

А.А. Венедиктов, доктор экономических наук, профессор

Использование производственной функции Кобба-Дугласа в военно-экономических исследованиях

Рассматриваются условия применимости экономической модели, описываемой производственной функцией Кобба-Дугласа. Статья носит дискуссионный характер.

«Вот, извольте видеть, так называемая эвристическая машина, – сказал старичок. – Точный электронно-механический прибор для отвечания на любые вопросы, а именно – на научные и хозяйственные...»

*А. и Б. Стругацкие,
Сказка о тройке*

Введение

В современных экономических исследованиях достаточно широко применяется механизм производственных функций, которые представляют собой экономико-математическую зависимость между количеством производимой продукции и использованными при ее создании факторами производства¹. В общем виде такая функция f может быть записана следующим образом:

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1)$$

где Q – объем произведенной продукции;

x_i – различные виды ресурсов, затраты которых необходимы для производства данной продукции;

N – количество учитываемых в модели факторов производства.

Чаще других применяется производственная функция, предполагающая степенную зависимость объема производства от двух его факторов: капитала и труда (так называемая функция Кобба-Дугласа):

$$Q = A \cdot L^\alpha \cdot C^\beta, \quad (2)$$

где A – постоянный коэффициент;

L – затраты труда, обычно понимаемые как расходы на оплату труда по производству данной продукции;

α – коэффициент эластичности по труду;

C – понимаемые в широком смысле затраты капитала на производство продукции: расходы на сырье, энергию, транспорт и другие потребные ресурсы;

β – коэффициент эластичности по капиталу.

Отметим, что в системе Российского индекса научного цитирования обнаружилось около 2 тыс. статей из числа опубликованных в отечественных научных журналах в последние годы, обращающихся к функции Кобба-Дугласа.

Попытаемся выяснить экономическое содержание формулы (2).

Количество факторов в модели Кобба-Дугласа

Первым делом зададим следующий вопрос: почему столь широкое распространение получила именно двухфакторная модель. Ведь, во-первых, величины C и L очевидно не являются независимыми. Например, реальная производственная система для увеличения количества продукции требует увеличения обоих этих параметров. Зафиксировать один из них и попытаться в строгом соответствии с рассматриваемой моделью обеспечить нужный прирост производства исключительно за счет роста второго параметра – утопия (сколько не вкладывай труда, из 1 килограмма железной руды 2 килограмма чугуна не выплавить).

Во-вторых, интересно выяснить, чем объясняется деление всех затрат на следующие неравновеликие категории:

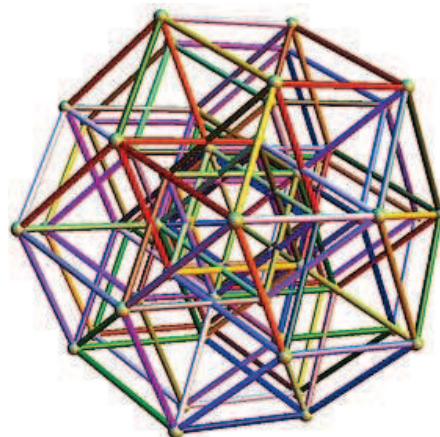
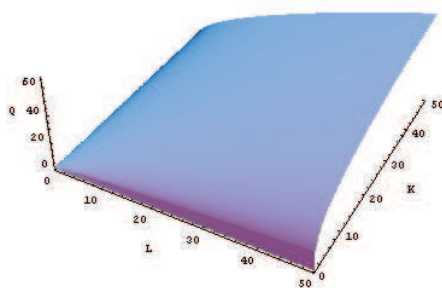
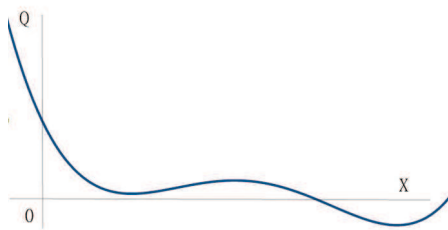
1 Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2011.

- труд;
- все остальное.

Почему фактор «труд» не объединить с «все остальное» и не получить более простую (и, как будет показано ниже, не менее адекватную) однопараметрическую модель, показывающую зависимость объема продукции от произведенных затрат?

За неимением лучшего объяснения можно предложить следующий вариант ответа на поставленный вопрос. Однофакторная модель слишком примитивна, понятна даже школьнику, вследствие чего выглядит не достойной внимания как обладателя ученой степени в сфере экономики, так и лица, стремящегося к ее получению. Многофакторная модель (1), учитывающая реально существующие основные факторы производства, напротив, слишком сложна для гуманитария-экономиста. Но почему же все-таки 2, а не, скажем, 3 параметра?

Попытаемся предложить версию ответа на этот вопрос, рассмотрев способы вербализации зависимостей, подобных формулам (1), (2). Однофакторная модель вида $Q=f(x)$ может быть визуализирована в виде обычного двумерного графика, знакомого большинству населения со школьной скамьи (рисунок 1а). Двухфакторную модель обычно можно представить как поверхность в привычном трехмерном пространстве (рисунок 1б). Данное представление требует наличия некоторого пространственного воображения (хоть и незначительно, но все-таки превосходящего средний уровень населения). Наконец, использование трех- и более факторных моделей делает их наглядное представление практически недостижимым для большинства граждан, полагающих, что соответствующие им четырех- и более мерные пространства встречаются, в основном, в научно-фантастических романах или в передачах Рен-ТВ (рисунок 1в).



а) Однопараметрическая функция – уровень «средний выпускник общеобразовательной школы»

б) Функция Кобба-Дугласа¹ – уровень «ученый-экономист»

в) Многопараметрическая функция (на рисунке – шестимерный куб)² – уровень «математик»

Рисунок 1 – Примерное соответствие количества факторов применяемой модели уровню использующего их лица

Сформулируем предположение: количество факторов в модели Кобба-Дугласа объясняется размерностью привычного нам пространства: $3-1=2$. Уменьшение числа 3, т.е. размерности трехмерного пространства, на

единицу необходимо здесь в связи с тем, что одна из трех координатных осей должна быть задействована для отображения значения функции Q . Отсюда следует вывод (также предположительный): любая модель, разрабо-

1 Рисунок с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Кобба_–_Дугласа.

2 Рисунок с сайта <https://en.wikipedia.org/wiki/6-cube>.

тываемая не-математиками и предназначенная для понимания (и признания) широким экономическим сообществом, обречена иметь не более двух факторов.

Почему же деление произведено именно на «труд и все остальное», а, например, не на «сырье и все остальное» или «налоги и все остальное»? Возможно, учитывая, что модель Кобба-Дугласа появилась в начале XX века, не обошлось без влияния модного тогда марксизма, выделяющего труд в особую экономическую категорию.

Экономическая интерпретация параметров модели Кобба-Дугласа

Перейдем к выяснению экономического содержания коэффициентов эластичности α и β из формулы (2). Начнем со словарного определения: «Эластичность (от греч. *elastos* – гибкий) – мера изменения одного показателя по отношению к изменению другого, от которого зависит первый»¹. Из данного определения вытекает:

а) употреблять термин «коэффициент эластичности» можно лишь в том случае, когда **доказано**, что между значениями двух показателей имеется взаимосвязь определенного вида (линейная, степенная и пр.). В этом случае упомянутый коэффициент играет роль параметра соответствующей зависимости (коэффициента пропорциональности в линейной производственной функции, показателя степени в функции Кобба-Дугласа и т. д.);

б) коэффициент эластичности должен представлять собой константу, ибо если предположить, что он является переменной (функцией), то установленная в интересах предыдущего пункта линейная, степенная или иная зависимость перестает быть таковой. Например, если в линейной производственной функции

$$Q = a \cdot x + b \quad (3)$$

допустить зависимость коэффициента a от x , то функция (3) не будет линейной по определению. Тем самым все достижения в части уста-

новления вида зависимости, сделанные нами в интересах выполнения предыдущего пункта, будут утрачены. При невыполнении требования «а» изучать, выполняется ли требование «б», лишено какого-либо практического смысла.

Посмотрим, выполнены ли сформулированные требования для функции (2). Требование «а» очевидно не выполняется, поскольку ни для одного экономического явления (в частности, для описания зависимости объема произведенной продукции от труда и капитала) не доказано существование именно степенной зависимости. Из истории экономических учений известно, что однажды предложенная К. Викселлем функция была применена Ч. Коббом и П. Дугласом в труде 1928 года «Теория производства»² [1]. В этой статье была предпринята попытка эмпирическим путем установить влияние затрачиваемых капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США в 1899-1922 гг. Авторам удалось неплохо аппроксимировать соотношение объемов производства и затраченных при этом труда и капитала следующей функцией:

$$Q = 1,01 \cdot L^{\frac{3}{4}} \cdot C^{\frac{1}{4}} \quad (4)$$

Однако необходимо отметить следующее:

1. В публикации 1928 года самые «свежие» анализируемые данные имели шестилетнюю давность. Можно предполагать, что проблема была связана с недоступностью соответствующих сведений за более поздний период, длительными сроками опубликования статьи и прочими объективными причинами. Однако даже в этом случае вызывает многозначительный интерес отсутствие более поздних публикаций, подтверждающих применимость полученной авторами функции для периода после 1922 года.

2. Успешный подбор методом наименьших квадратов коэффициентов аппроксимирующей функции никоим образом не свидетель-

1 Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Указ. соч.

2 Отметим, что в оригинальном названии статьи («A Theory of Production») употреблен неопределенный артикль «а».

ствуется о том, что зависимость вида (2) является наилучшей. Например, для однопараметрической модели аппроксимация многочленом 23-й степени дала бы **полное совпадение модели с исходными данными**, но в равной степени не свидетельствовала бы о научной обоснованности полученной функциональной зависимости и ее адекватности реальным экономическим процессам.

3. Нет никаких оснований полагать, что именно затраты труда и капитала определяют объемы производства. С не меньшим успехом можно предположить, что обусловленные экономической ситуацией объемы производства определяют величину производимых затрат труда и капитала.

Таким образом, приведенное выше требование «а», касающееся необходимости наличия между анализируемыми параметрами доказанной зависимости соответствующего вида (в данном случае – степенной), для функции Кобба-Дугласа не выполнено.

Как уже отмечалось, при невыполнении требования «а» нет смысла разбираться, выполняется ли при этом требование «б». Тем не менее, можно утверждать, что и требование «б» в данном случае не выполняется, поскольку так называемые коэффициенты эластичности рассчитываются не на основе глубокого изучения моделируемых экономических процессов, а лишь путем формального применения метода наименьших квадратов (или иного подобного метода) для определения параметров аппроксимирующей функции, исходя из недоказанного предположения, что данная функция имеет вид (2).

Следовательно, значения коэффициентов α и β зависят хотя бы от одной из величин L , C или Q (фактически, от всех трех), т. е. не являются константами. Из этого вытекает, что радость от близости результатов расчета по формуле (4) к реальным экономическим показателям обрабатывающей промышленности США за 1899-1922 гг. сродни восторгу от сбывшегося глубокомысленного предска-

ния того, что атомная бомба попадет точно в эпицентр будущего ядерного взрыва.

Противоречивость модели Кобба-Дугласа

Докажем нашу гипотезу об отсутствии разумной экономической интерпретации для коэффициентов модели Кобба-Дугласа более строго. Доказательство проведем «от противного», т. е. вначале предположим, что такая интерпретация существует.

Рассмотрим следующий пример: имеются два предприятия, работающих в одной отрасли экономики, применяющие одинаковые технологии, систему оплаты труда, инвестиционную политику и пр. Для простоты можно даже считать, что это не самостоятельные предприятия, а два однотипных подразделения одной компании.

Предположим, что коэффициенты модели (2) представляют собой не просто результат арифметических манипуляций с исходными данными о фактических объемах производства и затратах труда и капитала в определенный период, а в какой-то степени отражают условия производства, общую экономическую ситуацию, уровень развития технологий, корпоративные политики... Короче, предположим, что они хоть что-то отражают, т. е. имеют некую разумную экономическую (а не только арифметическую) интерпретацию. Тогда логично предположить, что модели Кобба-Дугласа применительно к рассматриваемым субъектам производства будут иметь совпадающие коэффициенты A , α и β .

Рассмотрим две тройки значений, удовлетворяющих равенству (2): (Q_1, L_1, C_1) и (Q_2, L_2, C_2) . Здесь первая тройка соответствует первому рассматриваемому субъекту, вторая тройка – второму. Подставив данные значения в формулу (2), получим:

$$\begin{aligned} Q_1 &= A \cdot L_1^\alpha \cdot C_1^\beta; \\ Q_2 &= A \cdot L_2^\alpha \cdot C_2^\beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее рассмотрим совокупность этих субъектов производства¹. Очевидно, что сово-

1 Для подразделений одной компании это сделать совсем просто. Но и для двух независимых пред-

купные затраты труда и капитала будут равны соответственно L_1+L_2 и C_1+C_2 , а совокупный объем производства Q_1+Q_2 . Тогда логично предположить, что выполняется равенство:

$$Q_1+Q_2=A \cdot L_1^\alpha \cdot C_1^\beta + A \cdot L_2^\alpha \cdot C_2^\beta = A \cdot (L_1+L_2)^\alpha \cdot (C_1+C_2)^\beta. \quad (6)$$

Положим $\alpha=\beta=0,5$. Тогда равенство (6) запишется в виде:¹

$$A \cdot L_1^{\frac{1}{2}} \cdot C_1^{\frac{1}{2}} + A \cdot L_2^{\frac{1}{2}} \cdot C_2^{\frac{1}{2}} = A \cdot (L_1+L_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (C_1+C_2)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Произведем ряд элементарных арифметических преобразований равенства (7):

$$\begin{aligned} \sqrt{L_1 \cdot C_1} + \sqrt{L_2 \cdot C_2} &= \sqrt{(L_1+L_2)(C_1+C_2)}; \\ L_1 C_1 + 2\sqrt{L_1 C_1 L_2 C_2} + L_2 C_2 &= \\ &= L_1 C_1 + L_1 C_2 + L_2 C_1 + L_2 C_2; \\ 4 \cdot L_1 C_1 L_2 C_2 &= (L_1 C_2)^2 + 2 \cdot L_1 C_2 L_2 C_1 + (L_2 C_1)^2; \\ (L_1 C_2 - L_2 C_1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для рассматриваемого примера вытекающее из соображений здравого смысла равенство (6) выполняется лишь при следующем условии:

$$\frac{L_1}{C_1} = \frac{L_2}{C_2}. \quad (8)$$

Легко видеть, что формула (6) справедлива при условии (8) и для других значений коэффициентов α и β , если только они связаны следующим более общим соотношением:

$$\alpha + \beta = 1. \quad (9)$$

Отметим, что использующие функцию Кобба-Дугласа специалисты обычно не оговаривают, что при ее применении должна выполняться пропорция (8). Наоборот, как правило, дела-

ется необоснованное предположение об универсальности соответствующей модели, которая, как было показано выше, в этом общем случае противоречит здравому смыслу.

Предположим однако, что некий исследователь наложил ограничения (8) и (9), т.е., например, оговорил, что сумма коэффициентов α и β должна быть равна единице, а затраты труда и капитала – связаны отношением:

$$\frac{L}{C} = R = \text{const}. \quad (10)$$

В этом случае формула (2) примет вид:

$$Q = A \cdot (RC)^\alpha \cdot C^\beta = B \cdot C^{\alpha+\beta} = B \cdot C, \quad (11)$$

где $B = A \cdot R^\alpha$ – константа.

Таким образом, при условии наложения вытекающих из соображений здравого смысла ограничений (8) и (9) зависимость (2) становится частным случаем линейной однопараметрической модели (3) и фактически перестает быть «моделью Кобба-Дугласа».

Следующий вопрос, на который нам предстоит ответить в поисках экономического содержания параметров формулы (2): какова же размерность выражения

$$L^\alpha \cdot C^\beta? \quad (12)$$

Параметры L и C , очевидно, имеют размерность денежной единицы. Тогда если в общем случае, т.е. без наложения ограничения (9), $\alpha + \beta \neq 1$, то размерность выражения (12) воспаряет за пределы здравого смысла на безграничный простор фантазий.

Если мы пожелаем удержать в границах разумного размерность величины Q , то единственной возможностью достигнуть этого будет для нас использование коэффициента A , которому мы должны будем присвоить абсурдную с экономической точки зрения размерность, «зеркальную» абсурдной размерности величины (12). Например, если Q , L и C имеют размерность «рубли», $\alpha=0,5$, $\beta=0,6$, то коэффициент A должен иметь размерность:

$$\text{рубли}^{-\frac{1}{10}}.$$

Установить экономическое содержание величины с такой размерностью не представ-

приятый проблемы с рассмотрением их в совокупности нет. Ведь никто не утверждает, что модель Кобба-Дугласа применима только к подразделениям организации, или только к хозяйствующему субъекту в целом, или к отрасли экономики, или к экономике всей страны. Она универсальна, по мнению ее приверженцев.

1 Чтобы опровергнуть справедливость какой-либо формульной зависимости достаточно привести один контрпример. Если формула окажется бессмысленной для значений $\alpha=\beta=0,5$, то, очевидно, для общего вида коэффициентов эластичности смысла в ней будет никак не больше, чем для частного случая.

ляется возможным. Остается, разве что, объявить A «коэффициентом эластичности объема произведенной продукции по значению выражения (12)» в надежде на то, что «умный промолчит».

Выводы

1. Основные параметры модели объема производства (2), т. е. затраты труда L и затраты капитала C , не имеют экономического обоснования ни в части их количества, ни в части выбора именно этих факторов, а также не являются взаимонезависимыми.

2. Параметры A , α и β функции Кобба-Дугласа не позволяют выявить их экономический смысл в формуле (2) и, строго говоря, не являются константами.

3. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет право на использование в экономических исследованиях лишь в том случае, если в ходе обоснования ее применимости будет *доказано* наличие степенной зависимости между соответствующими экономическими показателями. Однако представляется, что в этом случае не вполне корректно будет говорить о «функции Кобба-Дугласа», поскольку, несомненно, обоснованная функциональная зависимость получит имя ученого, сумевшего доказать ее адекватность применительно к исследованию некоего экономического процесса.

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть, что, по мнению автора, данная статья носит дискуссионный характер. Предположим на минуту, что приведенные здесь аргументы ошибочны, а правы те сотни эконо-

мистов, которые некритически применяют модель Кобба-Дугласа по самым разным поводам. Тогда, прежде всего, следует допустить, что ее применимость не исчерпывается прогнозированием объема произведенной продукции, она может использоваться для «ответания» практически на любые вопросы (научные и хозяйственные). Данное мнение основано на том, что адекватность соответствующей модели в равной степени не доказана как применительно к моделированию объемов промышленного производства, так и к другим областям исследования.

Единственной проблемой в этом случае является, на наш взгляд, вопрос выбора именно функции Кобба-Дугласа из большого числа иных достижений современной нумерологии. Так, в последнее время появился ряд работ, «обосновывающих» целесообразность разделения всего на свете (ресурсов, продукции, фонда оплаты труда, налогов и пр.) в пропорции так называемого золотого сечения, деления также всего на свете на три части (приверженцы тринитаризма) и масса иных псевдонаучных предложений лиц, «не мыслящих себя вне научно-технического прогресса».

Если будет доказана несостоятельность изложенного здесь взгляда на условия применимости модели Кобба-Дугласа в экономических исследованиях, то в обмен на признание своей неправоты мы получим тот самый универсальный точный прибор для ответания на любые вопросы, над созданием которого бились лучшие умы, начиная с пенсионера-изобретателя Э.З. Машкина из упомянутого в эпиграфе художественного произведения.

Список использованных источников

1. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – Vol. 18. – № 1. – P. 139-165.