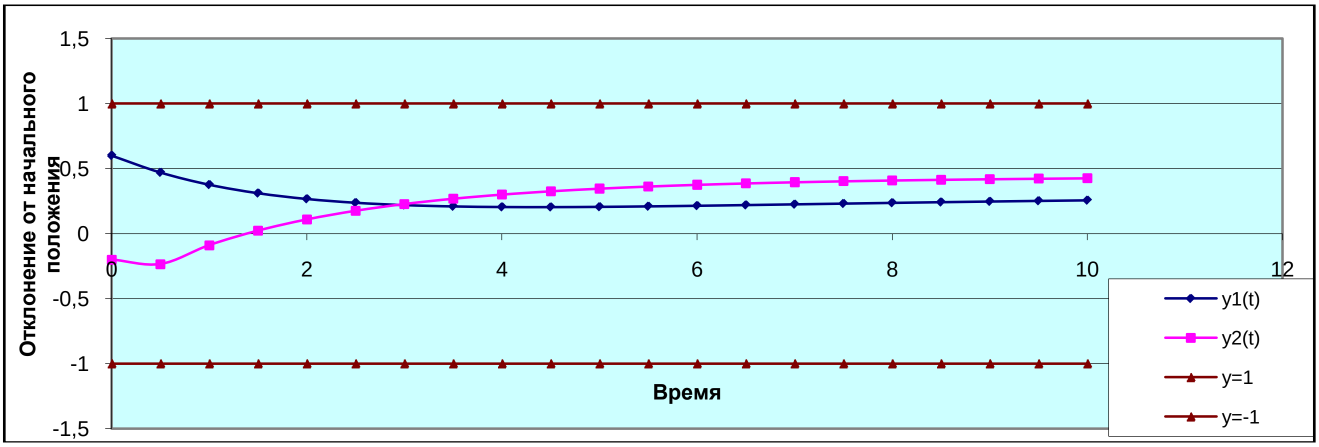

Рис.7-Динамика системы при оптимальном управлении

Вместе с тем суммарный уровень затрат для интервала времени $t_N = 10$ при оптимальном управлении оказывается в три раза меньше, чем в случае не оптимального управления системой: $u_1(k) = 1$; $u_2(k) = 1$.

На рис. 8 показана динамика роста затрат для случаев не оптимального и оптимального управления системой.

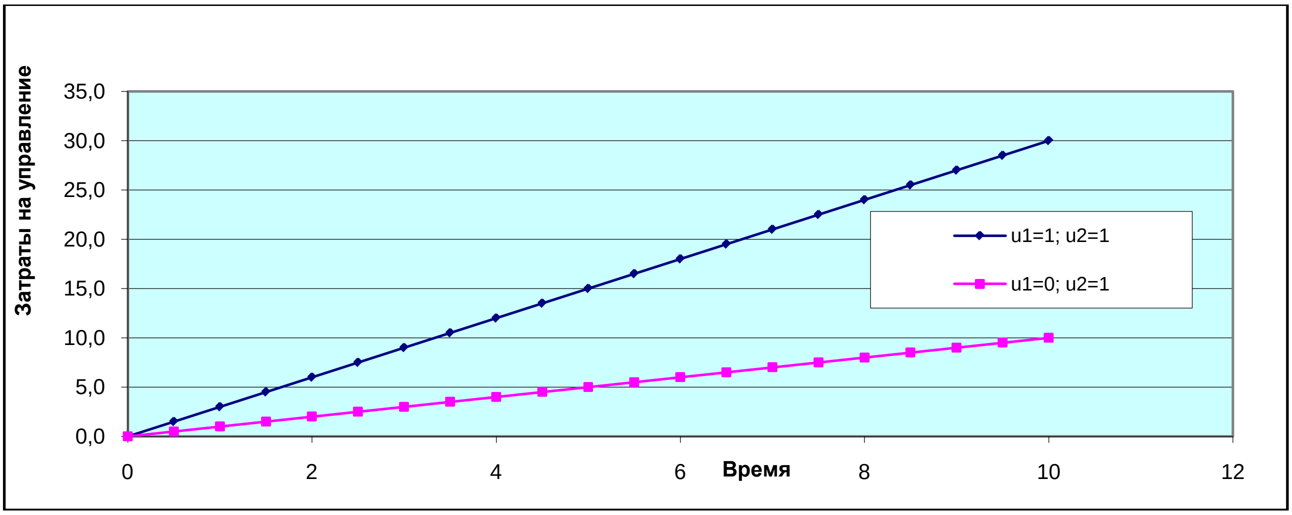

Рис. 8- Динамика затрат при разных стратегиях управления системой

Рассмотренный подход к построению когнитивной модели системы, основанный на принципах общей теории систем, позволяет при моделировании более адекватно учесть основные свойства исследуемых систем (нелинейность, устойчивость, управляемость), а также существенно облегчить труд исследователя при построении модели системы и настройки ее параметров по экспериментальным и экспертным данным.

Список использованных источников

1 Axelrod R. The Analysis of Cognitive Maps //Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites/ Ed. by R. Axelrod.-Princeton University Press.-1976.

2 Максимов В.И., Корноушенко Е.К. Аналитические основы применения когнитивного подхода при решении слабоструктурированных задач.//Труды ИПУ РАН.-1999. т.II.

3 Axelrod R. The Mathematics of Cognitive Maps //Structure of Decision: The Cognitive Maps of Political Elites/ Ed. by R. Axelrod.-Princeton University Press.-1976.

4 Коврига С.В., Максимов В.И. Когнитивная технология стратегическим управле-

нием сложных социально-экономических объектов в нестабильной внешней среде //Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC-2001): Сборник статей

5 1-ой международной конференции.- М.: ИПУ РАН.- 2001

6 Макаренко Д.И. Когнитивный подход к анализу и прогнозированию развития социально-экономических систем и ситуаций// Успехи современного естествознания.- 2004.- №5, прил. №1.

7 Макаренко Д.И., Хрусталев Е.Ю. Когнитивное моделирование наукоемких оборонно-ориентированных производств. Препринт #WP/2007/215/- М.: ЦЭМИ, 2007.

8 Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем.- М.: Мысль, 1978.

9 Прангишвили И.В. Системный подход и общесистемные закономерности.-М.: СИНТЕГ, 2000.

10 Хакен Г. Информация и самоорганизация.- М.: Ком Книга /URSS, 2005.

11 Прангишвили И.В. Системный подход и общесистемные закономерности. - М.: СИНТЕГ, 2000.

12 Гантмахер Ф. Р. Теория матриц – М.: Наука, 1988.

13 Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А. Красовского - М.: Наука, 1987.

14 Максимов В.И. Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций//Проблемы управления.- 2005.- №1.

15 Р. Беллман. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.