

А.И.Буравлев, доктор технических наук,  
профессор  
Г.А.Еланцев

### Задача обоснования оптимальной численности группировки войск по критерию «стоимость-эффективность»<sup>1</sup>

*В статье рассмотрена методика определения начальной численности группировки войск, способной противостоять группировке противника и обеспечить к заданному моменту времени требуемое соотношение сил. При известном составе и численности группировки противника методика позволяет определить минимальную величину затрат на формирование и содержание противостоящей ей группировки войск.*

Рассматриваются группировки войск сторон А и В, способные потенциально участвовать в двухсторонних военных действиях. Каждая группировка имеет в своем составе определенное количество ударных средств комплексов ВВТ различных типов и личного состава, обеспечивающего их применение.

Обозначим  $N_i^A$ ,  $N_j^B$  – численности ударных комплексов ВВТ различных типов в составе группировок ( $i=\overline{1, n}$ ), ( $j=\overline{1, m}$ ). Для каждого комплекса известны полигонные наряды средств поражения (СП)  $\omega_{ij}^A$ ,  $\omega_{ji}^A$ , необходимые для поражения объектов противника с заданной гарантированной вероятностью  $W_r$ . При этом предполагается, что каждый комплекс ВВТ обеспечен необходимым количеством боекомплектов СП для ведения боевых действий в течение заданного времени.

Объектами поражения выступают как ударные средства (комплексы вооружения) противника, так и объекты военной инфраструктуры (мосты, причалы, объекты энергетики, склады боеприпасов и военного имущества и др.), находящиеся на территории дислокации группировок войск и обеспечивающие их боевое функционирование. При этом эффективность поражения объектов инфраструктуры в значительной степени зависит от численности ударных комплексов ВВТ в составе группировок.

Все войсковые объекты и объекты инфраструктуры прикрываются средствами противовоздушной обороны и радиоэлектронного подавления, снижающие эффективность действия комплексов ВВТ с коэффициентами  $q_i^A$ ,  $q_j^B$ .

Действия сил и средств сторон осуществляются посредством распределения ударов комплексов ВВТ по объектам противника с учетом их важности путем задания матриц целераспределения

$$\Gamma^A = (y_{ij}^A)_{n \times m}; \quad \Gamma^B = (y_{ji}^B)_{m \times n}, \quad (1)$$

где  $0 \leq y_{ij}^A \leq 1$ ;  $\sum_{i=1}^n y_{ij}^A$ ;  $0 \leq y_{ji}^B \leq 1$ ;  $\sum_{j=1}^m y_{ji}^B$  – вероятности действия ударных средств по объектам противника.

Для каждого типа ударного средства известно число  $L_i$  личного состава и обеспечивающих средств ВВТ для их эксплуатации и боевого применения, а также стоимость закупки образцов ВВТ  $c_i$  и стоимость годового содержания необходимого личного состава и обеспечивающих средств  $s_i$ , выраженная в стоимости единичного образца ВВТ  $s_i = \lambda_i c_i$ .

Стоимость формирования и содержания группировки войск в первом приближении будет равна стоимости закупки ВВТ и годового содержания личного состава и обеспечивающих средств:

1 Статья подготовлена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-359.2013.10.

$$C^A = \sum_{i=1}^n [c_i^A + s_i l_i] N_i^A = \sum_{i=1}^n b_i^A c_i^A N_i^A, \quad (2)$$

где  $b_i^A = 1 + \lambda_i^A L_i^A$  – коэффициент увеличения стоимости комплекса ВВТ за счет обеспечивающих сил и средств.

Аналогичное выражение имеет место и для группировки стороны В.

$$\begin{aligned} \frac{dN_i^A}{dt} &= - \sum_{j=1}^m \lambda_{ji}^B N_j^B; (i = \overline{1, n}); N_i^A(0) = N_i^A; \\ \frac{dN_j^B}{dt} &= - \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}^A N_i^A; (j = \overline{1, m}); N_j^B(0) = N_j^B, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\lambda_{ij}^A, \lambda_{ji}^B$  – интенсивности поражающих действий ударных средств по объектам противника с учетом их целераспределения. Значения этих интенсивностей находим из следующего условия.

Пусть за время боя  $T$  каждая из сторон нанесет  $r = \left[ \frac{T}{\Delta t} \right]$  ударов с интервалом дискретности  $\Delta t$ , где символ  $[ ]$  обозначает операцию выделения целой части числа. В одном ударе каждый объект противника поражается с вероятностями  $W_{ij}^A = \gamma_{ij}^A \frac{q_{ij}^A}{\omega_{ij}^A}, W_{ji}^B = \gamma_{ji}^B \frac{q_{ji}^B}{\omega_{ji}^B}$ , а

за  $r$  ударов с вероятностями  $W_{ij}^A(r) = 1 - (1 - W_{ij}^A)^r, W_{ji}^B(r) = 1 - (1 - W_{ji}^B)^r$ . Здесь предполагается, что вероятности поражения объектов остаются неизменными в ходе операции. С другой стороны, представляя поток ударов, наносимых противоборствующими сторонами, как непрерывный пуассоновский поток с интенсивностями  $\lambda_{ij}^A, \lambda_{ji}^B$  получаем следующие равенства для вероятностей поражения объектов противника за время операции

$$\begin{aligned} W_{ij}^A(r) &= 1 - (1 - W_{ij}^A)^r = 1 - \exp(-\lambda_{ij}^A T); \\ W_{ji}^B(r) &= 1 - (1 - W_{ji}^B)^r = 1 - \exp(-\lambda_{ji}^B T). \end{aligned}$$

Из этих равенств получаем необходимые выражения для интенсивностей поражения:

$$\lambda_{ij}^A = -\frac{r}{T} \ln(1 - W_{ij}^A); \lambda_{ji}^B = -\frac{r}{T} \ln(1 - W_{ji}^B). \quad (4)$$

В ходе военных действий противоборствующие стороны наносят удары по объектам противника, снижая боевые возможности противостоящей группировки.

Для описания динамики средних численностей группировок в ходе военных действий используем уравнения Ланчестера без учета пополнения группировок [1]:

Рассмотрим задачу определения начальной численности комплексов ВВТ стороны А  $N_i^A, (i = \overline{1, n})$ , которая, во-первых, должна обеспечить к моменту завершения боя  $t = T$  требуемое соотношение между ударными

компонентами группировок  $\frac{N_i^A(T)}{N_i^B(T)} \geq k_i$  при

одинаковом типаже ВВТ ( $n = m$ ). Во-вторых, данная численность должна обеспечить минимальную величину затрат на формирование и содержание группировки при известном составе и численности группировки противника:

$$C^A = \sum_{i=1}^n b_i^A c_i^A N_i^A \rightarrow \min_{N_i^A}. \quad (5)$$

Сформулированная выше задача является задачей динамического программирования и ее решение сопряжено с определенными вычислительными трудностями.

Рассмотрим методику приближенного решения данной задачи.

Сформулированную задачу удобно решать в матричном виде. Для этого приводим все вектора и матрицы к одной размерности,  $l = \max(n, m)$  вводя в состав группировок недостающие компоненты ВВТ.

Обозначим

$N^A = (N_i^A)_{l \times 1}; N^B = (N_j^B)_{l \times 1}$  – векторы средних численностей ударных средств сторон;

$\Lambda^A = (\lambda_{ij}^A)_{l \times l}; \Lambda^B = (\lambda_{ij}^B)_{l \times l}$  – транспонированные матрицы интенсивностей поражающих действий комплексов ВВТ по объектам

противника при заданном целераспределении.

Тогда уравнения динамики противоборства (3) в матричном виде примут вид:

$$\frac{dN^A}{dt} = -\Lambda^B N^B; \quad \frac{dN^B}{dt} = -\Lambda^A N^A \quad (3')$$

с начальными условиями  $N^A(0); N^B(0)$ .

Введем матрицу  $K(T) = \begin{pmatrix} k_1(T) & 0 \\ 0 & k_1(T) \end{pmatrix}$ ,

задающую постоянные соотношения между численностями одностипных ударных средств противоборствующих группировок на момент окончания боя  $T$ :

$$N^A(T) = K(T) N^B(T). \quad (6)$$

Выпишем дифференциальные уравнения (3') в разностном виде:

$$N^A(T) - N^A(T - \Delta t) = -\Delta t \Lambda^B N^B(T - \Delta t);$$

$$N^B(T) - N^B(T - \Delta t) = -\Delta t \Lambda^A N^A(T - \Delta t).$$

Подставив величины  $N^A(T), N^B(T)$  в уравнение связи (6), получим:

$$N^A(T - \Delta t) - \Delta t \Lambda^B N^B(T - \Delta t) =$$

$$= K(T) (N^B(T - \Delta t) - \Delta t \Lambda^A N^A(T - \Delta t)).$$

После приведения подобных членов получаем следующее соотношение между численностями группировок на  $T - \Delta t$  шаге:

$$N^A(T - \Delta t) =$$

$$= (I + K W^A)^{-1} (K + W^B) N^B(T - \Delta t),$$

$$= K(T - \Delta t) N^B(T - \Delta t),$$

где  $K(T - \Delta t) = (I + K(T) W^A)^{-1} (K(T) + W^B)$ ;

$W^A = \Delta t \Lambda^A$ ;  $W^B = \Delta t \Lambda^B$  – вероятности поражения объектов противника на интервале  $\Delta t$ .

Двигаясь в «обратном» времени к началу операции  $t=0$ , получаем потребное соотношение численностей группировок:

$$N^A(0) = K(0) N^B(0). \quad (7)$$

Матрица  $K(0)$  определяется из рекуррентного уравнения

$$K(t-1) = (I + K(t) W^A)^{-1} (K(t) + W^B), \quad (8)$$

где  $t=1, 2, \dots, r$  – число совершаемых ударов.

Таким образом, по заданному соотношению численностей группировок в конце операции и известной начальной численности

группировки противника, можно рассчитать начальную численность группировки А. Выражение (8) остается справедливым и в случае, когда вероятности поражения  $W^A, W^B$  изменяются во времени.

Эффективность действия ударных комплексов зависит от их распределения по объектам противника. Естественно предположить, что стороны будут стараться выбирать такое распределение своих ударных средств, при котором противник может получить максимальный ущерб. Эту гипотезу примем в качестве принципа оптимального целераспределения.

Рассмотрим три стратегии целераспределения.

1) Распределение ударных сил сторон осуществляется прямо пропорционально эффективности их действия по объектам противника:

$$y_{ij}^A = \frac{k_i}{\omega_{ij}^A}.$$

Из условия нормировки  $\sum_{i=1}^l y_{ij}^A = 1$  получаем выражения для коэффициента

$$k_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^l \frac{1}{\omega_{ij}^A}}$$

и параметра целераспределения

$$y_{ij}^A = \frac{1}{\omega_{ij}^A \sum_{j=1}^l \frac{1}{\omega_{ij}^A}}. \quad (9)$$

Аналогичное выражение имеет место и для противоположной стороны.

2) Распределение ударных сил сторон осуществляется прямо пропорционально эффективности действия ударных сил противника

$$y_{ij}^A = \frac{k_i}{\omega_{ji}^B}.$$

В этом случае выражение для параметра целераспределения будет иметь вид

$$y_{ij}^A = \frac{1}{\omega_{ji}^B \sum_{j=1}^l \frac{1}{\omega_{ji}^B}} \quad (10)$$

3) Распределение ударных сил осуществляется равномерно по всем объектам противника

$$y_{ij}^A = y_{ji}^B = \frac{1}{l} \quad (11)$$

Для трех стратегий распределения имеем девять различных вариантов организации огневого поражения в операции. Для каждого варианта рассчитывается стоимость группировки стороны А

$$C^A = a' N^A(\Gamma^A, \Gamma^B),$$

где  $a' = (b_i, c_i)_{1 \times l}$  – вектор-строка стоимостей ударных комплексов ВВТ различных типов, входящих в состав группировки А.

Далее выбирается вариант организации огневого поражения противника, для которого обеспечивается минимаксная стоимость группировки А:

$$C^A = \min_{\Gamma^A} \max_{\Gamma^B} \{a' N^A(\Gamma^A, \Gamma^B)\} \quad (12)$$

Анализ результатов исследования показывает, что начальная численность группировки А, определенная по данной методике, дает несколько завышенный результат. Поэтому после определения начальной численности группировки А необходимо провести моделирование динамики противоборства груп-

пировок с использованием уравнений (3) для уточнения конечного результата. При этом возможно как увеличение, так и уменьшение численности группировки в зависимости от конечного результата.

При решении задачи использовано необходимое условие одинаковости типажа ударных комплексов ВВТ в составе группировок ( $n=m$ ). Если ( $n < m$ ), то в состав группировки А необходимо ввести дополнительные типы комплексов ВВТ (или равнозначные им) и решать задачи по рассмотренной выше методике для размерности  $l=m$ . Затем из группировки В следует исключить типы ВВТ не входящие в состав группировки А и снова решить задачи для размерности  $l=n$ . Полученная разность численностей  $\Delta N^A$  и стоимостей группировки  $\Delta C^A$  будут характеризовать те затраты, которые соответствуют включению в состав группировки А дополнительных типов ВВТ для обеспечения заданной эффективности ее действия с рассматриваемым противником.

Рассмотрим пример применения данной методики.

**Пример 1.** Планируется бой мотострелковых бригад (*мсбр*) сторон А и В. Боевые действия сторон поддерживаются с воздуха армейской авиацией (вертолетами). Состав *мсбр* стороны В представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Состав *мсбр* стороны В

Состав и численность ударных сил	Сторона А	Сторона В
танки	38	30
артиллерия	16	18
вертолеты	5	9

В таблицах 2, 3 приведены потребные наряды СП для поражения одной боевой единицы противника различными ударными комплексами.

Продолжительность боя  $T$  составляет 6 часов. Требуется определить начальную численность *мсбр* стороны А, обеспечивающую сле-

дующие количественно-качественные соотношение сил сторон к моменту завершения боя:

$$k_1 = \frac{N_1^A(T)}{N_1^B(T)} = 1,5;$$

$$k_2 = \frac{N_2^A(T)}{N_2^B(T)} = 1,3;$$

$$k_3 = \frac{N_3^A(T)}{N_3^B(T)} = 1,0.$$

Обеими сторонами использована третья стратегия целераспределения.

Таблица 2 – Потребные наряды СП для поражения объектов стороны В ударными средствами стороны А

Сторона А	Сторона В		
	танки	артиллерия	вертолеты
танки	3,5	3,0	3,5
артиллерия	3,7	3,2	3,6
вертолеты	2,6	2,3	2,7

Таблица 3 – Потребные наряды СП для поражения объектов стороны А ударными средствами стороны В

Сторона В	Сторона А		
	танки	артиллерия	вертолеты
танки	3,0	3,5	4,0
артиллерия	3,7	2,8	3,8
вертолеты	2,5	2,2	3,0

В результате проведенных расчетов определена начальная численность бригады А (таблица 1). При условных стоимостях ударных комплексов  $c_1=1,2$ ,  $c_2=0,8$ ,  $c_3=6,0$  стоимость бригады А составляет  $C^A=86,6$  у.е.

На рисунках 1-4 приведены графики изменения численностей сторон в ходе боевых действий, полученных с помощью уравнений динамики боя (3).

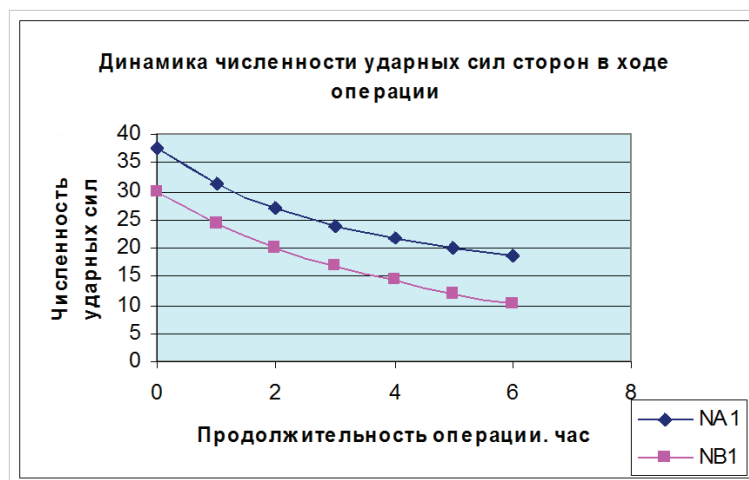


Рисунок 1 – Динамика численности танков в ходе операции

**Пример 2.** Исследуем зависимость стоимости группировки стороны А от стратегий целераспределения, используемых в ходе противоборства, для условий примера 1.

В таблице 4 приведены стоимости группировки А, полученные для девяти стратегий целераспределения и различных соотноше-

ний К между численностями однотипных ударных средств противоборствующих группировок к концу операции.

Из таблицы видно, что стоимость группировки А будет наибольшей при использовании противником стратегии целераспределения 2), при которой распределение ударных

сил стороны В осуществляется пропорционально эффективности действия ударных средств стороны А. В этом случае, стороне А

выгодно применить минимаксную стратегию 2), которая обеспечивают минимальную численность и стоимость группировки.

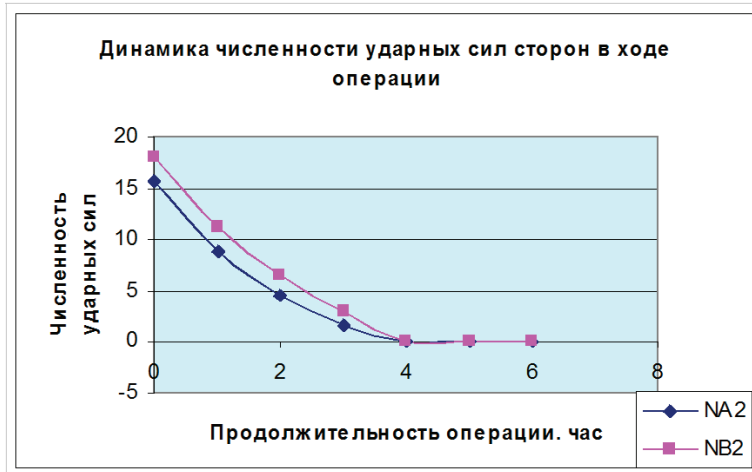


Рисунок 2 – Динамика численности артиллерии в ходе операции

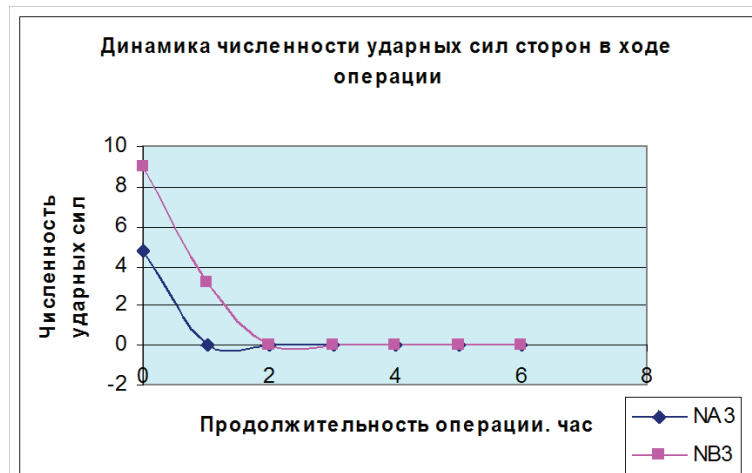


Рисунок 3 – Динамика численности вертолетов в ходе операции

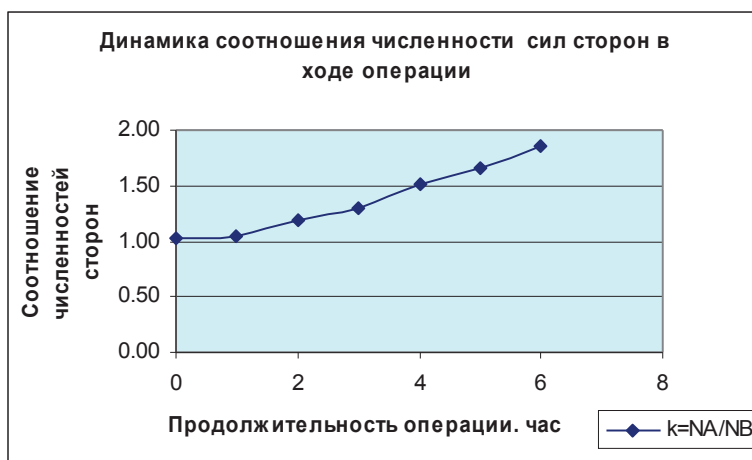


Рисунок 4 – Динамика соотношения численности сил сторон в ходе операции

Таким образом, для заданных количественно-качественных соотношений сторон примера 1 при таких стратегиях целераспределения численность группировки А составит:

$$N_A^1=37 ; N_A^2=18 ; N_A^3=3 ; N_A=58 ,$$

а ее стоимость будет равна  $C^A \approx 79,2$  у.е.

Таблица 4 – Стоимости группировки А

Стратегия целераспределения стороны А	Стратегия целераспределения стороны В		
	1	2	3
<i>K=1</i>			
1	88,9	115,6	99,0
2	66,2	93,5	75,8
3	85,7	111,5	95,4
<i>K=1,3·1</i>			
1	75,6	103,2	85,9
2	66,0	73,3	63,1
3	73,0	99,1	82,7
<i>K=1,5·1</i>			
1	65,4	93,7	75,8
2	70,6	63,1	67,6
3	63,9	90,2	73,6

Данную методику можно распространить на оценку потребных боевых возможностей воинских формирований оперативно-стратегического уровня, перейдя к оценкам их боевых потенциалов.

Боевой потенциал группировки характеризуется численностью и боевыми возможностями ВВТ по поражению сил и средств группировки противника, в том числе объектов военной инфраструктуры.

Количественной оценкой боевого потенциала служит средний ущерб, нанесенный объектам противника каждым типом ВВТ противоборствующей группировки [1]. Величина этого ущерба за время  $dt$  согласно уравнениям (3') составляет

$$dN^A = -\Lambda^B N^B dt ; dN^B = -\Lambda^A N^A dt .$$

Обозначим  $P^A = \Lambda^A N^A$ ,  $P^B = \Lambda^B N^B$  векторы боевых потенциалов группировок сторон. Умножив левые и правые части уравнений

Из приведенных примеров следует, что рассмотренный выше подход позволяет получить логически непротиворечивые результаты по оценке потребной численности противоборствующих сторон в рамках определенного сценария боевых действий.

(3') на матрицы интенсивности поражающих действий сторон  $\Lambda^A$ ,  $\Lambda^B$ , получаем систему дифференциальных уравнений для боевых потенциалов [2]:

$$\frac{dP^A}{dt} = -\Lambda^A P^B ; \frac{dP^B}{dt} = -\Lambda^B P^A \quad (13)$$

с начальными условиями  $P^A(0) = P_0^A$ ;  $P^B(0) = P_0^B$ .

Далее, задаваясь терминальным соотношением между боевыми потенциалами компонент группировок  $K$  на момент окончания боевых действий и используя рассмотренную выше методику, получаем потребный боевой потенциал группировки А:

$$P^A(0) = K(0) P_0^B ,$$

где матрица  $K(0)$  рассчитывается по рекуррентной формуле:

$$K(t-1) = (I + K(t) W^B)^{-1} (K(t) + W^A) , \quad (14) \\ t = 1, 2, \dots, r$$



для заданного периода боевых действий  $T$ .

Отличие формулы (14) от формулы (8) состоит в том, что показатели  $W^A$ ,  $W^B$  меняются местами.

Пример 3. По данным примера 1 требуется оценить потребный боевой потенциал группировки стороны А. Начальный боевой потенци-

ал стороны В характеризуется вектором  $P^B(0)=(6,1;6,0;6,3)^T$ . Расчетный боевой потенциал стороны А составляет  $P^A(0)=(6;7;6)^T$ . Динамика соотношения боевых потенциалов ВВТ различных типов в составе группировок показана на рисунках 5, 6.

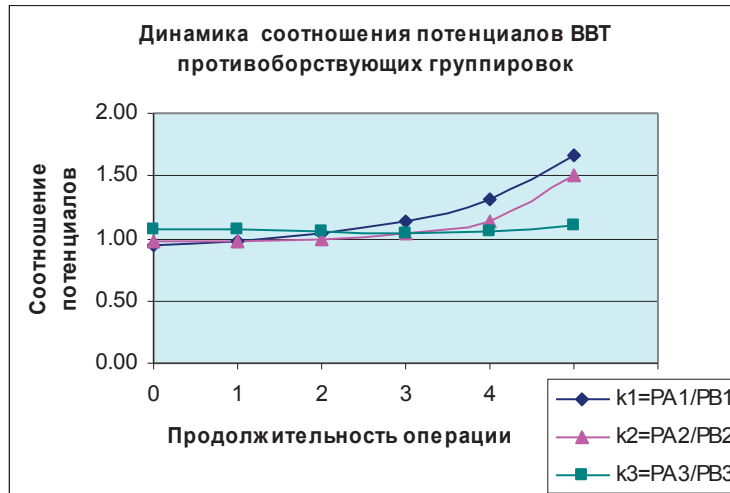


Рисунок 5 – Динамика соотношения боевых потенциалов по типам ВВТ

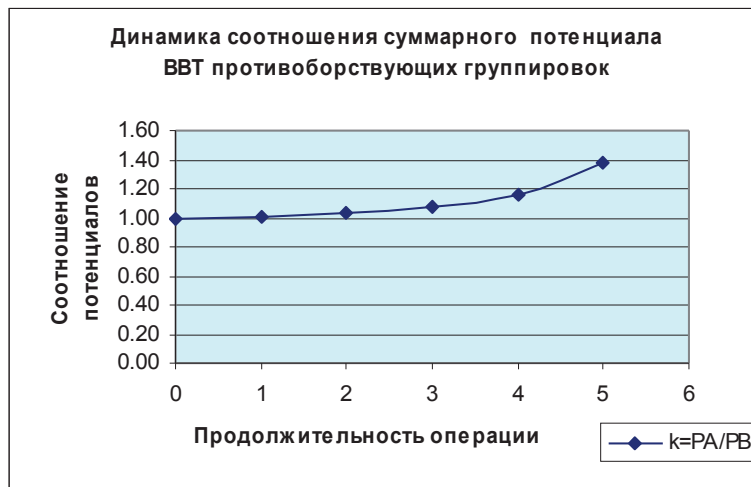


Рисунок 6 – Динамика соотношения суммарного боевого потенциала противоборствующих группировок

Из представленных графиков видно, что к моменту окончания боя соотношения боевых потенциалов ВВТ по каждой компоненте группировок практически соответствует требуемому по условию примера:

$$k_1 = \frac{P_1^A(T)}{P_1^B(T)} = 1,67;$$

$$k_2 = \frac{P_2^A(T)}{P_2^B(T)} = 1,5;$$

$$k_3 = \frac{P_3^A(T)}{P_3^B(T)} = 1,11.$$

Соотношение суммарных потенциалов группировок составляет:



$$k = \frac{P^A(T)}{P^B(T)} = 1,38.$$

Рассмотренный пример подтверждает возможность применения предложенной методики для обоснования начального уровня боевого потенциала группировок.

В приведенных примерах рассматривается группировка из трех типов ударных средств. В реальных условиях количество основных типов ударных средств будет больше. Это повлечет за собой усложнение вычислений, поэтому для проведения реальных расчетов на основе рассмотренной мето-

дики разработана программно-методическая система в среде Mathcad, позволяющая автоматизировать решение задачи обоснования оптимальной численности группировки войск по критерию «стоимость-эффективность» для различных целераспределений.

Разработанная программно-методическая система может быть использована для приближенной оценки потребных численностей группировок войск в операциях различного масштаба с учетом их эффективности, стоимости и возможностей противостоящего противника.

#### **Список использованных источников**

1. Брезгин В.С., Буравлев А.И. Методы оценки эффективности вооружения и военной техники и их применение в задачах программно-целевого планирования / В кн. Методология программно-целевого планирования развития системы вооружения на современном этапе. Ч.1, 2. Под ред. В.М.Буренка. – М.: Граница, 2011.
2. Буравлев А.И., Брезгин В.С. Уравнения динамики боевых потенциалов противоборствующих группировок // Вооружение и экономика. – 2010. – № 1 (9).