

Буравлев А.И.

Доктор технических наук

Пьянков А.А.

Кандидат технических наук

Модель управления техническим обеспечением войск

Рассматривается задача управления техническим обеспечением (ТО) группировки войск в течение заданного программного периода по критерию минимума затрат на ТО при заданных локальных ограничениях на уровень исправности и боеготовности ВВТ и терминальных ограничениях на численность и боевой потенциал группировки. Процесс изменения технического состояния ВВТ моделируется системой массового обслуживания. В качестве параметров ТО рассматриваются: войсковой ремонт ВВТ, закупка новых и модернизация штатных образцов ВВТ.

Получен общий алгоритм оптимального управления ТО, основанный на методе динамического программирования. Приведен пример, иллюстрирующий работоспособность алгоритма.

В работе [1] рассмотрена задача моделирования процесса технического обеспечения (ТО) группировки войск с использованием модели массового обслуживания. В рамках этой модели получена система уравнений, описывающая средние численности образцов ВВТ, находящихся в различных состояниях в процессе их эксплуатации в войсках. В качестве возможных состояний образца ВВТ рассмотрены: S_0 - исправное (работоспособное) состояние образца при пребывании его в режиме хранения (готовности к применению); S_1 - неисправное (неработоспособное) состояние, требующее ремонта определенного вида; S_2 - исправное (работоспособное) состояние при нахождении в режиме боеготовности; S_3 - неисправное состояние, требующее списания и последующую утилизацию; S_4 - исправное (работоспособное), требую-

щее доработки для повышения боевого потенциала образца ВВТ.

Граф-модель изменения состояний образца ВВТ представлен на рисунке 1.

На графе обозначено:

μ_0 - интенсивность поступления новой ВВТ; λ_0 - интенсивность отказов ВВТ, находящихся на хранении; λ_1 - интенсивность отказов ВВТ, находящихся в боеготовом состоянии; μ_1 - интенсивность восстановления ВВТ средствами ремонта; λ_2 - интенсивность перевода ВВТ в боеготовое состояние; μ_2 - интенсивность перевода ВВТ в состояние постоянной готовности; λ_3 - интенсивность отхода ВВТ в утилизацию; λ_4 - интенсивность отхода ВВТ на доработки; μ_4 - интенсивность поступления модернизированной ВВТ.

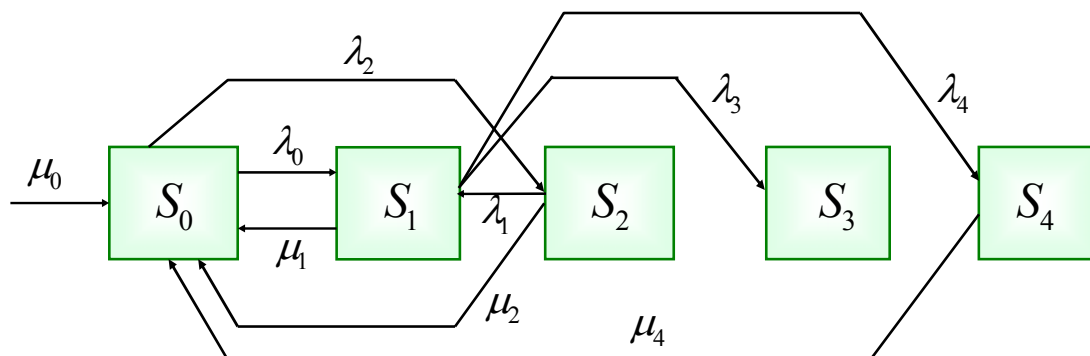


Рисунок 1 – Граф состояний образца ВВТ

В соответствии с этим графом получена система уравнений для дискретного управляемого процесса:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{n}(t-1) + \mathbf{B}u(t); \quad (t=1, 2, \dots, T), \quad (1)$$

где $\mathbf{n} = \|n_0, n_1, n_2, n_3, n_4\|^T$ – вектор-столбец численностей ВВТ, находящихся в различных состояниях в произвольный момент времени;

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_2 & 0 & \bar{\mu}_2 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_0 & 1 - \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 & \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_2 & 0 & 1 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица процесса;

$\mathbf{u}(t) = \|u_0(t), u_1, 0, 0, u_4(t)\|^T$ – вектор-столбец управлений;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрица при векторе управлений;

T – продолжительность программного периода; T – индекс транспонирования. Интервалом дискретности Δt выбран годовой интервал реализации Государственного оборонного заказа (ГОЗ).

Параметрами управления процессом ТО выбраны годовые объемы закупки $u_0(t)$, ремонта $u_1(t)$ и модернизации $u_4(t)$ ВВТ, которые связаны с фазовыми состояниями процесса следующими соотношениями

$$u_0(t) = \mu_0 \Delta t; \quad u_1(t) = \mu_1 \Delta t n_1(t-1);$$

$$u_4 = \mu_4 \Delta t n_1(t-1).$$

В качестве критерия оптимизации управления рассмотрим минимум общих затрат на ТО за программный период T

$$C_\Sigma(T) = \sum_{t=1}^T \mathbf{c}(t)^T \mathbf{u}(t) \Rightarrow \min_{\mathbf{u}(t)}, \quad (2)$$

где $\mathbf{c} = \|c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\|$ – вектор затрат на выполнение мероприятий ТО при нахождении ВВТ в различных состояниях. Зависимость этих затрат от времени учитывается дефлятором $d(t) = (1 + E)^t$:

$$c_i(t) = c_i d(t). \quad (3)$$

Здесь E – средний уровень инфляции, учитываемый при планировании технического обеспечения ВВТ.

В качестве ограничений на процесс управления принимается обеспечение заданной численности группировки \hat{N} , требуемого уровня исправности $\hat{K}_И$, боеготовности $\hat{K}_{БР}$ ВВТ на каждом шаге процесса и боевого потенциала $\hat{K}_{БП}$ войск на конец рассматриваемого периода T :

$$N(\mathbf{U}(T)) = \hat{N}; \quad (4)$$

$$K_{БП}(\mathbf{U}(T)) \geq \hat{K}_{БП}; \quad (5)$$

$$K_И(\mathbf{u}(t)) \geq \hat{K}_И; \quad (6)$$

$$K_{БР}(\mathbf{u}(t)) \geq \hat{K}_{БР}; \quad (t=1, 2, \dots, T); \quad (7)$$

где $\mathbf{U}(T) = \{\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(T)\}$ – программа управления техническим обеспечением войск в течение программного периода;

$$N(\mathbf{U}(T)) = \sum_{i=0}^2 n_i(\mathbf{U}(T)) \quad - \text{численность}$$

ВВТ в составе группировки на конец программного периода;

$$K_И(t) = \frac{n_0(t) + n_2(t)}{N(t)} \quad - \text{коэффициент исправности парка ВВТ};$$

$$K_{БР}(t) = \frac{n_2(t)}{n_0(t) + n_2(t)} \quad - \text{коэффициент боеготовности ВВТ};$$

$$K_{БП}(T) = K_1 \left[1 - \frac{\sum_{t=1}^T u_4(t)}{N(T)} - \frac{\sum_{t=1}^T u_0(t)}{N(T)} \right] + K_4 \frac{\sum_{k=1}^T u_4(t)}{N(T)} + K_0 \frac{\sum_{t=1}^T u_0(t)}{N(T)}$$

– коэффициент боевого потенциала образца ВВТ в составе группировки. Он представляет собой средневзвешенное значение коэффициентов боевых потенциалов K_1 исходных образцов ВВТ, образцов, прошедших модернизацию K_4 и вновь закупленных образцов ВВТ K_0 с учетом их численности в группировке. Сформулированная выше задача является задачей динамического программирования [2]. Для получения алгоритма ее решения выполним некоторые преобразования целевой функции и ограничений.

Целевую функцию (2) представим в виде рекуррентного выражения

$$C_\Sigma(\mathbf{U}(T)) = C_\Sigma(\mathbf{U}(t)) + C_\Sigma(\mathbf{U}(T-t)).$$



Следуя методу динамического программирования [2], оптимальное управление процессом ТО разбивается на последовательность задач оптимизации

$$C_{\Sigma}(\mathbf{U}^*(T)) = \min_{\mathbf{U}(T)} C_{\Sigma}(\mathbf{U}(T)) = \min_{\mathbf{U}(t)} \left\{ C_{\Sigma}(\mathbf{U}(t) + \min_{\mathbf{U}(T-t)} C_{\Sigma}(\mathbf{U}(T-t))) \right\} = \min_{\mathbf{U}(t)} \left\{ C_{\Sigma}(\mathbf{U}(t) + C_{\Sigma}(\mathbf{U}^*(T-t))) \right\}; (t=1, 2, \dots, T). \quad (8)$$

Свяжем терминальные ограничения (4), (5) с динамикой процесса технического обеспечения. Введем вспомогательный вектор $\boldsymbol{\Psi}^T = \|1, 1, 1, 0, 0\|$ и представим фактическую численность группировки

$$N(T) = n_0(T) + n_1(T) + n_2(T)$$

в виде скалярного произведения $N(T) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n}(T)$, где $n_0(T), n_1(T), n_2(T)$ – соответственно, средние численности ВВТ, находящиеся на хранении, ремонте и в боеготовом состоянии.

Используя уравнение (1), получаем терминальное ограничение (4), связанное с пошаговыми управлениями процессом ТО

$$\hat{N} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n}(T) = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A}(T) \mathbf{n}(T-1) + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(T) = \dots = \boldsymbol{\Psi}^T \left[\prod_{t=1}^T \mathbf{A}(t) \right] \mathbf{n}(0) + \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}^{T-t+1} \mathbf{u}(t) \quad (9)$$

Величина $N'(T) = \boldsymbol{\Psi}^T \left[\prod_{t=1}^T \mathbf{A}(t) \right] \mathbf{n}(0)$ – характеризует численность группировки на конец программного периода при отсутствии управления ТО. Разность между заданной \hat{N} и фактической численностью $N'(T)$ дает терминальную невязку $\Delta_1(T) = \hat{N} - N'(T)$, которая должна компенсироваться управлением ТО. Если распределить эту невязку по шагам управления, то она будет монотонно убывать до нуля в течение программного периода. Распределение невязки можно осуществлять равномерно

$$d_1 = \frac{\Delta_1(T)}{T},$$

либо неравномерно по шагам программного периода.

$$d_1(t) = \frac{\Delta_1(T)}{T-t}; (t=1, 2, \dots, T).$$

Выполним аналогичное преобразование для коэффициента боевого потенциала $K_{БП}(T)$ ВВТ группировки.

Тогда терминальное ограничение (5) примет вид

$$\sum_{t=1}^T \mathbf{K}^T \mathbf{u}(t) \geq (\hat{K}_{БП} \hat{N} - K_1 N(0)) = \Delta_2(T),$$

$\mathbf{K}^T = \|K_0, K_1, 0, 0, 0, K_4\|$ – вектор весовых коэффициентов.

Величина $\Delta_2(0) = (\hat{K}_{БП} \hat{N} - K_1 N(0))$ характеризует невязку по величине боевого потенциала, которая должна быть скомпенсирована управлением. Распределим эту невязку также по шагам управления с величиной $d_2(t) = \frac{\Delta_2(T)}{T-t}$.

Пошаговые ограничения (6), (7) представим в явной зависимости от управлений.

Выразим текущие численности ВВТ $n_0(t), n_1(t), n_2(t)$ в виде скалярных произведений

$$n_0(t) = \mathbf{a}_1^T \mathbf{n}(t-1) + \mathbf{b}_1^T \mathbf{u}(t);$$

$$n_1(t) = \mathbf{a}_2^T \mathbf{n}(t-1) + \mathbf{b}_2^T \mathbf{u}(t);$$

$$n_2(t) = \mathbf{a}_3^T \mathbf{n}(t-1),$$

где $\mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T$ – вектора-строки матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} , соответствующие указанным численностям ВВТ.

После преобразований ограничения для вектора управлений по уровню исправности и боеготовности ВВТ будут иметь следующий вид:

$$\left[\mathbf{b}_2^T - \frac{(1-\hat{K}_H)}{\hat{K}_H} \mathbf{b}_1^T \right] \mathbf{u}(t) \leq \left[\frac{(1-\hat{K}_H)}{\hat{K}_H} (\mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_3^T) - \mathbf{a}_2^T \right] \mathbf{n}(t-1);$$

$$\mathbf{b}_1^T \mathbf{u}(t) \leq \left[\frac{(1-\hat{K}_{БП})}{\hat{K}_{БП}} \mathbf{a}_3^T - \mathbf{a}_1^T \right] \mathbf{n}(t-1).$$

В результате получаем следующую задачу динамического управления процессом ТО. Поскольку терминальные невязки на каждом шаге процесса $d_1(t), d_2(t)$ определены, то на каждом шаге процесса, начиная с $t=1, 2, \dots, T$, минимизируются суммарные затраты

$$C_{\Sigma}(\mathbf{U}^*(t)) = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \mathbf{c}^T(t) \mathbf{u}(t) + C_{\Sigma}(\mathbf{U}^*(t-1)) \right\}$$

при ограничениях

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = d_1(t);$$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{u}(t) = d_2(t);$$

$$\left[\mathbf{b}_2^T - \frac{(1-\hat{K}_H)}{\hat{K}_H} \mathbf{b}_1^T \right] \mathbf{u}(t) \leq \left[\frac{(1-\hat{K}_H)}{\hat{K}_H} (\mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_3^T) - \mathbf{a}_2^T \right] \mathbf{n}(t-1); \quad (10)$$



$$\mathbf{b}_1^T \mathbf{u}(t) \leq \left[\frac{(1 - \widehat{K}_{BF})}{\widehat{K}_{BF}} \mathbf{a}_3^T - \mathbf{a}_1^T \right] \mathbf{n}(t-1);$$

$$\mathbf{u}(t) > 0.$$

Алгоритм определения оптимальных управлений

В силу линейности целевой функции (2) и динамических ограничений задача динамического управления сводится к последовательности вложенных задач линейного программирования. Рассмотрим первый шаг процесса $t=1$. На этом шаге целевая функция (2) имеет вид

$$C_\Sigma(\mathbf{U}^*(1)) = \min_{\mathbf{u}(T)} \{ \mathbf{c}(1)^T \mathbf{u}(1) \},$$

а ограничения

$$\Psi^T \mathbf{B} \mathbf{u}(1) = d_1(1);$$

$$\mathbf{h}^T \mathbf{u}(1) = d_2(1);$$

$$\left[\mathbf{b}_2^T - \frac{(1 - \widehat{K}_H)}{\widehat{K}_H} \mathbf{b}_1^T \right] \mathbf{u}(1) \leq \left[\frac{(1 - \widehat{K}_H)}{\widehat{K}_H} (\mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_3^T) - \mathbf{a}_2^T \right] \mathbf{n}(1);$$

$$\mathbf{b}_1^T \mathbf{u}(1) \leq \left[\frac{(1 - \widehat{K}_{BF})}{\widehat{K}_{BF}} \mathbf{a}_3^T - \mathbf{a}_1^T \right] \mathbf{n}(1);$$

$$\mathbf{u}(1) > 0.$$

Системе динамических ограничений удовлетворяет опорное решение. Найдем это решение, представив данную систему ограничений в скалярном виде:

$$\begin{aligned} u_0(1) + u_4(1) &= d_1(1); \\ K_0 u_0(1) + K_4 u_4(1) &= d_2(1); \\ (1 - \widehat{K}_H) u_0(1) + u_1(1) + (1 - \widehat{K}_H) u_4(1) &= d_3(1); \\ u_0(1) + u_1(1) + u_4(1) &= d_4(1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$d_1(1) = \frac{\widehat{N} - \widehat{N}'(T)}{T}; \quad d_2(1) = \frac{(\widehat{K}_{BF} \widehat{N} - K_1 N'(T))}{T};$$

$$d_3(1) = \widehat{K}_H (1 - \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4) n_1(0) - (1 - \widehat{K}_H - \bar{\lambda}_0) n_0(0) - (1 - \widehat{K}_H - \bar{\lambda}_1) n_2(0);$$

$$d_4(1) = \left[\frac{(1 - \widehat{K}_{BF})}{\widehat{K}_{BF}} \bar{\lambda}_2 - (1 - \bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_2) \right] n_0(0) + \left[\frac{(1 - \widehat{K}_{BF})}{\widehat{K}_{BF}} (1 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_2) - \bar{\mu}_2 \right] n_2(0).$$

При этом величина $N'(T) = \sum_{i=0}^4 n_i(T)$ рассчитывается по системе уравнений (1) при $\mathbf{u}(t) \equiv 0$.

Система уравнений (11) дает четыре опорных решения. Каждое опорное решение есть результат решения системы из трех уравнений для трех переменных u_0, u_1, u_4 :

- 1) $u_0(1) + u_4(1) = d_1(1);$
 $K_0 u_0(1) + K_4 u_4(1) = d_2(1);$
 $(1 - \widehat{K}_H) u_0(1) + u_1(1) + (1 - \widehat{K}_H) u_4(1) = d_3(1).$
- 2) $u_0(1) + u_4(1) = d_1(1);$
 $K_0 u_0(1) + K_4 u_4(1) = d_2(1);$
 $u_0(1) + u_1(1) + u_4(1) = d_4(1).$
- 3) $u_0(1) + u_4(1) = d_1(1);$
 $(1 - \widehat{K}_H) u_0(1) + u_1(1) + (1 - \widehat{K}_H) u_4(1) = d_3(1);$
 $u_0(1) + u_1(1) + u_4(1) = d_4(1).$
- 4) $K_0 u_0(1) + K_4 u_4(1) = d_2(1);$
 $(1 - \widehat{K}_H) u_0(1) + u_1(1) + (1 - \widehat{K}_H) u_4(1) = d_3(1);$
 $u_0(1) + u_1(1) + u_4(1) = d_4(1).$

Системы уравнений 1), 2), 4) имеют детерминанты, отличные от нуля, что обеспечивает единственность решения. Поэтому в качестве опорных рассматриваются решения именно этих систем уравнений.

Из этих решений выбираются только неотрицательные и для них рассчитываются суммарные затраты на первом шаге. В качестве оптимального решения выбирается решение, доставляющее минимум затрат

$$C_\Sigma(\mathbf{u}^*(1)) = \min_{\mathbf{u}(1)} \{ \mathbf{c}^T(1) \mathbf{u}(1) \}.$$

На втором шаге ($t=2$) происходит пересчет правых частей $\mathbf{d}(2)$ системы ограничений (11) с учетом оптимального управления $\mathbf{u}^*(1)$ на первом шаге с использованием уравнения динамики

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{A}(1) \mathbf{n}(0) + \mathbf{B} \mathbf{u}^*(1).$$

Затем снова определяются опорные решения для второго шага и выбор оптимального управления $\mathbf{u}^*(2)$ по минимуму затрат для двух шагов

$$C_\Sigma(\mathbf{u}^*(2)) = \min_{\mathbf{u}(2)} \{ \mathbf{c}^T(2) \mathbf{u}(2) + C_\Sigma(\mathbf{u}^*(1)) \}.$$

Далее процесс повторяется до момента T окончания программного периода.

Приближенно оптимальным являются управления:



$$u_0(t) = \begin{cases} \max[0; d_1(t) - u_4(t)], & \text{если } \frac{c_4}{K_4} < \frac{c_5}{K_0} \\ \frac{d_2(t)}{K_0}, & \text{если } \frac{c_4}{K_4} > \frac{c_5}{K_0} \end{cases};$$

$$u_1(t) = \begin{cases} \min[n_1(t); d_4 - u_0(t) - u_4(t)], & \text{если } d_4 - u_0(t) - u_4(t) > 0 \\ 0, & \text{если } d_4 - u_0(t) - u_4(t) < 0 \end{cases}$$

$$u_4(t) = \begin{cases} \min\left[n_4; \frac{d_2(t)}{K_4}\right], & \text{если } \frac{c_4}{K_4} < \frac{c_5}{K_0} \\ 0, & \text{если } \frac{c_4}{K_4} > \frac{c_5}{K_0} \end{cases}.$$
(12)

На рисунках 2 - 7 показана динамика численности группировки войск $N(t)$, ее коэффициента боевого потенциала $K_{БП}(t)$, исправности $K_{И}(t)$, боеготовности $K_{БГ}(t)$ и затрат $C_{\Sigma}(U^*(t))$ в ходе реализации программных мероприятий при следующих исходных данных: $\lambda_0 = 0,01 \text{ ед/год}$; $\lambda_1 = 0,03 \text{ ед/год}$; $\mu_1 = 0,1 \text{ ед/год}$;

$\lambda_2 = 0,3 \text{ ед/год}$; $\mu_2 = 0,05 \text{ ед/год}$;
 $\lambda_3 = 0,05 \text{ ед/год}$; $\mu_3 = 0,45 \text{ ед/год}$;
 $\lambda_4 = 0,15 \text{ ед/год}$; $\mu_4 = 0,45 \text{ ед/год}$;
 $\hat{N} = 1000 \text{ ед}$; $\hat{K}_{БП} = 1,1$; $\hat{K}_{И} = 0,9$; $\hat{K}_{БГ} = 0,7$;
 $c_0 = 0,01 \text{ у.е.}$; $c_1 = 0,2 \text{ у.е.}$; $c_2 = 0,1 \text{ у.е.}$;
 $c_3 = 0,2 \text{ у.е.}$; $c_4 = 0,4 \text{ у.е.}$; $c_5 = 1,0 \text{ у.е.}$;
 $d = 1,0$.

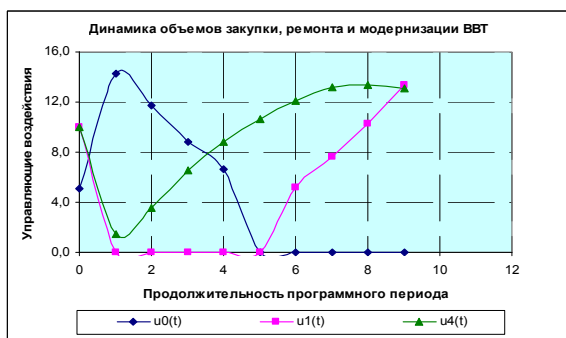


Рисунок 2 – Динамика объемов закупки, ремонта и модернизации ВВТ

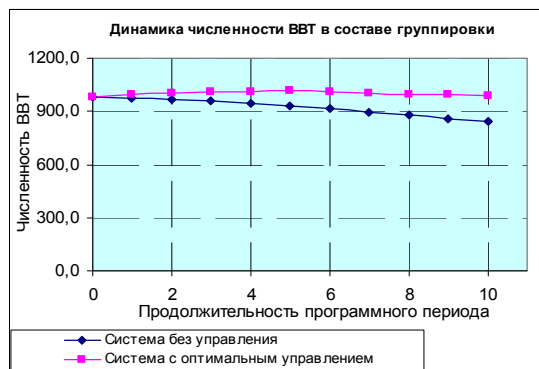


Рисунок 3 – Динамика численности ВВТ в составе группировки

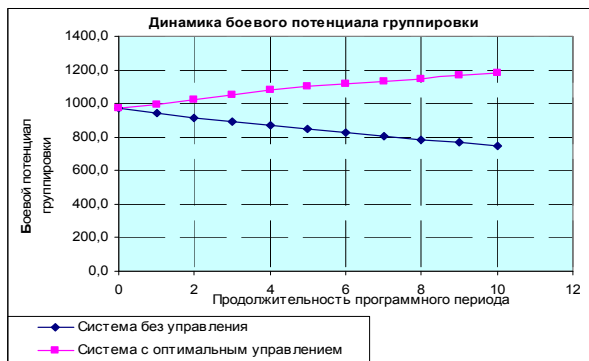


Рисунок 4 – Динамика боевого потенциала группировки войск

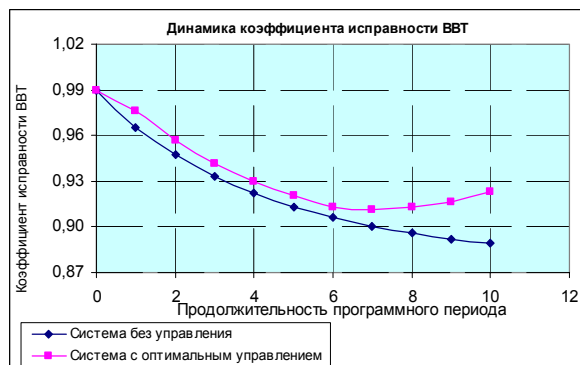


Рисунок 5 – Динамика коэффициента исправности ВВТ



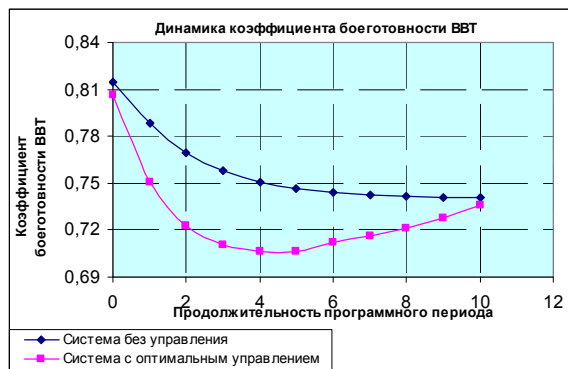


Рисунок 6 – Динамика коэффициента боеготовности ВВТ

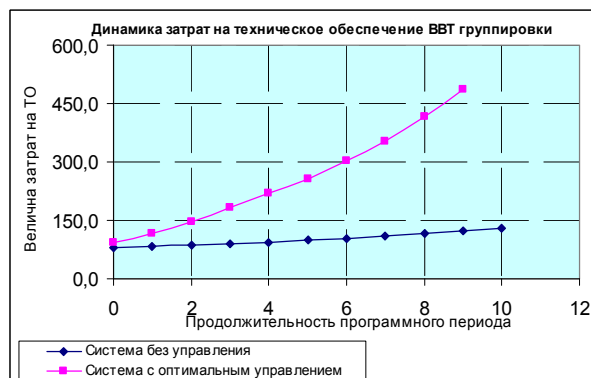


Рисунок 7 – Динамика затрат на техническое обеспечение ВВТ группировки

Из приведенных графиков видно, что реализация оптимального управления закупками, ремонтом и модернизацией ВВТ в течение программного периода обеспечивает выполнение требований по боеготовности и боевому потенциалу группировки при минимальных затратах на ее техническое обеспечение.

Исследование алгоритма приближенного оптимального управления показало, что он обеспечивает достаточно высокую точность определения оптимальных значений

параметров ТО (их погрешность не превышает 5-10%) и может быть успешно применен для решения практических задач.

Список использованных источников

1. Буравлев А.И., Пьянков А.А. Модель технического обеспечения войск // Электронный научный журнал «Вооружение и экономика». – 2010. - №1(10).
2. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969.