Буравлев А.И., доктор технических наук, профессор

Анализ систем массового обслуживания с разрывными функциями интенсивностей потоков

В статье рассмотрены простейшие модели систем массового обслуживания (СМО) с разрывными (импульсными и дельтаобразными) функциями интенсивностей потоков заявок. На примере этих моделей показано существенное различие в оценке эффективности СМО при разрывных и постоянных средних значениях интенсивностей потоков. Разработан подход к интегрированию систем дифференциальных уравнений с импульсными и дельтаобразными интенсивностями потоков. Приведены иллюстрационные примеры.

Введение

Широкое применение теории массового обслуживания в практических задачах обусловлено, с одной стороны, относительной простотой аналитического описания процессов функционирования сложных систем, а, с другой, – возможностью получения обобщенных вероятностных показателей эффективности функционирования этих систем [1, 2, 3, 4]. В классических моделях массового обслуживания часто принимается допущение о стационарности потоков заявок и потоков обслуживаний, что позволяет легко рассчитывать показатели эффективности систем как в динамике их функционирования, так и в стационарном режиме. Однако в реальных системах потоки заявок и обслуживания могут быть в значительной степени нестационарными, а их функции интенсивности разрывными. Примером может служить система массового обслуживания (СМО), в которой процесс обслуживания характеризуется перерывами или задержками в обслуживании поступающих заявок. Причем эти задержки могут повторяться периодически. Входной поток заявок также может периодически прерываться и возобновляться. Такую картину можно наблюдать в движении транспорта при возникновении различного рода «пробок». В этом случае функция интенсивности представляет собой скорее импульсную или дельтаобразную функцию. Приближение такой функции постоянной величиной, очевидно, даст значительные ошибки в оценке эффективности СМО.

В данной статье рассматриваются СМО с импульсными и дельтаобразными функциями и проводится анализ их точности.

1. Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания (рисунок 1) с отказами, на вход которой поступает поток заявок с постоянной интенсивностью λ и интенсивностью обслуживания $\mu(t)$ в виде периодической импульсной функции с величиной импульса μ и длительностью τ (рисунок 2):

$$\mu(t)=\begin{cases}\mu, & t\in[t_{2k-2};t_{2k-1}];\\ 0, & t\in[t_{2k-1};t_{2k}];\end{cases}\quad k=1,2,\ldots, \qquad (1)$$

где $t_{2k-1}=t_{2k}-T$; $t_{2k}=k(\tau+T)$; $t_{2k+1}=t_{2k}+\tau$ – моменты разрывов функции интенсивностей;

T – период импульсной функции.

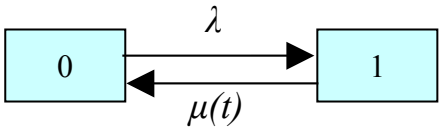

Рисунок 1 – Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Такое представление функции интенсивности соответствует режиму работы СМО с перерывами в обслуживании заявок.

Состояние канала характеризуется индикаторами: 0 – канал свободен; 1 – канал занят обслуживанием заявки.

В соответствии с теорией массового обслуживания [3, 4] динамика вероятности обслуживания заявки описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\,p_0(t)}{d\,t} = -\lambda\, p_0(t) + \mu(t)[1 - p_0(t)] \qquad (2)$$

с начальным условием t=0; p(0)=1.

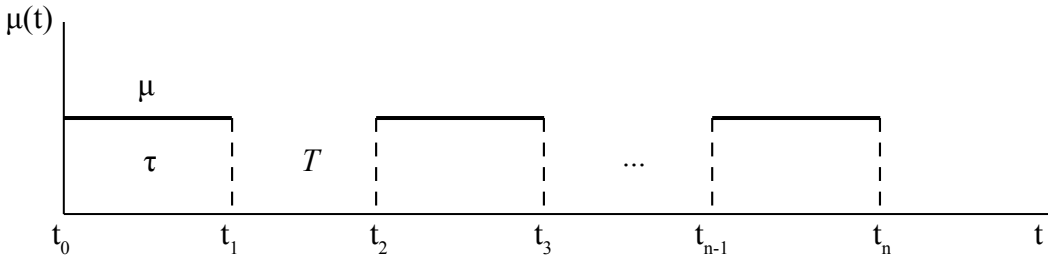

Рисунок 2 – График импульсной функции интенсивности обслуживания

Для удобства вычислений функцию интенсивностей $\mu(t)$ запишем в аналитическом виде с помощью единичных функций Хевисайда $\mathbf{1}(t-t_n)=\begin{Bmatrix}0, & t<t_n\\ 1, & t\ge t_n\end{Bmatrix}$:

$$\mu(t)=\mu\left[\mathbf{1}(t-t_{2k-2})-\mathbf{1}(t-t_{2k-1})\right].$$

Последовательное интегрирование уравнения (2) на интервалах [t_{2k-2}, t_{2k-1}]; [t_{2k-1}, t_{2k}] дает следующие выражения для вероятности обслуживания заявки:

А) $t_{2k-2}\le t<t_{2k-1}$; $p_0(t)=\left[p_0(t_{2k-2})-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]\exp\left[-(\lambda+\mu)(t-t_{2k-1})\right]+\frac{\mu}{\lambda+\mu}$; $t=0; p(0)=1$;

Б) $t_{2k-1}\le t<t_{2k}$; $p_0(t)=p_0(t_{2k-1})\exp\left[-\lambda(t-t_{2k})\right]$; $k=1,2,\ldots$ (3)

Рассмотрим другой случай, когда функция интенсивности обслуживания является постоянной величиной μ, а интенсивность входного потока заявок $\lambda(t)$ является импульсной периодической функцией

$$\lambda(t)=\lambda\left[\mathbf{1}(t-t_{2k-2})-\mathbf{1}(t-t_{2k-1})\right]$$

с амплитудой λ; длительностью импульса $\tau=t_{2k-1}-t_{2k-2}$ и периодом повторения $\theta=t_{2k}-t_{2k-1}$.

Интегрирование уравнения (2) дает результат аналогичный (3).

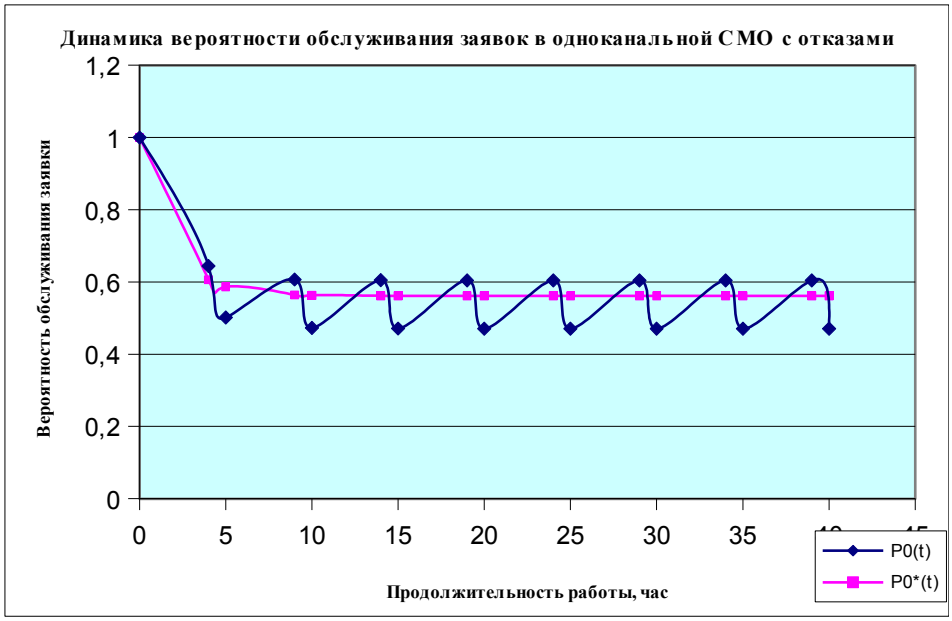

Рисунок 3 – Динамика вероятности обслуживания заявки в одноканальной СМО с отказами

На рисунке 3 показана динамика вероятности обслуживания заявки $p_0(t)$ при значении интенсивности входного потока $\lambda = 0{,}25\,час^{-1}$ и параметрах импульсной функции интенсивности обслуживания: $\mu = 0{,}4\,час^{-1}$; $\tau = 4\,часа$; $T = 1\,час$.

Из графика видно, что процесс обслуживания является нестационарным и со временем превращается в стационарный колебательный процесс. Период колебаний определяется периодом импульсной функции интенсивности обслуживания.

На этом же рисунке красным цветом показан график изменения вероятности обслуживания заявки $p_0^*(t)$, если в качестве интенсивности обслуживания используется среднее значение $\bar{\mu} = \frac{1}{\tau + T}\int_0^{\tau+T} \mu(t)dt = \mu\frac{\tau}{\tau + T}$.

Видно, что значения вероятностей обслуживания заявки при импульсной и постоянной функции интенсивности существенно отличаются.

На рисунке 4 показан график изменения относительной погрешности оценки вероятности обслуживания заявки

$$\eta(t) = \frac{\left|p_0(0) - p_0^*(t)\right|}{p_0(t)},$$

которая имеет размах колебаний от 0 до 20%, а в стационарном режиме – от 7 до 20%.

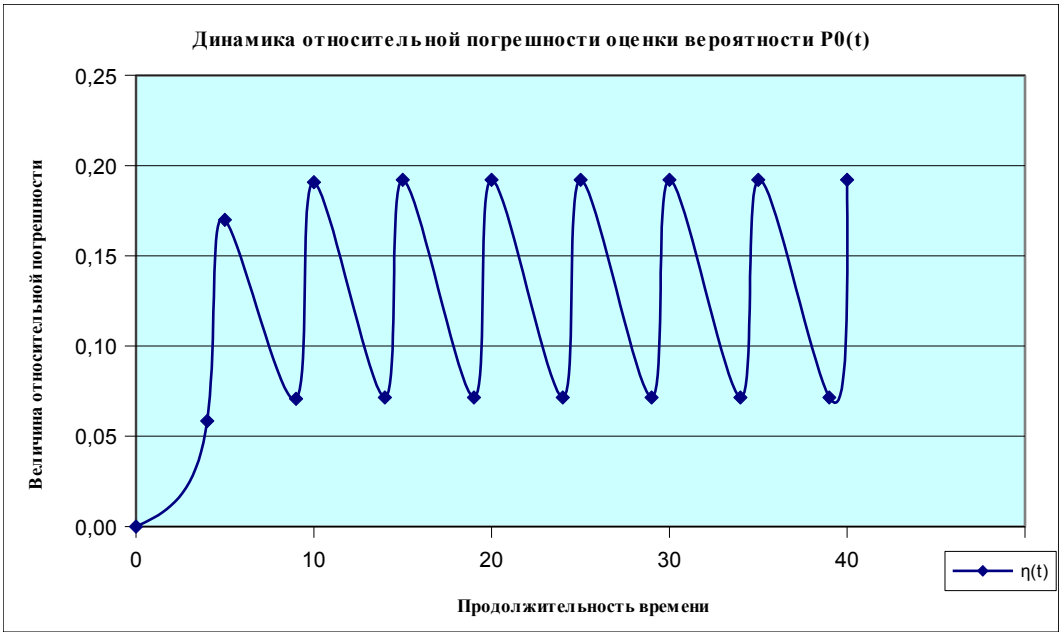

Рисунок 4 – Динамика относительной погрешности оценки вероятности обслуживания заявки

Это свидетельствует о том, что использование усредненных значений параметров СМО может приводить к значительным ошибкам в оценке их эффективности.

Объединяя оба рассмотренных выше случая можно получить конечные выражения для вероятностей обслуживания заявки при импульсных интенсивностях потоков $\lambda(t)$, $\mu(t)$. В силу громоздкости мы не будем приводить эти выражения. Более просто эта задача решается методом численного интегрирования. Уравнение для численного интегрирования, например, методом Эйлера имеет вид:

$$p_0(t_n + \Delta t) \approx p_0(t_n)\left[1 - \lambda(t_n)\Delta t\right] + \mu(t_n)\Delta t\left[1 - p_0(t_n)\right];\ t_n = t_{n-1} + \Delta t;\ n = 1,2,\ldots;\ p_0(0) = 1,$$

где шаг интегрирования Δt не должен превышать величины минимального интервала между точками разрыва функций интенсивности $\Delta t \leqslant min\{t_{2k} - t_{2k-1}; t_{2k+1} - t_{2k}\}$.

Рассмотрим случай, когда функция интенсивности обслуживания является дельта-функцией $\mu(t) = \delta(t - T)$ с временем запаздывания T. Данный случай характеризует

мгновенное обслуживание заявки после ее регистрации. Например, восстановление отказавшего агрегата методом замены на исправный из ремонтного комплекта после контроля и диагностики системы.

Уравнение для вероятности обслуживания заявки в этом случае принимает вид:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\delta(t-T)\left[1-p_0(t)\right]; \quad (4)$$

$$p_0(0)=1.$$

Интеграл этого уравнения на интервале времени [0, T] с учетом свойств дельта-функции [5] равен

$$p_0(t)=-\int_0^t \lambda p_0(x)\,dx+\mathbf{1}(t-T)\left[1-p_0(T)\right];$$

$$0\leqslant t\leqslant T.$$

Так как решение интегрального уравнения $p_0(t)=-\int_0^t \lambda p_0(x)\,dx$ известно:

$$p_0(t)=\exp(-\lambda t),$$

то общий интеграл уравнения принимает вид

$$p_0(t)=\exp(-\lambda t)+\mathbf{1}(t-T)\left[1-\exp(-\lambda T)\right];$$

$$0\leqslant t\leqslant T.$$

Если теперь представить функцию интенсивности обслуживания периодической дельта-функцией с периодом следования T

$$\mu(t_k)=\delta(t_k-T);\ t_k=kT;\ k=1,2,\ldots,$$

то уравнение для вероятности обслуживания заявки с точками разрыва $t_k=kT$ примет следующий вид:

$$p_0(t)=\exp\left[-\lambda(t-t_k)\right]+\mathbf{1}(t-t_k)\left[1-\exp(-\lambda T)\right];\ k=1,2,\ldots. \quad (5)$$

На рисунке 5 показана динамика вероятности обслуживания заявок в одноканальной СМО с интенсивностью входного потока $\lambda=0{,}25\ час^{-1}$ и дельтаобразной периодической функции восстановления с периодом T=2.

Рисунок 5 – Динамика вероятности обслуживания заявки при дельтаобразной функции интенсивности

График вероятности обслуживания (выделен синим цветом) представляет собой пилообразную кривую с периодом повторения T=2.

При численном интегрировании уравнений с дельта-функцией для любого конечного шага интегрирования Δt выполнятся соотношение

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \delta(t-T)p(t)dt = \mathbf{1}(t-T)p(t).$$

Это позволяет записать уравнение (4) для численного интегрирования в следующем виде:

$$p_0(t_n+\Delta t) \approx p_0(t_n)\left[1-\lambda(t_n)\Delta t\right] + \mathbf{1}(t_n-T)\left[1-p_0(t_n)\right];\ t_n = t_{n-1}+\Delta t;\ n=1,2,\ldots;\ p_0(0)=1.$$

На рисунке 5 красным цветом показан график вероятности обслуживания заявки, рассчитанной численным методом, откуда можно увидеть вполне удовлетворительную сходимость приближенной оценки к точному значению.

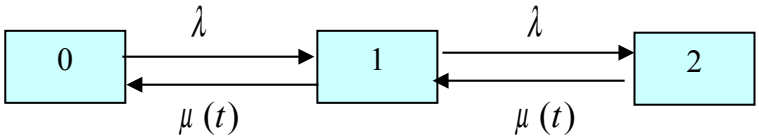

Рисунок 6 – Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием

2. Одноканальная СМО с ожиданием

Исследуем поведение одноканальной СМО с одним местом ожидания при периодической импульсной интенсивности обслуживания.

Граф состояний СМО представлен на рисунке 6.

Уравнения для вероятностей состояния СМО имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda\, p_0(t) + \mu(t)p_1(t);\\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda+\mu(t))\lambda p_1(t) + \\
&\quad + \lambda p_0(t) + \mu(t)p_2(t);\\
\frac{dp_2(t)}{dt} &= -\mu(t)p_2(t) + \lambda p_1(t)
\end{aligned} \qquad (6)$$

с начальными условиями:

$$t=0;\ p_0(0)=1;\ p_1(0)=p_2(0)=0.$$

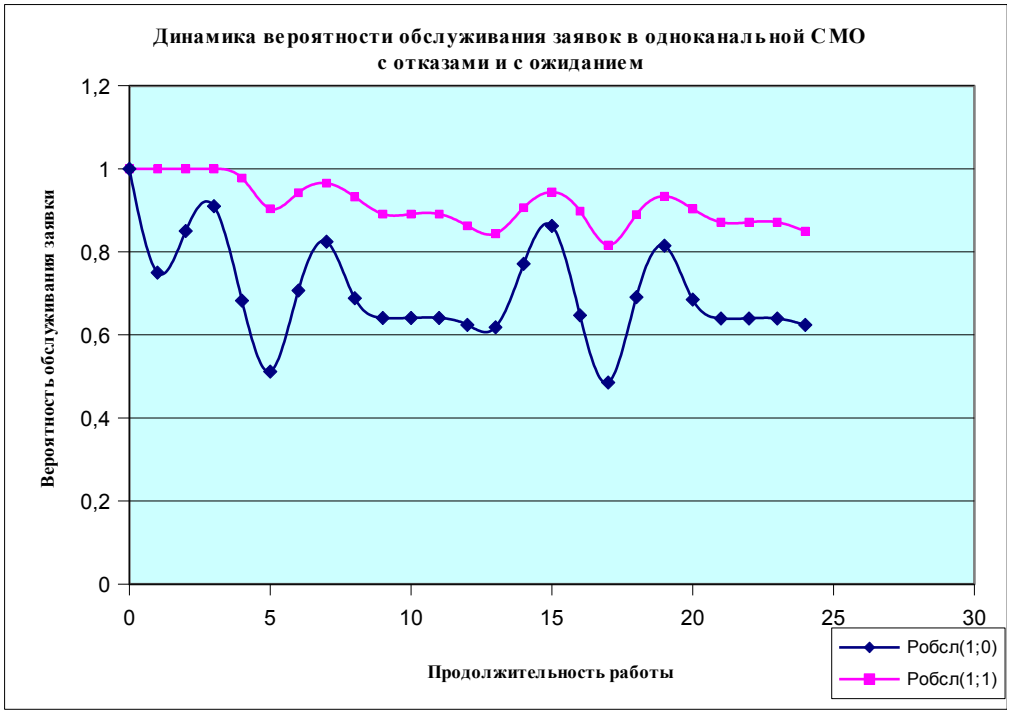

Рисунок 7 – Динамика вероятности обслуживания заявки в одноканальной СМО с отказами и с ожиданием

Численное интегрирование этой системы не представляет большого труда, если для функции интенсивности обслуживания $\mu(t)$ определены точки разрыва t_{2k-2}, t_{2k-1}, t_{2k}; k=1,2,... Тогда для каждого интервала непрерывности интегрируется исходная система уравнений с последовательной передачей начальных условий от одной точки разрыва к другой.

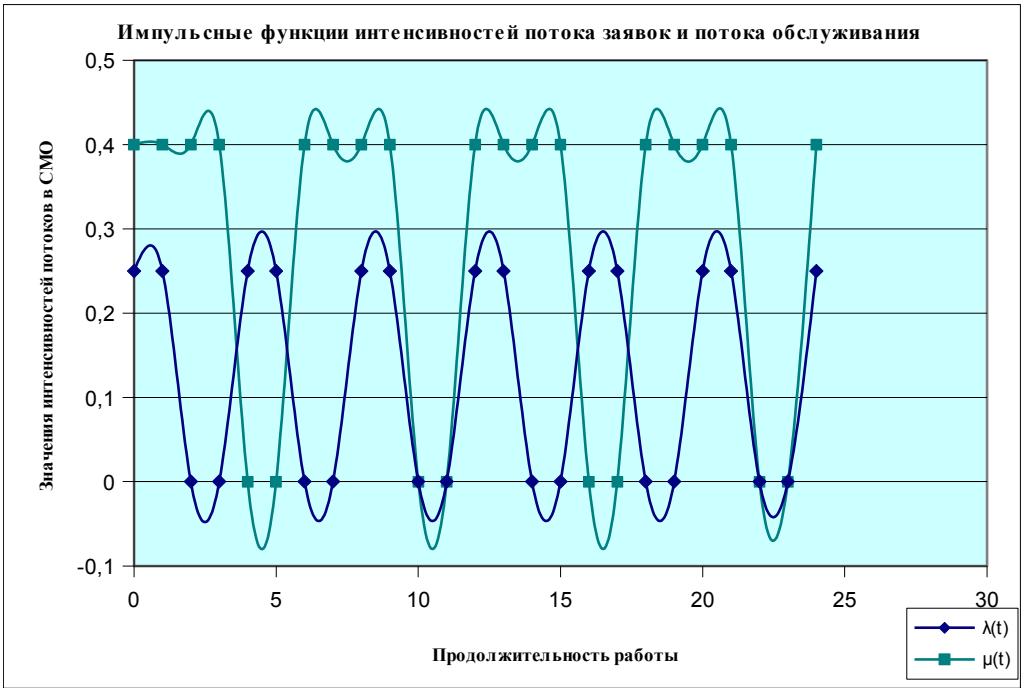

Рисунок 8 – Импульсные функции интенсивности потока заявок и обслуживания

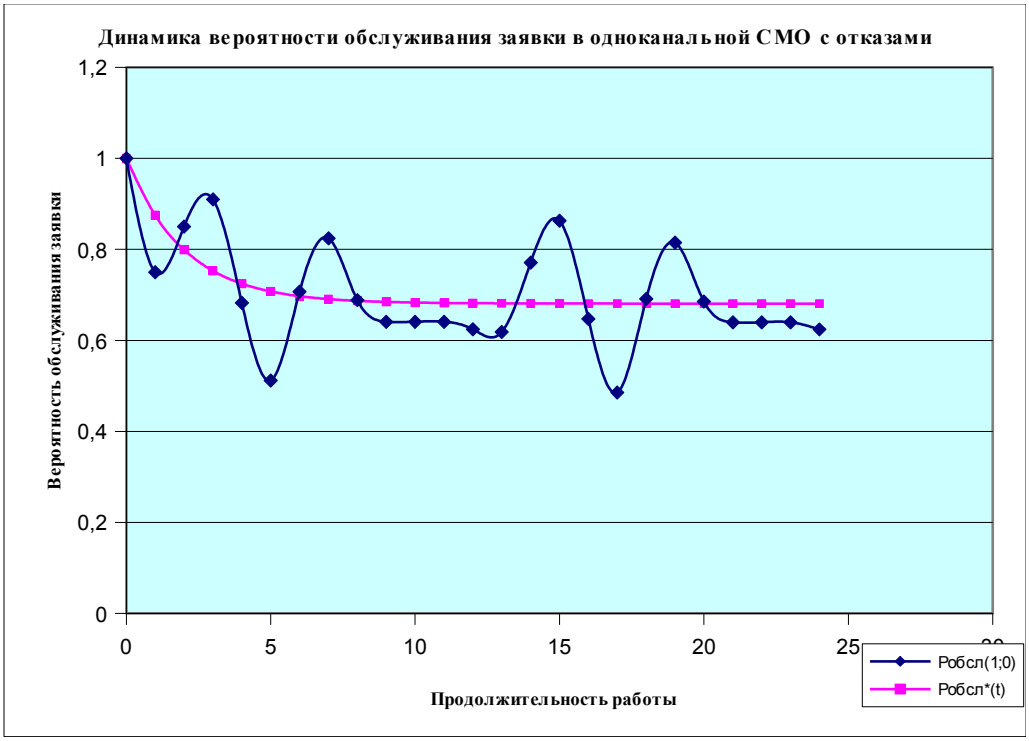

Рисунок 9 – Динамика вероятности обслуживания заявки одноканальной СМО с отказами

На рисунке 7 показаны графики изменения вероятности обслуживания заявки одноканальной СМО с отказами и с ожиданием при одних и тех же параметрах потоков. Видно, что наличие места ожидания заявки в СМО не только увеличивает вероятность ее обслуживания, но и сглаживает колебания этой вероятности.

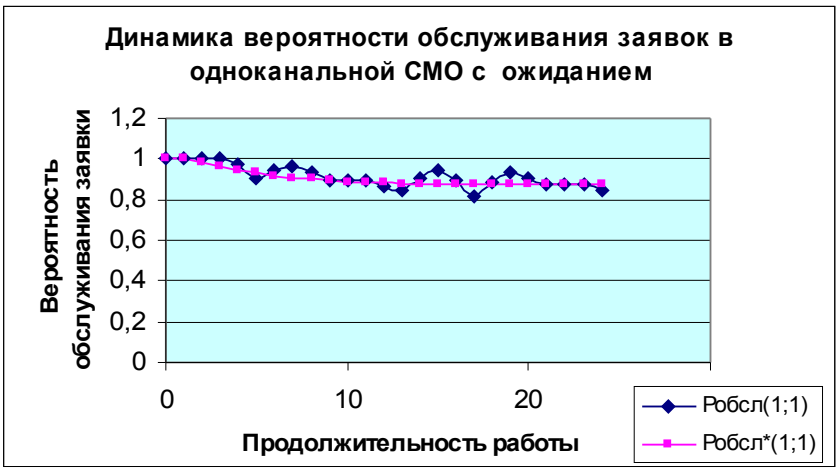

Рисунок 10 – Динамика обслуживания заявки одноканальной СМО с ожиданием

Численное интегрирование системы уравнений (6) при импульсной функции интенсивности заявок $\lambda(t)$ также не составляет большого труда.

На рисунках 8-10 показаны графики импульсных функций интенсивностей потоков для одноканальной СМО с отказами и ожиданием, а также графики изменения вероятности обслуживания заявок в процессе работы.

Из этих графиков наглядно видно, насколько существенно отличается динамика функционирования СМО при импульсных интенсивностях потоков. Заметным также является наличие «фильтрующих свойств» у модели СМО с ожиданием.

Полученные результаты можно распространить на многоканальные СМО с отказами и ожиданием. Принципиальным здесь является вопрос о правильном задании импульсных функций интенсивностей и корректном интегрировании системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний СМО на интервалах непрерывности этих функций.

Актуальным является исследование поведения СМО, описывающих противоборство двух объектов.

3. Модель противоборства двух объектов

Объекты, каждый их которых может находиться в двух состояниях: боеспособен и не боеспособен (поражен), наносят удары по противнику с импульсными интенсивностями поражающих воздействий $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ в течение некоторого времени боя. Граф взаимодействия объектов показан на рисунке 11.

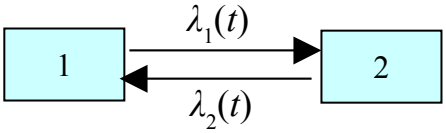

Рисунок 11 – Граф взаимодействия противоборствующих объектов

Уравнения для вероятностей боеспособного состояния сторон имеют вид:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_2(t)p_2(t); p_1(0)=1;$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_1(t)p_1(t); p_2(0)=1,$$

где

$$\lambda_1(t)=\lambda_1\left[\mathbf{1}(t-t_{2k-2})-\mathbf{1}(t-t_{2k-1})\right];$$

$$t_{2k-1}=t_{2k}-T_1;\ t_{2k}=k(\tau_1+T_1);\ t_{2k+1}=t_{2k}+\tau_1;$$

$$\lambda_2(t)=\lambda_2\left[\mathbf{1}(t-t'_{2k-2})-\mathbf{1}(t-t'_{2k-1})\right];$$

$$t'_{2k-1}=t'_{2k}-T_2;\ t'_{2k}=k(\tau_2+T_2);$$

$t'_{2k+1}=t'_{2k}+\tau_2$ – импульсные функции интенсивности поражающего действия сторон.

На рисунке 12 показаны графики импульсных функций поражающего действия сторон с параметрами: $\lambda_1=0{,}2\ час^{-1}$; $\tau_1=0{,}5\ час$; $T_1=0{,}5\ час$; $\lambda_2=0{,}15\ час^{-1}$; $\tau_2=0{,}25\ час$; $T_2=0{,}25\ час$.

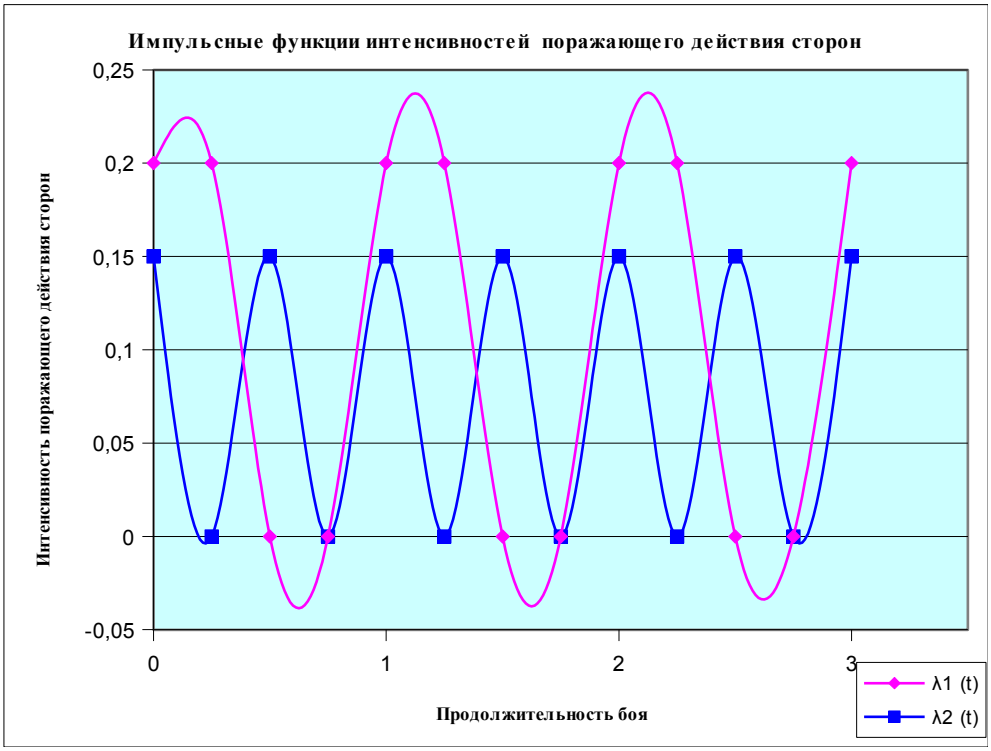

Рисунок 12 – Графики импульсных интенсивностей поражающего действия сторон

Как видно из рисунка 12, вторая сторона имеет меньшую по величине интенсивность, но большую частоту воздействия по противнику по сравнению с первой стороной. На рисунке 13 показаны графики изменения вероятностей боеспособного состояния сторон в ходе боя при импульсных $p_1(t)$, $p_2(t)$ и постоянных средних $p_1(t)$, $p_2^*(t)$ интенсивностях поражающего действия $\lambda_1=0{,}2\ час^{-1}$; $\lambda_2^*=0{,}075\ час^{-1}$.

Из рисунка 13 непосредственно видно, что при импульсном воздействии вторая сторона проигрывает первой стороне существенно меньше, чем при постоянных средних значениях интенсивностей. Еще более наглядно этот вывод подтверждается сравнением графиков для коэффициента превосходства сторон в бою $K(t)=\frac{p_1(t)}{p_2(t)}$, численно равному отношению вероятностей боеспособного состояния (рисунок 14).

При импульсных интенсивностях превосходство первой стороны, несмотря на более высокий уровень интенсивности поражающего воздействия, выглядит значительно скромнее по сравнению с использованием в модели средних значений этих интенсивностей.

Таким образом, осреднение импульсных интенсивностей и использование в моделях СМО их средних значений может привести к значительным ошибкам в оценке показателей эффективности СМО и некорректным выводам.

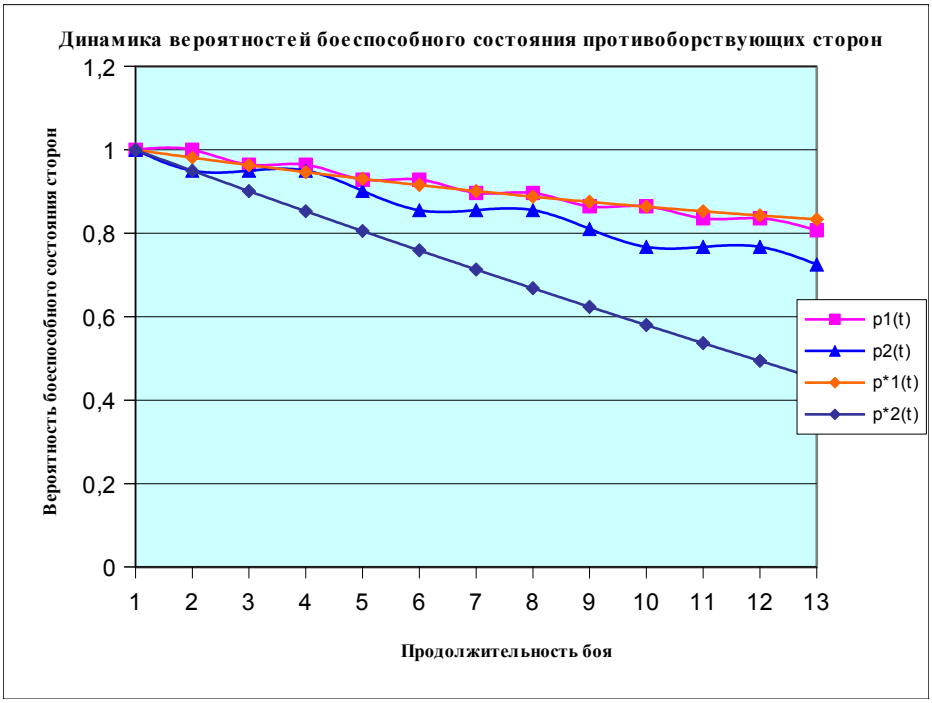

Рисунок 13 – Динамика вероятностей боеспособного состояния сторон

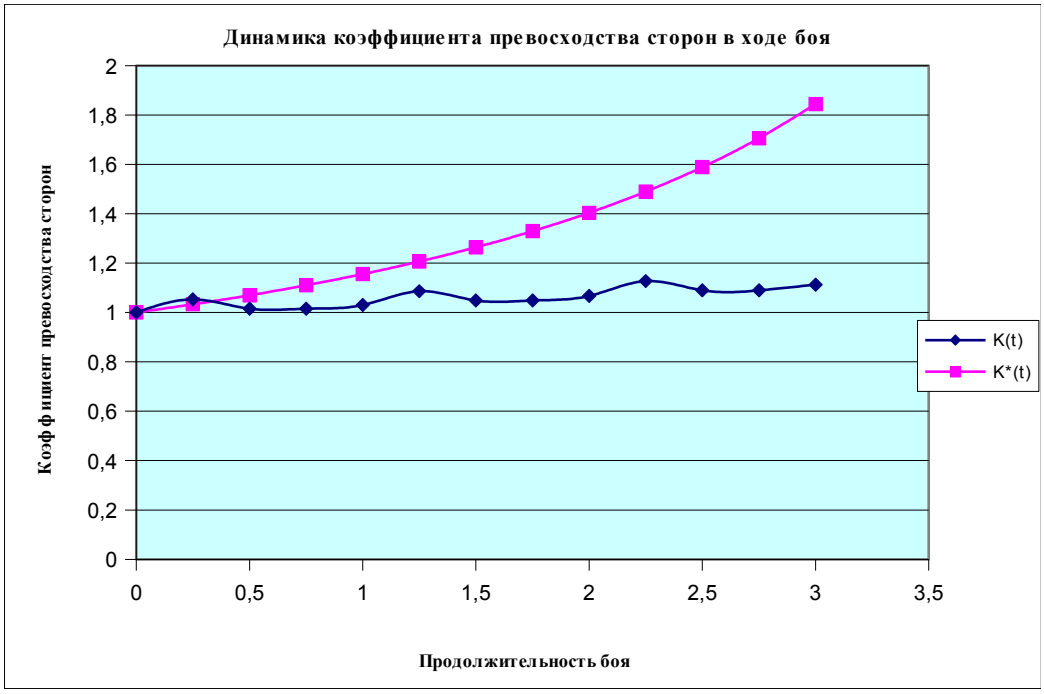

Рисунок 14 – Динамика коэффициента превосходства первой стороны в ходе боя

Заключение

Проведенный в статье анализ моделей СМО с разрывными функциями интенсивностей потоков показывает, что указанные особенности существенно влияют на точность оценок показателей эффективности СМО по сравнению с использованием осредненных значений этих интенсивностей. Для корректного применения моделей СМО в практических задачах необходимо особенно тщательно анализировать характер изменения интенсивностей потоков во времени и применять для них адекватную аппроксимацию. Для импульсных и дельтаобразных функций интенсивностей разработан подход к интегрирова-

нию дифференциальных уравнений для вероятностей состояний СМО.

Список использованных источников

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука, 1972.

2. Тараканов К.В., Овчаров Л.В., Тырышкин В.А. Аналитические методы исследования систем. – М.: Сов. Радио, 1974.

3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966.

4. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982.

5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958.