

Д.В. Зайцев, кандидат технических наук,
доцент

Д.Ю. Сосков, кандидат технических наук,
доцент

В.Е. Салов

Принципы построения математических моделей боя в условиях военных конфликтов низкой интенсивности

Проведено обоснование применения теории сетей массового обслуживания для моделирования боя в условиях военных конфликтов низкой интенсивности. Представлен метод «волны вероятности», позволяющий получать оценки распределения вероятностей потерь противоборствующих сторон на момент окончания боевых действий. Полученные результаты представляют интерес для проведения оценок боевой эффективности.

Современный этап развития цивилизации ознаменовался ростом большого числа военных конфликтов, в которых широкое применение находят новые виды оружия – беспилотные летательные аппараты, роботизированные системы военного назначения, кинетическое оружие, в ближайшее время ожидается активное использование различных образцов оружия на новых физических принципах, в первую очередь, лазерного и радиочастотного. Ввиду этого все большую актуальность приобретают математические модели и программно-моделирующие комплексы, с помощью которых возможно получить оценки эффективности новых видов оружия, спрогнозировать исход боя, апробировать новые технологии организации и ведения боевых действий.

Целью данной работы является обоснование выбора математического аппарата, в наибольшей степени подходящего для описания военного конфликта низкой интенсивности (боевые действия тактического уровня отделение-взвод) [1], а также демонстрация его возможности на ряде модельных примеров.

Проблемные вопросы математического моделирования боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности

Следует отметить, что моделированию боевых действий малочисленных подразделений в настоящее время уделяется недостаточно внимания. Это можно, в частности, объяснить следующим.

Хорошо известным и зарекомендовавшим себя требованием к обеспечению выполнения боевой задачи воинским подразделением является трех-пяти кратный перевес в численности личного состава или огневой мощи над противником. Если же по каким-либо причинам воинское подразделение не может выполнить поставленную перед ним боевую задачу, то, как правило, ему оказывается помощь в виде ударов артиллерии или налетов авиации по позициям противника.

Поэтому может показаться, что разработка математических моделей боя в условиях конфликтов низкой интенсивности неактуальна. Однако обосновать критерии эффективности применения перспективных видов оружия и получить соответствующие оценки возможно только с помощью математического моделирования.

При разработке математических моделей боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности необходимо учитывать их характерные особенности.

Формальной особенностью военного конфликта низкой интенсивности является относительно небольшая численность участвующих в нем воинских подразделений. Но если посмотреть на процесс боевых действий как на частный случай более общей задачи – экологической модели «хищник-жертва» – то в данной предметной области имеет место проблема слабой предсказуемости результатов моделирования, что стимулирует исследователей на разработку различных подходов и модификаций известных математических моделей [2]. Поэтому **первой проблемой** математического моделирования военного конфликта низкой интенсивности является слабая предсказуемость имитационных и аналитических моделей.

Е.С. Вентцель в своей книге [3] обозначает проблему разработки адекватных моделей боевых действий малочисленных подразделений (порядка нескольких десятков), заключающуюся в сложности расчетных алгоритмов и накоплении ошибок.

В работе [2] высказывается утверждение, что слабая предсказуемость моделей, описывающих конкуренцию малочисленных подсистем, обусловлена большой вариацией результатов моделирования из-за их большой дисперсии.

Провести грубую оценку дисперсии среднего числа потерь стороны, участвующей в конфликте низкой интенсивности, можно с помощью предельной теоремы теории массового обслуживания [4, 5], согласно которой сумма свыше четырех-пяти независимых, ординарных и ограниченных потоков событий (в данном случае потоков прицельных выстрелов, приводящих к поражению целей) близка к простейшему потоку, который является марковским случайным процессом. Тогда в первом приближении распределение вероятностей потерь боевых единиц противоборствующих сторон за время боя можно аппроксимировать статистикой Пуассона, отличительной особенностью которой является то, что дисперсия равна среднему значению. Отсюда следует, что для боевых действий воинских подразделений численностью 10–30 боевых единиц отклонение от среднего значения сопоставимо со средним значением² и для исследования боевых действий в конфликтах низкой интенсивности следует использовать математический аппарат, позволяющий оценивать распределение вероятностей потерь сторон.

Зная распределение вероятностей потерь сторон, можно легко найти любой показатель эффективности боевых действий – математические ожидания потерь сторон, дисперсию и среднеквадратические отклонения потерь, вероятность выполнения боевой задачи при ограничениях на потери своих сил и средств, вероятность нанесения противнику потерь не ниже заданного уровня и т.п.

Вторая проблема математического моделирования боевых действий в условиях военного конфликта низкой интенсивности, которую стараются не афишировать подавляющее большинство разработчиков моделей, заключается в следующем. Очевидно, что процессы, протекающие в ходе боевых столкновений, являются случайными, но ответ на вопрос: «А применим ли, в принципе, аппарат теории вероятностей для моделирования военного конфликта?» совсем не очевиден.

Например, согласно [6, стр. 118]: «Имеет смысл говорить о вероятности попадания в цель заданных размеров, с заданного расстояния из винтовки известного образца стрелком, вызванным наудачу из определенного воинского подразделения. Однако было бы бессмысленным говорить о попадании в цель вообще, если об условиях стрельбы ничего не известно».

2 Отметим, что для физических систем, для которых случайными отклонениями от средних значений (координат, импульсов, энергий и т.п.) пренебречь нельзя, потребовалось разработать принципиально иной физический аппарат – квантовую механику.

Применительно к моделированию боевых действий ситуация осложняется еще и следующим.

С одной стороны, теория вероятностей использует три определения вероятности – *классическое, статистическое и аксиоматическое*.

Согласно *классическому* определению вероятность равна отношению числа исходов, «благоприятствующих» данному событию, к общему числу «равновозможных» исходов, например, [4].

Согласно *статистическому* определению вероятность равна отношению числа исходов, «благоприятствующих» данному событию, к общему числу «равновозможных» исходов при одновременном испытании ансамбля тождественных систем-источников рассматриваемого события, например, [4].

Согласно *аксиоматическому* определению вероятность есть функция, заданная на множестве возможных состояний, например, [6].

С другой стороны, исход боевых действий является уникальным событием, которое может протекать только один раз. Тогда с точки зрения и классического, и статистического, и аксиоматического определения вероятности ответ на вопрос о правомерности применении теории вероятностей для описания боевых действий требует серьезного обоснования.

Третьим проблемным вопросом является отсутствие единого математического аппарата, на основе которого следует разрабатывать модели боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности.

На сегодняшний день имеется большое количество работ, посвященных математическому моделированию боевых действий. Отметим три работы отечественных авторов [3, 7, 8], из которых возможно получить в достаточной степени полное представление о классификациях и принципах построения моделей боевых действий, а также найти минимально необходимые обзоры литературы на момент их опубликования.

В работе [3] представлены основные понятия и методологические принципы математического моделирования боевых действий.

В учебном пособии [7] изложено содержание теоретических вопросов математического моделирования на примерах боевых действий войск противовоздушной обороны и рассматривается весь процесс моделирования, начиная от постановки задачи и до получения готового программного продукта.

В статье [8] приводится обзор по напечатанным в открытых источниках математическим моделям боевых действий, включая описательные, имитационные, оптимизационные и теоретико-игровые модели, обсуждается иерархический подход к моделированию. Статья [8] содержит около 200 ссылок на работы, посвященные математическому моделированию боевых действий.

Наличие большого числа методов и моделей боевых действий отчасти может быть объяснено сложностью решаемых задач. Использование стандартных методов для расчета вероятностей состояний таких систем имеет ряд недостатков (сложность расчетных алгоритмов и накопление ошибок). Применение метода динамики средних ограничено тем, что из-за относительно небольшого числа возможных состояний исследуемой системы имеет место слабая корреляция оценок и наблюдаемых величин. Фактически, процесс боевых действий представляет собой сложную систему. Одно из определений сложной системы звучит так: «Сложная система – это система, детальное описание которой недостижимо» [9, стр. 7]. Поэтому получение количественных оценок результатов моделирования функционирования таких сложных систем представляет собой серьезную проблему.

Четвертая проблема, которая является следствием первых трех, это проблема адекватности разработанных моделей боевых действий.

В настоящее время методов проверки, гарантирующих полную адекватность полученной модели реальному процессу, нет. Существуют лишь методы, которые позволяют выявить неадекватность моделей в той или иной степени. К таким методам можно отнести следующие [7, стр. 38]: 1) сравнение итогов боевых действий с результатами, получаемыми на модели для тех же условий (тестирование модели); 2) сравнение получаемых результатов с данными, полученными на апробированных моделях; 3) проверка модели на наборах параметров, для которых результат боевых действий известен заранее; 4) верификация модели, заключающаяся в анализе степени отображения в модели основных элементов и процессов боевых действий, корректности сделанных допущений, принятых гипотез, использованных аппроксимаций; 5) проверка достоверности исходных данных, размерности и масштабирования параметров в уравнениях модели; 6) проверка корректности модели при вырождении условий моделирования; 7) метод обратного перехода, заключающийся в возврате от конечных функциональных соотношений модели к принятым исходным гипотезам и особенностям реального процесса. Если такой переход оказывается возможным, то он свидетельствует об адекватности модели реальному процессу с точностью принятых гипотез.

По сравнению с моделированием боевых действий в физике как прикладной науке, описывающей явления Природы, вторая и третья проблемы, отмеченные выше, не являются проблемами.

Действительно, например, в основе электродинамики лежит система уравнений Максвелла, механику можно изложить на основе уравнения Гамильтона-Якоби, в основе квантовой механики лежит уравнение Шредингера и т.д. (в основе любой области физики лежит соответствующий математический аппарат, подтвержденный практикой).

То, что в первую очередь, статистическая физика и квантовая механика используют развитый аппарат теории вероятностей, ни у кого не вызывает никаких сомнений и возражений.

Соответственно, четвертая проблема, отмеченная выше – проблема адекватности в физике – является не проблемой, а необходимым элементом проверки вновь разрабатываемых теорий.

Получается, что в отличие от физики, моделирование боевых действий представляет собой совокупность моделей, не прошедших проверку на адекватность по известным результатам военных конфликтов. Что, безусловно, является недостатком военной науки и практики.

Ввиду вышесказанного представляется оправданным осуществить попытку разработки теоретических основ моделирования боевых действий, которые смогли бы «взять на себя» обоснование правомерности использования аппарата теории вероятностей и проблему проверки адекватности разрабатываемых моделей.

Обоснование выбора аппарата теории сетей массового обслуживания для моделирования военных конфликтов низкой интенсивности

В настоящее время математическим аппаратом, позволяющим рассчитывать распределение вероятностей состояний сложной макросистемы, является теория сетей массового обслуживания, базирующаяся на теории марковских процессов [3, 7, 10].

По мнению В.А. Ивницкого [10], роль фундамента, на котором можно строить различные математические модели макросистем (разновидностью которых являются боевые действия в условиях военных конфликтов низкой интенсивности), может играть теория марковских процессов.

Важное место марковских процессов и их многочисленные применения в разнообразных прикладных исследованиях объясняется тем обстоятельством, что для них «будущее» не зависит от «прошлого» при известном «настоящем». Это исключительное обстоятельство позволяет получать систему дифференциальных уравнений для функций переходных вероятностей, описывающих эволюцию исследуемой системы. Для ее решения можно использовать развитый аппарат теории дифференциальных уравнений. Тем самым осуществляется возможность получения как точных, когда это возможно, так и приближенных методов, в том числе численных, имитационного моделирования и т.п. [10].

Фундаментальная роль марковских процессов заключается в том, что практически функционирование любой сложной системы массового обслуживания можно достаточно адекватно описать соответствующим образом подобранным графом. Следовательно, существует принципиальная возможность составления соответствующих систем дифференциальных уравнений и их решения на базе современных методов [10].

Однако многие разработчики моделей боевых действий не разделяют такую точку зрения, аргументируя свою позицию тем, что на сегодняшний день отсутствует обоснование уникальности аппарата теории марковских процессов. Кроме того, модели боевых действий на ее основе, как правило, не содержат в явном виде координат моделируемых объектов, что, по мнению «скептиков» вызывает серьезные сомнения по поводу их адекватности.

В последнее время стали появляться работы [11-14], в которых показана возможность перенесения на социально-экономические системы физических понятий. Справедливость такого переноса можно показать таким образом.

Следуя известной работе (например, [15] с.с. 71-74), в которой показано, что из уравнения Шредингера путем подстановки в нее волновой функции квазиклассической частицы можно получить классическое уравнение Гамильтона-Якоби и уравнение непрерывности для плотности вероятности p нахождения частицы в том или ином месте:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div} v p - v \operatorname{grad} p .$$

На этом анализ взаимосвязи квантовой механики с классической физикой в работе [15] заканчивается. Но если квазиклассическая частица обладает набором дискретных состояний S_i , то в этом случае легко показать [16], что уравнение непрерывности трансформируется в известную в теории марковских процессов систему уравнений Колмогорова:

$$\frac{d P_i}{d t} = -\mu_i P_i + \mu_{i-1} P_{i-1} ,$$

описывающую изменения вероятностей P_i нахождения частицы в состояниях S_i (i – интенсивность перехода частицы из состояния S_i). Тем самым перенос физических идей на макросистемы представляется вполне корректным.

Применительно к описанию динамики квазиклассической системы это означает, что детерминированные параметры (траектория) квазиклассической системы описываются классическим уравнением Гамильтона-Якоби, которое справедливо с точностью до величины первого порядка по постоянной Планка включительно. А флуктуационные параметры, учитывающие отклонение от классической траектории движения, описываются уравнением непрерывности для вероятности нахождения рассматриваемой частицы в окрестности конкретной точки пространства.

Применительно к моделированию боевых действий в военных конфликтах низкой интенсивности это означает следующее: в наибольшей степени приемлемая модель боевых действий должна содержать как блок, описывающий динамику передвижения войскового подразделения

как детерминированной системы, так и блок, описывающий изменения вероятностей численности войскового подразделения на основе теории сетей массового обслуживания.

Отметим также, что перенос физических принципов на макросистему «боевые действия» позволяет обосновать правомерность применения теории вероятностей при их моделировании, перенося проблему обоснования использования аппарата теории вероятностей на квантовую механику, где существуют свои подходы к решению данной проблемы, например, [17].

Таким образом, боевые действия в ходе военного конфликта низкой интенсивности можно корректно описать в рамках теории сетей массового обслуживания.

Моделирование боевых действий в условиях военного конфликта низкой интенсивности с использованием аппарата теории сетей массового обслуживания

Формализация военного конфликта в рамках теории массового обслуживания требует построения графа модели, имеющего предельные поглощающие состояния (вероятность выхода из такого состояния равна нулю), отвечающие окончанию боевых действий. Использование стандартных методов для расчета вероятностей предельных состояний таких сложных систем имеет ряд недостатков (высокая временная сложность расчетных алгоритмов и накопление ошибок) [3]. Поэтому возникает насущная потребность в разработке новых математических методов для расчета вероятностей предельных состояний сложных систем, описывающих военный конфликт низкой интенсивности.

Метод «волны вероятности».

Рассмотрим военный конфликт противоборствующих сторон $A=\{1,\dots,i,\dots,N_A^0\}$ и $B=\{1,\dots,j,\dots,N_B^0\}$, которые до начала боя включают в свой состав N_A^0 и N_B^0 боевых единиц соответственно. Каждая сторона формирует потоки выстрелов в направлении друг друга, $\sum_i q_i \mu_i$, $\sum_j p_j \nu_j$ – потоки выстрелов сторон A и B (суммирование ведется по боеспособным боевым единицам), μ_i , ν_j и q_i , p_j – скорострельности оружия и вероятности поражения противника i -й боевой единицы стороны A и j -й боевой единицы стороны B соответственно. Одним выстрелом уничтожается не более одной боевой единицы противника.

Бой описывается графом дискретных состояний и непрерывного времени (рисунок 1).

Начальному моменту времени боя соответствует состояние S_{00} графа, которое является исходным $P_{00}(0)=1$. Для других состояний S_{ij} индексы i и j обозначают численности потерь боевых единиц стороны A и B соответственно: $i=0, N_A^0$, $j=0, N_B^0$, $P_{ij}(0)=0$.

Идея метода «волны вероятности», изложенного в работе [18], заключается в том, что расчет вероятностей предельных состояний графа на рисунке 1 аналогичен расчету волнового фронта волны на основе принципа Гюйгенса-Френеля для расчета дифракции оптического излучения, т.е. для расчета вероятности P_{ij} необходимо просуммировать вероятности переходов $p_{i-1,j}$ и $(1-p_{i,j-1})$ из соседних состояний $S_{i-1,j}$ и $S_{i,j-1}$ с соответствующими весами $P_{i-1,j}$ и $P_{i,j-1}$:

$$P_{ij} = p^{i-1j} P_{i-1j} + (1 - p^{ij-1}) P_{ij-1} . \tag{1}$$

Вероятности переходов p_{ij} могут быть рассчитаны по следующей формуле:

$$p_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{N_B^0-j} p_l \nu_l}{\sum_{k=1}^{N_A^0-i} q_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_B^0-j} p_l \nu_l} .$$

Применение метода «волны вероятности» требует четкого описания сценариев для каждой из сторон, строго устанавливающих последовательность ведения огня по боевым единицам противника.

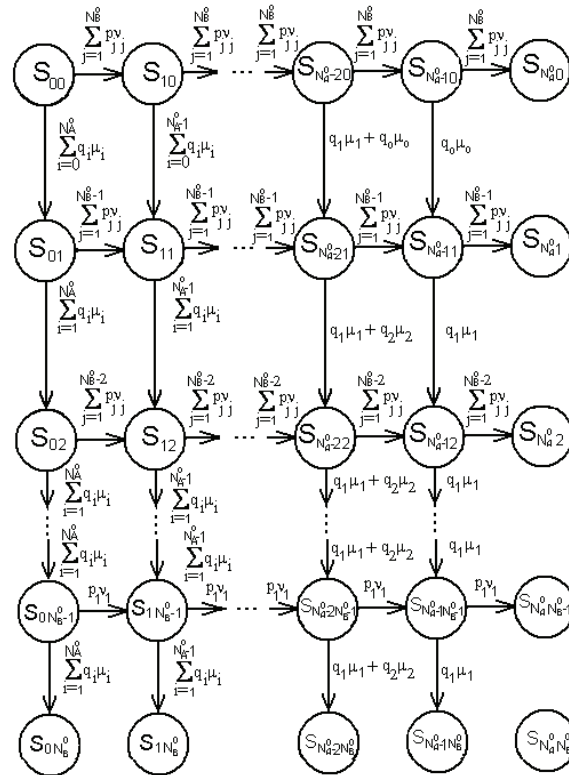


Рисунок 1 – Граф модели боевых действий в условиях военного конфликта низкой интенсивности (дискретные состояния и непрерывное время)

Если предположить, что боевые действия ведутся организованным образом, когда противоборствующие стороны стремятся в первую очередь уничтожить приоритетные цели, например, головную и замыкающую машины колонны, гранатометчиков, пулеметчиков и т. п., тогда конечные распределения потерь наполняются конкретным содержанием. Например, конечное состояние $S_{1N_b^0}$ соответствует ситуации, когда все боевые единицы стороны **B** уничтожены, при этом сторона **A** потеряла первую приоритетную боевую единицу. состояние $S_{2N_b^0}$ соответствует уничтожению всех боевых единиц стороны **B**, при этом сторона **A** потеряла первую и вторую приоритетные боевые единицы. Аналогичным образом – для остальных конечных состояния графа.

Учет нестационарности хода боя, то есть изменения параметров боевых единиц в ходе конфликта, также возможно осуществить в рамках рассматриваемой модели боя. Заметим, что переходы между состояниями определяются интенсивностями потоков прицельных выстрелов противоборствующих сторон, единицей измерения которых являются $[c^{-1}]$. То есть граф модели боя (рисунок 1) фактически содержит шкалу времени. Тогда имеется принципиальная возможность каждому состоянию графа поставить в соответствие конкретный момент времени хода боевых действий и оценивать количество, расположение и боеспособность боевых единиц сторон на этот момент времени. А затем в данном графе между каждыми соседними состояниями записывать суммарную интенсивность потоков выстрелов боеспособных единиц сторон, исходя из полученной оценки расположения боевых единиц сторон на данный момент времени боя.

Примеры моделирования боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности на основе метода «волны вероятности»

Рассмотрим примеры практического применения метода «волны вероятности».

Пример 1. Модель встречного танкового боя.

Сторона **A**: $N_{A0}=10$ для $i \in [1,10]$, $q_i=0,5$, $\mu_i=0,1$ выстр/с.

Сторона **B**: $N_{B0}=10$ для $j \in [1,10]$, $p_j=0,5$, $\nu_j=0,1$ выстр/с.

Распределения вероятностей потерь боевых единиц противоборствующих сторон, полученные на основе метода «волны вероятности», приведены на рисунке 2а.

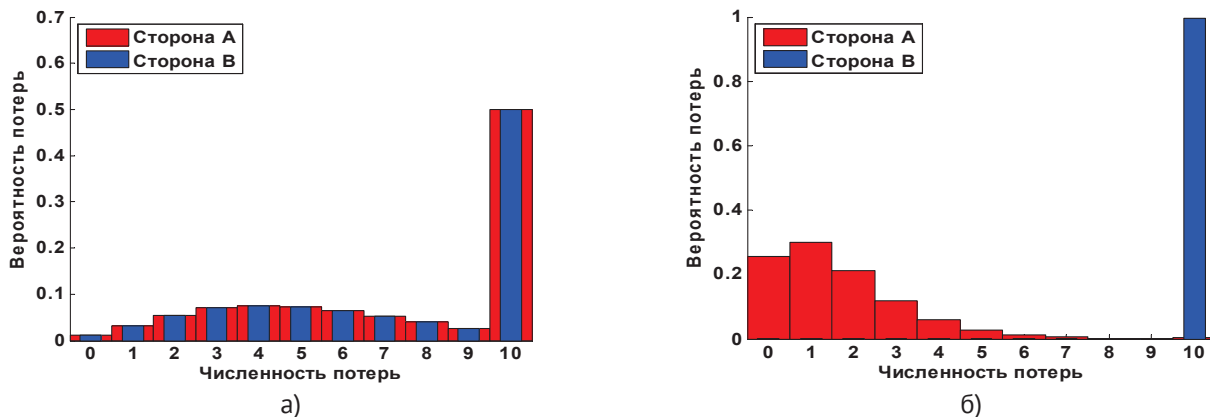


Рисунок 2 – Распределения вероятностей потерь боевых единиц противоборствующих сторон, полученные на основе метода «волны вероятности»

Анализ распределения вероятностей потерь на рисунке 2а показывает, что в условиях равенства боевых потенциалов для каждой стороны имеется возможность либо с вероятностью 0,5 потерять все боевые единицы, либо с вероятностью 0,5 уничтожить все боевые единицы противника, при этом сторона, одержавшая победу, потеряет в среднем 7,2 боевых единиц, а вероятность того, что потери победителя не превысят, например 30%, составит 0,2.

Пример 2. Модель встречного танкового боя.

Сторона **A**: $N_{A0}=10$ для $i \in [1,10]$, $q_i=0,8$, $\mu_i=0,1$ выстр/с.

Сторона **B**: $N_{B0}=10$ для $j \in [1,10]$, $p_j=0,2$, $\nu_j=0,1$ выстр/с.

Отличие от примера 2 состоит в том, что боевые единицы стороны **A** поражают цели противника с вероятностью 0,8 (например, вследствие лучшей подготовки), а стороны **B** – с вероятностью 0,2 (например, вследствие воздействия фактора нетрадиционного оружия).

Распределения вероятностей потерь боевых единиц противоборствующих сторон, полученные на основе метода «волны вероятности», приведены на рисунке 2б. Анализ распределения вероятностей потерь показывает: сторона **B** с вероятностью 0,996 потеряет все свои боевые единицы, математическое ожидание потерь стороны **A** составит 1,65, а вероятность того, что ее потери не превысят 30%, составит 0,87. Прогноз исхода боя для стороны **A** в этом случае следует признать благоприятным.

Адекватность моделей боевых действий в условиях военных конфликтов с позиции теоремы Геделя о неполноте

Подавляющее большинство специалистов по моделированию боевых действий вопросу адекватности модели присваивают наивысший ранг. Однако общепринятое определение адекватности как сравнение с опытом для моделей боевых действий, не подходит, так как реаль-

ный опыт есть всего лишь одна реализация из широкого спектра возможных исходов. На практике получается, что адекватность одной модели определяется как степень сравнения ее результатов с результатами другой модели, например, с «эталонной». Но каждый разработчик, в принципе, может претендовать на то, что только его модель является «эталоном», что переведет спор о ее адекватности исключительно в субъективную плоскость.

Применение физических принципов при моделировании боевых действий позволяет не только снять проблему выбора математического аппарата и обоснования корректности применения теории вероятностей, но также позволяет существенно облегчить проверку адекватности моделей боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности.

Можно усилить тезис «об адекватности модели реальному процессу с точностью до принятых гипотез», если посмотреть на проблему адекватности модели боевых действий с позиции теоремы Геделя о неполноте, которая утверждает, что в любой непротиворечивой формальной системе найдется истинное утверждение, которое не может быть ни доказано и ни опровергнуто в рамках рассматриваемой системы [19].

То есть, если представить модель боевых действий как формальную систему знаний, то в силу теоремы Геделя о неполноте она полностью адекватной быть не может, так как всегда найдутся недоказуемые утверждения относительно учитываемых параметров.

Поэтому при разработке модели боевых действий необходимо четко формулировать исходные гипотезы. Тогда при ответе на вопрос: «Учитывается ли в модели *тот или иной нюанс?*» – возможны три варианта ответа: 1) да, учитывается; 2) нет, не учитывается, но может быть рассмотрен в рамках данной модели; 3) нет, не учитывается. Для учета следует расширить исходную систему принятых гипотез.

С такой позиции методы, которые раньше позволяли выявить неадекватность моделей [7, с. 38] (рассмотрены в данной работе в разделе «Проблемные вопросы математического моделирования боевых действий в условиях военных конфликтов низкой интенсивности»), позволяют в своей совокупности доказать адекватность разрабатываемых моделей боевых действий с точностью до принятых гипотез.

Заключение

Особенности современных военных конфликтов, выражающиеся в смещении акцентов от противостояния крупных войсковых группировок к противоборству малочисленных подразделений, делают необходимым использование для моделирования боевых действий соответствующего математического аппарата. Как показано в работе, наиболее приемлемым для учета особенностей тактических действий подразделений уровня взвод – рота является аппарат теории сетей массового обслуживания. При этом конечная цель моделирования – прогноз результатов применения новых видов оружия при решении конкретных боевых задач, что позволяет проводить оценки эффективности как существующих, так и перспективных систем вооружения.

Список использованных источников

1. Военное искусство в локальных войнах и вооруженных конфликтах. Вторая половина XX – начало XXI вв. / Под общ. ред. А.С. Рукшина. – М.: Военное издательство, 2008.
2. Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г. Математическое моделирование в экологии: Историко-методологический анализ. – М.: Языки русской культуры, 1999.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1998.

5. Гнеденко Б.П., Коваленко И.П. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987.
6. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988.
7. Городнов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений и объединений войск ПВО. – Харьков: ВИРТА ПВО, 1987.
8. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. – 2012. – № 37.
9. Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. – М.: Наука, Физматлит, 1998.
10. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. – М.: Физматлит, 2004.
11. Маслов В.П. Эконофизика и квантовая статистика // Математические заметки. – 2002. – Т. 72. – № 6.
12. Богданов К. Кинетика социального неравенства // Квант. – 2004. – № 5.
13. Silverberg J.L., Bierbaum M., Sethna J.P., Cohen I. Collective Motion of Humans in Mosh and Circle Pits at Heavy Metal Concerts // Phys. Rev. Lett., 2013.
14. Swiecicki I., Gobron T., Ullmo D. Schrödinger Approach to Mean Field Games // Phys. Rev. Lett., 2016.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М.: Наука, 1989.
16. Zaitsev D.V. Estimation of ultrashort laser pulse penetration depth into plasma at multiphoton collisional absorption // Вопросы атомной науки и техники. – 2000. – № 1.
17. Everett H (III). «Relative state» formulation of quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 29 454 (1957); Reprinted in Quantum Theory and Measurement (Eds J Wheeler, W H Zurek) (Princeton, N.J.; Princeton University Press, 1983).
18. Зайцев Д.В. Моделирование боя на основе теории сетей массового обслуживания // Стратегическая стабильность. – 2007. – № 4 (41).
19. Godel K. Uber formal unentscheidbare Satze // Monatshefte fur Math. und Phys. – 1931. – № 38.