

В.Н.Анищенко, доктор технических наук,
профессор

Метод расчета интервала корреляции навигационных полей для корреляционно-экстремальных систем навигации летательных аппаратов

В основе синтеза алгоритмов оперативного решения многовариантных задач планирования боевого применения авиационных комплексов с высокоточным вооружением лежит статистический подход к описанию свойств физических полей Земли, позволяющий устанавливать аналитическую взаимосвязь точностных характеристик корреляционно-экстремальных систем навигации и статистических характеристик навигационного поля, получивших название информативных характеристик. Среди проблем информационного обеспечения планирования применения указанных средств относительно самостоятельный блок проблем образуют вопросы высокоточной экспресс оценки информативных характеристик навигационных полей, исходная информация о которых представлена в графическом виде, например, в виде топографических карт. В работе обосновывается высокоточный и малозатратный метод расчета интервала корреляции, как одной из основных информативных характеристик полей в корреляционно-экстремальных системах навигации летательных аппаратов.

В настоящее время широкое распространение в бортовых системах управления (БСУ) и навигации пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов, прежде всего в БСУ высокоточных средств вооружения большой дальности, нашли применение системы навигации, работающие по физическим полям Земли различной природы. Сфера применения таких высокоточных систем ориентирования, способных функционировать совершенно автономно в широком диапазоне высот, скоростей, времени и дальности полета, отсутствия космических навигационных систем типа GPS и спутниковой связи, организации радиопротиводействия со стороны противника, а также множества иных условий делает системы навигации по физическим полям Земли актуальными и в настоящее время, и на удаленную перспективу.

Для применения летательных аппаратов (ЛА) с такими системами навигации, как правило, требуется заблаговременная подготовка полетной информации о маршрутах полета и характеристиках полей Земли, используемых для навигации в БСУ, что является совершенно необходимым при полетах на большие расстояния. Подготовка указанной информа-

ции осуществляется в специальных комплексах, получивших, в частности, название комплексов средств автоматизации подготовки полетных заданий (КСА ППЗ). В комплексах подготовки полетных заданий для авиационных комплексов (АК) с летательными аппаратами, для навигации которых используются корреляционно-экстремальные системы (КЭСН), работающие по физическим полям Земли (ФПЗ, далее – навигационное поле), на этапах планирования, в силу сверхбольшой вариантности и сложности решаемой задачи применения авиационных средств и вооружений, а также длительности реализации высокоточных алгоритмов, используются упрощенные алгоритмы оценки статистических (информативных) характеристик навигационных полей, связанных с точностными характеристиками КЭСН.

Упрощенные алгоритмы оценки информативности навигационных полей используются также при решении различных многовариантных задач планирования применения АК, таких, например, как прокладка маршрутов, выбор распределения зон коррекции на маршрутах в условиях противодействия со стороны противника с использованием воздушных и наземных

средств противовоздушной обороны (ПВО), оценки эффективности боевого применения летательных аппаратов и т.д.¹

В основе синтеза таких алгоритмов лежит статистический подход к описанию свойств ФПЗ, позволяющий устанавливать аналитическую взаимосвязь точностных характеристик КЭСН и статистических характеристик навигационного поля, что является принципиально важным при решении различных задач планирования применения рассматриваемых средств, в значительной степени упрощает процессы анализа навигационных полей, выбора параметров настройки корреляторов и решения ряда других вспомогательных задач подготовки полетной информации для АК. Наличие аналитической взаимосвязи точностных характеристик КЭСН со статистическими характеристиками навигационных полей позволяет по заданному уровню точности навигации определять граничные значения статистических характеристик навигационного поля и свести задачу оценки информативности к задаче определения статистических характеристик полей и сопоставления их с граничными значениями.

Анализ методов оценки точностных характеристик КЭСН, базирующихся на статистическом подходе к описанию навигационных полей, показывает, что независимо от используемого математического аппарата основными статистическими характеристиками навигационных полей, определяющими работоспособность КЭСН, являются интервал корреляции значений поля в заданных направлениях и их средне квадратичное отклонение (СКО) [1, 2]. Данное обстоятельство обусловило тот факт, что одной из основных составляющих процесса решения задачи оценки информативности навигационного

поля при прокладке маршрутов полета ЛА, оснащенных КЭСН, является определение статистических характеристик этих полей на участках, которые могут рассматриваться как потенциальные зоны коррекции КЭСН.

Анализ существующих способов оценки СКО (σ) и интервала корреляции (ρ) значений поля показал, что наибольшую сложность и трудоемкость представляют алгоритмы расчета интервала корреляции.

Это обусловлено, в частности, тем, что само понятие интервала корреляции, хотя и не является новым, однако является неоднозначным и имеет различные определения в теории случайных процессов и случайных функций в зависимости от вида корреляционной функции исследуемого процесса. Существующие методы определения интервала корреляции базируются в основном на эвристических подходах («здравом смысле») без строгой привязки к какой-либо функции состояния исследуемого случайного процесса, как его объективной макроскопической (или интегральной) характеристике. Основаниями для определения интервала корреляции служат такие, например, исходные положения, как:

- временной интервал, на котором исчезает линейная зависимость между текущими значениями случайной функции, называется временем корреляции соответствующего случайного процесса²;

- интервал времени τ_k , на котором корреляционная функция, т.е. величина связи между значениями случайного процесса, уменьшается в M раз, называется интервалом или временем корреляции случайного процесса. Обычно $M=10$ или $M=e$, где e – натуральное число. Можно сказать, что значения случайного процесса, отличающиеся по времени на интервал корреляции, слабо связаны друг с другом³ и т.п.

1 Навигация, наведение и управление летательными аппаратами: Бортовая и наземная аппаратура комплексов навигации, управления и наведения / Материалы Всероссийской научно-технической конференции 20 – 21 сентября 2012 г., г. Москва, ГНЦ РФ ФГУП «ГосНИИАС» – М.: ГосНИИАС, 2012.

2 Временные характеристики случайного процесса: www.alnam.ru/book_kma.php?id=34.

3 Характеристики случайного процесса: http://www.sernam.ru/book_tec.php?id=18.

В целом, используемые алгоритмы расчета ρ основаны на вычислении корреляционной функции и дальнейшем ее преобразовании, зависящем от принятого метода определения интервала корреляции [3, 6, 9, 13]. Такой подход при исследовании случайных процессов приводит к необходимости производства многократных расчетов коэффициентов корреляции (автокорреляции) при различном сдвиге реализации (т.е. многократной обработки одних и тех же реализаций поля) и, как следствие, к большим затратам машинного времени.

Существуют и аналоговые коррелометры, но принцип их работы остается таким же [3, 6, 9, 13]. Кроме того, реализация изложенного подхода связана с определенными неточностями и «нечеткостью» получаемых оценок, что обусловлено принципиальной невозможностью равнозначного и полного использования в его рамках информации об ограниченных участниках процесса (или навигационного поля) при формировании корреляционной функции. Другим серьезным недостатком существующих методов оценки интервала корреляции является их чувствительность к видам корреляционных функций случайных процессов или навигационных полей [2], т.е. различные виды корреляционных функций требуют применения различных способов их обработки с целью определения интервала корреляции, что может приводить к затруднениям адекватной оценки, обобщения и сопоставления получаемых результатов.

Так, например, наиболее приемлемым для определения ρ экспоненциальных корреляционных функций типа:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \\ R(\tau) &= \sigma^2 \exp(-\alpha\tau^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где: R – экспоненциальная корреляционная функция;

α – интеграл от корреляционной функции или от квадрата корреляционной функции;

τ – аргумент корреляционной функции,

является интегральный подход: интервал корреляции определяется как интеграл от нормированной корреляционной функции исследуемого процесса.

Для корреляционной функции, имеющей колебательный характер, типа

$$R^*(\tau) = R(\tau) \cdot \cos(\omega\tau), \quad (2)$$

где: R^* – корреляционная функция, имеющая колебательный характер;

R – экспоненциальная составляющая типа (1) корреляционной функции R^* , для которой параметр α может рассматриваться как коэффициент (или параметр) затухания колебаний корреляционной функции;

ω – параметр колебательности корреляционной функции,

наиболее приемлемым определением ρ будет являться интервал, на котором корреляционная функция принимает некоторое значение $R(\rho)$, поскольку интеграл от такого вида колебательной функции в значительной степени зависит от коэффициента затухания ее колебаний (α):

$$R(\rho) = k \cdot R(0),$$

где: $k \leq 1$ – заданный коэффициент;

$R(0)$ – значение корреляционной функции в нулевой точке.

Частным случаем приведенного определения ρ является интервал, на котором корреляционная функция обращается в ноль, т.е. когда корреляционная функция первый раз пересекает ось абсцисс – $X(k=0)$.

Неоднозначность определения интервала корреляции, и, как следствие, неоднозначность отражения таким параметром свойств различных корреляционных функций может приводить к получению различных оценок точностных характеристик КЭСН ЛА. При этом следует отметить, что контроль вида и свойств корреляционных функций навигационных полей при проведении широкомасштабных исследований и массовом производстве полетных заданий для АК на практике будет сложным и очень затруднительным. В связи с этим возникает задача

разработки робастных¹ методов расчета интервала корреляции, нечувствительных к виду корреляционной функции и однозначно отражающих с требуемой точностью свойства исследуемых полей в решаемых задачах.

Анализ современного математического аппарата исследования случайных функций и процессов показал, что наиболее приемлемое решение задачи определения интервала корреляции, свободное от ранее отмеченных недостатков, может быть получено на основе использования математического аппарата корреляционной теории выбросов случайных процессов в квазистационарной постановке [10, 12].

Рассмотрение свойств интервала корреляции как функции или интегрального параметра случайного процесса показывает, что наряду со статистическим смыслом (интервал, на котором случайные величины еще можно считать линейно зависимыми в среднем) эта величина характеризует степень изменчивости (пространственной или временной) случайного процесса, что делает ее родственной по существу со спектральными характеристиками исследуемого процесса (навигационного поля), также определяющими работоспособность и точностные характеристики КЭСН ЛА [1, 2]. Последнее обстоятельство имеет принципиальное значение в дальнейших рассуждениях о синтезе метода расчета интервала корреляции, удовлетворяющего сформулированным требованиям. Исходными теоретическими предпосылками для реализации указанного синтеза являются следующие.

Понятие интервала корреляции имеет смысл только для стационарных (квазистационарных) процессов, а вне этого свойства оно бессмысленно. Любой стационарный случайный процесс можно наряду с корреляци-

онной функцией характеризовать и вполне определенным спектром частот, что для колебательных в среднем стационарных случайных процессов является естественным. Энергетическая ширина спектра частот корреляционной функции однозначно связана с шириной корреляционной функции в районе глобального экстремума, которая в свою очередь связана с величиной интервала корреляции.

Следует отметить, что процессы, описываемые экспоненциальными корреляционными функциями, являются, как правило, широкополосными, а процессы, описываемые колебательными корреляционными функциями – узкополосными или квазигармоническими («цветными») [1, 2]. Для обоих типов процессов (широкополосных и квазигармонических) всегда можно указать некоторую характерную частоту, которая будет определять ширину энергетического спектра частот (наиболее характерный параметр для широкополосных случайных процессов) или величину преобладающей частоты колебаний исследуемого процесса (наиболее характерный параметр для узкополосных случайных процессов, для которых энергетический параметр определяется в основном преобладающей (в радиотехнике – несущей) частотой). Указанное значение характерной частоты случайного процесса и будет определять основные свойства корреляционной функции, а, следовательно, и величину интервала корреляции процесса.

Правомерность такого обобщения обусловлена наличием однозначной взаимосвязи между параметрами корреляционной функции и параметрами спектральных свойств стационарного случайного процесса [11].

Проявлением свойств колебательности в среднем любого стационарного случайного процесса является также существование такой его интегральной характеристики как среднее число выбросов значений этого процесса над некоторым фиксированным уровнем C , также однозначно связанной со спектральными и корреляционными характери-

1 Робастный – 1) Mathematics: robust – устойчивый к нарушениям исходных предпосылок – robust (statistics) 2) robust – об оценке в статистике, устойчивой к нарушению исходных предпосылок о свойствах исследуемых явлений и процессов / Универсальный русско-английский словарь: http://dic.academic.ru/dic.nsf/rus_eng_mathematics/

стиками исследуемого процесса (навигационного поля).

В целях установления взаимосвязи интервала корреляции навигационного поля с его некоторыми метрическими величинами рассмотрим, не нарушая общности рассуждений, взаимосвязь среднего числа выбросов случайного стационарного центрированного гауссовского процесса (с нулевым математическим ожиданием и дважды дифференцируемой в нуле корреляционной функцией) относительно некоторого фиксированного уровня C [10]:

$$N_{\xi}^{yd}(C) = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{-r''_{\xi 0}} \cdot \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right), \quad (3)$$

где: $N_{\xi}^{yd}(C)$ – удельное (связанное с единицей длины реализации) среднее число пересечений гауссовским стационарным случайным процессом (с нулевым математическим

ожиданием) некоторого фиксированного уровня C ;

σ_{ξ}^2 – дисперсия значений случайного процесса;

$r''_{\xi 0}$ – значение второй производной нормированной корреляционной функции в «нуле».

Коэффициент при экспоненте в формуле (3) обозначим как $\frac{1}{K}$, тогда

$$\frac{1}{K} = \frac{\pi}{\sqrt{-r''_{\xi 0}}}. \quad (4)$$

В таблице 1 приведены некоторые значения величин K соответствующие различным видам корреляционных функций (где Δf_s – энергетическая ширина спектра стационарного случайного процесса [10]).

Таблица 1 – Значения величин коэффициента из формулы (4), соответствующие различным видам корреляционных функций.

№ п/п	Вид корреляционной функции	$-r''_{\xi 0}$	Δf_s	K
1.	$(1 + \alpha \tau) \cdot \exp(-\alpha \tau)$	α^2	$\frac{1}{4}\alpha$	$\frac{\pi}{\alpha}$
2.	$\exp(-\alpha\tau^2)$	2α	$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$
3.	$\frac{\sin\left(\Delta\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{\Delta\omega \cdot \frac{\tau}{2}}$	$\frac{1}{12} \cdot \Delta\omega^2$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \Delta\omega$	$\sqrt{\frac{\pi}{12}} \cdot \frac{1}{\Delta\omega}$
4.	$\cos(\omega^2 \cdot \tau)$	ω_0^2	-	$\frac{\pi}{\omega_0}$
5.	$\left[1 + \alpha \tau + \frac{1}{3}(\alpha\tau)^2\right]$	$\frac{1}{3}\alpha^2$	$\frac{3}{16}\alpha$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}\alpha}$
6.	$\left[1 + \alpha \tau - 2(\alpha\tau)^2 + \frac{1}{3}(\alpha\tau)^3\right]$	$5\alpha^2$	$\frac{1}{2}\alpha$	$\frac{\pi}{\sqrt{5}\alpha}$
7.	$\left[1 + (\alpha\tau)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	α^2	-	$\frac{\pi}{\alpha}$
8.	$\left[1 + (\alpha\tau)^2\right]^{-1}$	$2\alpha^2$	$\frac{1}{\pi\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}\alpha}$
9.	$sech(\alpha\tau)$	α^2	$\frac{1}{\pi\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha}$

Рассмотрим регулярную совокупность уровней, задаваемых следующим выражением:

$$C_i = \Delta \cdot i \quad (5)$$

где: Δ – дискрет квантования уровней;
 $i \in Z$ – номер уровня, $Z = \{-\infty, +\infty\}$.

Исходя из формулы (3), можно вывести формулу (6) определения суммы удельных средних чисел пересечения рассматриваемым случайным процессом всего бесконечно-

го множества $Z = \{-\infty, +\infty\}$ уровней (рисунок 1):

$$N_{\Sigma}^{y\partial} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_i^{y\partial}(C_i) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\Delta i)^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right), \quad (6)$$

где $N_{\Sigma}^{y\partial}$ – суммы удельных средних чисел пересечения рассматриваемым случайным процессом всего бесконечного множества Z уровней.

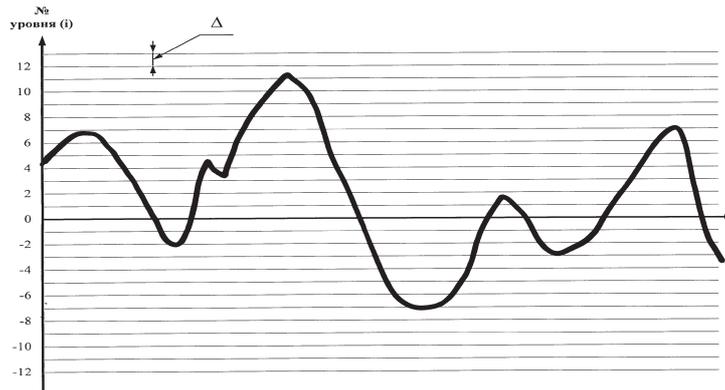


Рисунок 1 – Схема пересечения исследуемой реализацией случайного процесса с множеством регулярных уровней заданной дискретности Δ

Обозначим $y = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}$, тогда выражение

(6) можно представить в виде:

$$N_{\Sigma}^{y\partial} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp(-(iy)^2). \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$f(y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp(-(iy)^2). \quad (8)$$

Можно показать, что правая часть уравнения (8) есть разложение в бесконечный ряд по экспоненциальным функциям гиперболического выражения вида [7, 8]

$$f(y) = \frac{\sqrt{3}}{y}. \quad (9)$$

На рисунке 2 представлен полученный расчетным путем график функции $f(y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \exp(-(iy)^2)$, построенный в системе координат $f(y), \frac{1}{y}$, который имеет линейный характер с углом наклона прямой

$\phi = \frac{\pi}{3}$ [рад]. Функция $f^{-1}(y) = \frac{1}{f(y)}$ также

имеет линейный характер, только с углом наклона прямой $\phi = \frac{\pi}{6}$ [рад] в системе координат

$f^{-1}(y), y$, т.е. $f^{-1}(y) = \frac{1}{f(y)} = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Иными

словами, рисунок 2 является графическим подтверждением идентичности выражений (8) и (9).

Подставляя формулу (9) в (7), можно получить:

$$N_{\Sigma}^{y\partial} = \frac{\sqrt{3}}{K y}. \quad (10)$$

При этом, среднее число пересечений случайным процессом произвольной длины L всего бесконечного множества уровней Z с учетом того, что $y = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}}$, может быть определено по формуле:

$$N_{\Sigma}(L) = L \cdot N_{\Sigma}^{y\partial} = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{K y} = \frac{\sqrt{6} L \sigma_{\xi}}{K \Delta}. \quad (11)$$

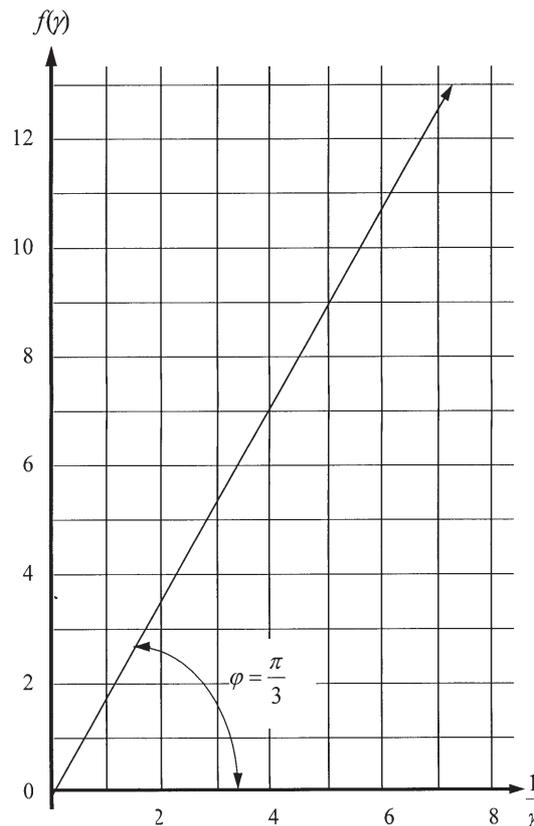


Рисунок 2 – График функции $f(\gamma)$ в системе координат $f(\gamma), \frac{1}{\gamma}$

При использовании информации о реальных физических полях Земли все параметры, входящие в уравнение (11), за исключением коэффициента k , могут быть легко инструментально измерены или рассчитаны. Исходя из формулы (11), коэффициент k при известных значениях Δ , N_{Σ} , а также статистических характеристик и размеров исследуемого участка поля: σ , L , может быть определен по формуле:

$$k = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma \cdot L}{N_{\Sigma} \cdot \Delta} \quad (12)$$

Выясним физическую сущность коэффициента k .

На основе сопоставления формулы (3) с данными, приведенными в таблице, можно показать, что $N_{\xi}^{y0}(C)$ есть не что иное, как своего рода характеристика колебательности централизованного случайного процесса относительно уровня C , а величина $\frac{1}{k}$ – есть удельное среднее число пересечений случай-

ным процессом нулевого уровня, то есть характеризует в среднем колебательность централизованного процесса относительно нулевого уровня. Если учесть, что любой централизованный гармонический процесс на интервале, равном периоду его колебаний, дважды пересекает нулевой уровень, то для него справедливым является следующее соотношение:

$$f^* = \frac{1}{2k} \quad (13)$$

или

$$T = \frac{1}{f} = 2 \cdot k, \quad (14)$$

где: f^* – частота колебаний гармонического процесса,

T – период колебаний гармонического процесса.

Корреляционная функция такого гармонического процесса будет являться также периодической незатухающей функцией, для которой интервал корреляции может быть строго

определен как интервал, на котором корреляционная функция обращается в ноль, тогда

$$\rho = \frac{T}{4} = \frac{\kappa}{2}, \quad (15)$$

где ρ – интервал корреляции гармонического процесса.

Для нестрого множества квазипериодических процессов (квазигармонических), представляющих собой сумму гармонической (моноколебание) и негармонической (широкополосной) составляющих, величина f^* , определяемая по формуле (13), будет являться частотой гармонической составляющей, или преобладающей частоты процесса. Корреляционная функция квазигармонического процесса будет иметь колебательный характер, например, типа затухающего косинуса:

$$r(\tau) = r_w(\tau) \cos(\omega \tau), \quad (16)$$

где $r_w(\tau)$ – корреляционная функция аperiodической (широкополосной) составляющей, или функция, имеющая аperiodический вид или характер.

В этом случае величина преобладающей частоты будет определяться по формуле:

$$f^* = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ а величина } \rho = \frac{\kappa}{2} \text{ будет являться}$$

интервалом, на котором корреляционная функция вида (16) обращается в ноль, и поэтому она может рассматриваться как интервал корреляции квазигармонического процесса.

Для широкополосных процессов, не имеющих ярко выраженного колебательного характера, величина f^* вида (13) может рассматриваться как аналог энергетической ширины спектра частот Δf^* (см. таблицу). При этом если величину κ для широкополосного процесса, описываемого недифференцируемой дважды в нуле корреляционной функцией, определить как

$$\kappa = \frac{1}{2 \cdot \Delta f^*}, \quad (17)$$

где Δf^* – энергетическая ширина спектра частот рассматриваемого процесса, то можно показать, что для корреляционной функции

типа $r(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$, которая не является дважды дифференцируемой в нуле, справедливым является следующее выражение:

$$\rho' = \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha}.$$

Исходя из линейной взаимосвязи обратной величины параметра κ с величиной энергетического спектра частот (см. выражение (17)), можно, по аналогии с дважды дифференцируемыми в нуле корреляционными функциями, для рассматриваемой экспоненциальной корреляционной функции, принять

$$\frac{\kappa}{2} = \frac{1}{\alpha} = \rho',$$

где $\rho' = \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau$ – есть интервал корреляции, соответствующий одному из существующих определений, как интервал, равный интегралу от нормированной корреляционной функции.

Строгость или допустимость такого подхода к определению параметра κ (см. формулу (12)) для широкополосных процессов, описываемых недифференцируемыми дважды в нуле корреляционными функциями, была установлена автором только экспериментально.

Эксперимент проводился с использованием топографических и соответствующих высокоточных цифровых карт местности с различными типами рельефа: равнинный, холмистый, смешанный, включая предгорья и невысокие горы, для которых можно было формировать высокоточные цифровые карты. Протяженность исследуемых участков местности характеризовалась сотнями километров в обоих направлениях. Выборочно экспериментальные исследования были проведены с использованием цифровых карт магнитного поля Земли и синтезируемым по ним графическим изображениям. Результаты экспериментов показали высокую сходимость результатов оценки интервала корреляции, получаемых на основе использования изложенного в статье метода и классических методов, основанных на расчете корреляцион-

ной функции: расхождения не превышали 3%, что может объясняться точностью (дискретностью) используемой исходной цифровой информации.

Обобщая изложенное, можно заключить следующее: величина $\rho = \frac{\kappa}{2}$, где κ – параметр, определяемый выражением (12), есть характеристика корреляционной функции стационарного случайного процесса, по сути совпадающая с такой характеристикой случайного процесса, как интервал корреляции, обладает всеми свойствами, присущими различным определениям интервала корреляции, ставшими классическими, свободна от частных недостатков этих определений, и является измеримой на всем множестве стационарных или квазистационарных случайных процессов независимо от вида их корреляционных функций.

Кроме того, величина $\rho = \frac{\kappa}{2}$ однозначно связана с амплитудно-частотными характеристиками описываемых навигационных полей (или случайных процессов) и тем самым обеспечивает сопоставимость результатов исследований стохастических систем, в том числе и таких, как КЭСН. При этом оценки свойств исследуемых стохастических систем, получаемые на основе определения параметра $\rho = \frac{\kappa}{2}$, обеспечивают инвариантность результатов, независимо от вида корреляционных функций используемых полей и случайных процессов. Иными словами можно сказать, что величина $\rho = \frac{\kappa}{2}$ может являться критерием подобия различных случайных процессов, которые могут быть отнесены к классу стационарных или квазистационарных.

Рассмотрим алгоритм вычисления интервала корреляции, определяемого формулой (15), навигационного поля на примере поля высот (h) рельефа местности.

Подставляя выражение (12) в формулу (15), можно получить

$$\rho_h^L = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_h^L \cdot L}{N_{\Sigma} \cdot \Delta}, \quad (18)$$

где σ_h^L – СКО высот поля на обрабатываемой реализации длиной L .

Произведение $N_{\Sigma} \cdot \Delta$ есть ни что иное, как сумма модулей приращений поля Δh между уровнями C_i (рисунок 1). Дискретный характер уровней C_i может приводить к потере части информации, содержащейся в исследуемой реализации поля. Эту теряемую часть информации можно охарактеризовать величиной ошибок δh представления данных, обусловленных квантованием значений поля. В общем случае дисперсия таких ошибок при $\Delta \leq \sigma_h$ может оцениваться по формуле:

$$\sigma_{\delta h}^2 \approx (m \cdot \Delta)^2,$$

где: $\sigma_{\delta h}$ – СКО ошибок описания поля, обусловленных квантованием его значений в модели;

m – коэффициент пропорциональности, зависящий от закона распределения значений исследуемого поля.

Исходя из выражения (3) с учетом выше приведенной формулы оценки $\sigma_{\delta h}^2$ и применения методов теории чувствительности [4], может быть получена следующая формула для оценки СКО ошибок определения интервала корреляции поля, обусловленных дискретностью обработки информации:

$$\sigma_{\delta \rho_h} \approx \frac{d \rho_h}{d \sigma_h} \cdot \sigma_{\delta h} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{L}{N_{\Sigma} \cdot \Delta} \cdot \sigma_{\delta h}, \quad (19)$$

при этом следует отметить, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{\delta \rho_h}}{\rho_h} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_{\delta h}}{\sigma_h} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{m \cdot \Delta}{\sigma_h} \right) = 0. \quad (20)$$

При работе с цифровыми картами поля, имеющими матричный, дискретный характер

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\Delta \cdot N_{\Sigma}) = \sum_i |\Delta h_i|, \quad (21)$$

где: $\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$;

h_i – значение поля в i -й точке реализации.

Можно показать, что при непрерывной форме записи поля и ориентации реализаций в направлении оси X

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\Delta \cdot N_{\Sigma}) = \int_L |dh| = \int_L \left| \frac{\delta h}{\delta x} \right| dx = l,$$

где: l – длина кривой исследуемой реализации поля;

$\frac{\delta h}{\delta x}$ – частная производная многомерной функции h по координате x .

Из анализа полученных результатов следует, что рассмотренный предельный переход (21) позволяет реализовать потенциально достижимую точность расчета интервала корреляции поля, при этом процесс расчетов может быть существенно упрощен путем применения следующего математического приема. Подставляя выражение (21) в формулу (18) можно получить:

$$\rho_h^L = \frac{\sqrt{1,5} \cdot \sigma_h^L \cdot L}{\sum_i |h_{i+1} - h_i|}, \quad (22)$$

где ρ_h^L – интервал корреляции значений поля на исследуемой реализации длиной L .

Интервал корреляции ρ_h двумерных изображений поля может определяться по формуле:

$$\rho_h = M[\rho_h^L] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{h_i}^L, \quad (23)$$

где: N – число обрабатываемых одномерных реализаций поля в заданном направлении, образующих его двумерное изображение;

$\rho_{h_i}^L$ – оценка ρ_h на i -й реализации поля.

Таким образом, изложенный подход позволяет реализовать качественно новые возможности решения задачи оценки интервала корреляции случайного процесса или физического поля Земли по их цифровым картам, а именно:

- исключить необходимость вычисления корреляционной функции и, как следствие, существенно упрощать процесс расчетов ρ_h по цифровым картам;

- реализовать потенциально достижимую точность расчетов по имеющейся информации, при этом исключаются «нечеткие» вычисления, характерные для случая расчета

корреляционной функции по ограниченной реализации поля.

Входящая в выражение (22) величина СКО значений поля σ_h может рассчитываться с использованием любого известного в теории вероятностей способа [5].

Принципиально новым и практически важным приложением изложенного метода оценки интервала корреляции физического поля Земли является возможность его применения при работе с топографическими картами местности без их преобразования в цифровую или иную форму, для которых дискретное представление информации о высотах рельефа местности является естественным и отражается изолиниями (или горизонталями). Для получения максимально точной оценки интервала корреляции высот рельефа местности на заданном маршруте по топографической карте достаточно определить число пересечений линии рассматриваемого маршрута с горизонталями (или изолиниями) топографической карты и максимальную величину разброса высот рельефа местности по линии маршрута (максимальную и минимальную высоты). Если требуется определить интервал корреляции высот рельефа местности в поперечном направлении, например, в пределах зоны неопределенности пролегания маршрута, то указанные операции необходимо повторить по всем выбранным поперечным сечениям исследуемого района пролегания маршрута.

Практические приложения изложенного метода определения статистических характеристик рельефа местности по топографическим картам могут найти применение и при планировании боевых действий с применением различной техники и вооружения, а также при выполнении различных изыскательских, масштабных строительных и иных работ на местности. При этом наиболее целесообразным является использование топографических карт масштаба $M 1:200\ 000$, а при необходимости $M 1:100\ 000$ и более крупных масштабов.

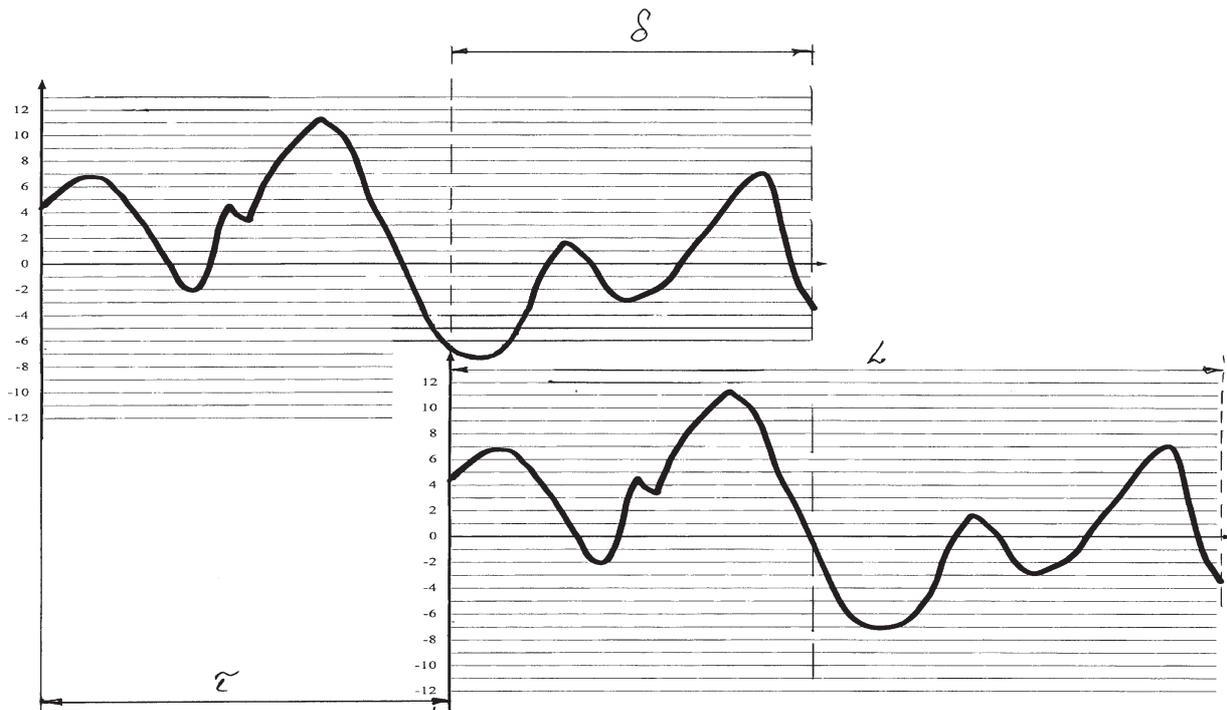


Рисунок 3 – Изменение доверительного интервала оценки коэффициента корреляции

Результаты применения указанного метода на практике показывают, что для его освоения пользователям потребуется совсем немного времени (не более 1-2 часов), а производительность будет характеризоваться 2-3 минутами (максимум) на один стандартный лист топографической карты одного из вышеназванных масштабов при точности получаемых оценок, характеризуемой предельными ошибками не более 10%¹.

Весьма удобным представляется использование изложенного метода оценки интервала корреляции при проведении графоаналитических исследований каких-либо циклических явлений, например, экономических, имеющаяся информация о которых может быть получена лишь в объеме единичных или нескольких циклов. При таком ограниченном объеме данных об исследуемом явлении традиционные методы оценки интервала корреляции путем определения корреляционной

функции² не могут применяться по принципиальным соображениям:

1. Объемы статистических данных для различных точек корреляционной функции могут значительно отличаться и, как следствие, доверительные интервалы для получаемых оценок будут различными: минимальный доверительный интервал оценки коэффициента корреляции будет иметь место для нулевой точки корреляционной функции (т.е. в ее максимуме). С удалением τ от нулевой точки корреляционной функции доверительный интервал для получаемых оценок интервала корреляции будет расти и может превышать величину самого оцениваемого параметра, в силу уменьшения перекрытия $\delta = (L - \tau)$ обрабатываемого участка реализации случайного процесса (рисунок 3).

2. Требуемая величина смещения реализации τ , на котором определяется текущий ко-

1 Для справки: один лист топографической карты масштаба М 1:100 000 отражает район местности порядка 120-160 км² в зависимости от географической широты исследуемого участка; соответственно М 1:200 000 – до 600 км².

2 Строго говоря, здесь и ранее говорится о формировании и обработке автокорреляционных функций исследуемого процесса, но в теории случайных процессов на этом обстоятельстве не всегда акцентируется внимание, поскольку для многих задач, как и для рассматриваемой в настоящей работе, оно не имеет принципиального значения.

эффицент корреляции при формировании корреляционной функции, может быть соизмерима с величиной L имеющейся реализации исследуемого процесса и статистический объем данных для таких точек будет исчезающе мал.

3. В силу проявления изложенных обстоятельств, небольшой объем статистический данных, содержащихся в обрабатываемой реализации исследуемого процесса протяженностью в несколько циклов (например, 1-3), при использовании традиционного подхода не позволяет получать достоверных оценок интервала корреляции исследуемого процесса.

Кроме того следует учитывать, что допустимость использования статистического подхода ограничивается требованием стационарности исследуемого случайного процесса. На практике выполнение этого требования, как правило, связывают с допущением о квазистационарности исследуемого процесса, а правомерность использования такого допущения обычно является обоснованной лишь для весьма ограниченных участков, протяженностью в единицы циклов или несколько интервалов корреляции. Интервал корреляции обычно используется в качестве статистической меры подобия или протяженности (длины) случайного процесса. Предложенный в настоящей работе подход к оценке интервала корреляции стационарного (квазистационарного) случайного процесса свободен от указанных недостатков и ограничений и

позволяет в полном объеме и «равнопрочно» использовать всю информацию об исследуемом процессе, содержащуюся в его доступной для исследователя реализации.

Таким образом, изложенный подход к оценке интервала корреляции по числу пересечений реализации исследуемого случайного процесса с множеством дискретных уровней (например, изолиний на топографической карте) обеспечивает получение робастных оценок интервала корреляции случайного процесса (в том числе и по реализациям «сильно» ограниченной «длины»), нечувствительных к виду корреляционной функции, измеримых на всем множестве корреляционных функций и однозначно отражающих с максимальной для данного объема статистической информации точностью статистические свойства исследуемых явлений. Трудоемкость изложенного метода весьма невелика, что обеспечивает возможность и простоту его практического применения при проведении графоаналитических исследований случайных процессов, независимо от природы исследуемых явлений. Использование данного метода предоставляет широкие возможности при решении различных задач, в частности, задач статистического анализа экономических систем и реализуемых ими процессов, их динамических и циклических свойств, свойств устойчивости и управляемости и т. д.

Список использованных источников

1. Баклицкий В.К. Корреляционно-экстремальные методы навигации и наведения. – Тверь: ТО «Книжный клуб», 2009.
2. Белоглазов И.Н., Джанджгава Г.И., Чигин Г.П. Основы навигации по геофизическим полям. – М.: Наука, 1985.
3. Волков В.Л. Измерительные информационные системы: Учебное пособие. – Арзамас: АПИ НГТУ, 2008.
4. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности / Пер. с сербск. и англ. – М., 1972.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. – Изд. 9-е. – М.: ЛКИ, 2007.
6. Методы и средства оперативного анализа случайных процессов: Учебное пособие / Автор/создатель: Пивоваров Ю.Н., Тарасов В.Н., Селищев Д.Н., 2004: <http://window.edu.ru/library/pdf2txt/436/19436/2648/page15>.

7. Письменный Д.Т. Курс лекций по высшей математике. – М.: «Айрис Пресс», 2005. – Часть 2.
8. Савельева Р.Ю. Высшая математика. Теория рядов // Математика. – 2013. – № 14.
9. Теория электрической связи: Учебное пособие / К.К.Васильев, В.А.Глушков, А.В.Дормидонтов, А.Г.Нестеренко; под общ. ред. К.К.Васильева. – Ульяновск: УлГТУ, 2008.
10. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970
11. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд. – М.: Радио и связь, 1982.
12. Тихонов В.И., Хищенко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. – М.: Наука, 1987.
13. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы. Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. – М.: Энергоатомиздат, 1985.