А.И. Буравлев, доктор технических наук, профессор

Задача оптимизации качества изделия при заданном уровне затрат на его обеспечение

В статье рассмотрена задача оптимизации векторного показателя качества изделия при заданном уровне затрат на его реализацию. Критерием оптимизации является минимум отклонения реализуемого вектора качества от потенциально возможного вектора качества изделий с учетом значимости его компонент при заданной стоимости затрат. Получены аналитические решения прямой и обратной задач оптимизации. Полученные результаты целесообразно использовать при поисковых исследованиях на этапе разработки образцов ВВТ.

При разработке образцов военной техники и вооружения (ВВТ) возникает задача обеспечения более высокого уровня качества изделий по сравнению с существующими аналогами. При этом направления повышения качества изделия определяются результатами поисковых исследований, которые задают потенциально возможные (предельные) характеристики изделий для рассматриваемого научно-технологического уровня развития техники. Практическая реализация потенциально возможных характеристик изделия зависит, прежде всего, от состояния научно-технологической базы промышленности, а также допустимых затрат материальных и финансовых ресурсов.

В связи с этим возникает задача определения максимального приближения качества создаваемого образца ВВТ к потенциально возможному уровню с учетом располагаемых ресурсов.

Постановка задачи. Пусть качество некоторого изделия характеризуется n-мерным вектором $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Потенциально возможное (предельное) качество изделия характеризуется вектором $\hat{\boldsymbol{a}}=(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$. Компоненты вектора качества $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ предполагаются независимыми, т. е. изменение какой-либо компоненты качества не приводит к изменению других компонент. Единица каждой компоненты качества характеризуется стоимостью c_k, так что стоимость изделия с достигнутым вектором качества $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равна $\sum_{k=1}^{n} c_k a_k$.

Ставится задача: при заданной стоимости изделия $C_{зад}$ найти вектор качества, минимизирующий средний квадрат отклонения от потенциально возможного вектора качества

$$\Delta^2 = \sum_{k=1}^{n} \delta_k (\hat{a}_k - a_k)^2 \to \min_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \tag{1}$$

при ограничении $\sum_{k=1}^{n} c_k a_k \leq C_{зад}$,

где $\delta_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \delta_k = 1$ – коэффициент значимости отклонения k-ой компоненты вектора качества от ее потенциально возможного значения.

Величина Δ^2 характеризует среднюю величину отклонения для одной компоненты вектора качества. В этом можно убедиться, если принять все коэффициенты значимости одинаковыми $\delta_k = \frac{1}{n}$.

Для решения сформулированной задачи используем метод Лагранжа [1]. Составим функцию Лагранжа:

$$L(\boldsymbol{a};\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\hat{a}_k-a_k)^2+\lambda\left(C_{зад}-\sum_{k=1}^{n}c_k a_k\right),$$

где $\lambda>0$ – неопределенный множитель Лагранжа.

Минимум функции Лагранжа реализуется в точке, координаты которой определяются следующей системой уравнений:

$$\frac{dL}{d\boldsymbol{a}}=0\ ;\ \frac{dL}{d\lambda}=0\,.$$

Отсюда получаем систему нелинейных уравнений для компонент искомого вектора качества:

$$a_k=\hat{a}_k-\frac{\lambda c_k}{2\delta_k}\ ;\ (k=\overline{1,n})\ ; \tag{2}$$

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{a}_k-C_{зад}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k^2}{\delta_л}}>0\,. \tag{3}$$

<u>Пример 1</u>. Потенциально возможное качество изделия характеризуется двумерным вектором $\boldsymbol{a}=(2;3)$ со стоимостью единицы качества его компонент $c_1=7$; $c_2=5$. Стоимость изделия с потенциально возможным вектором качества составляет $C(\boldsymbol{a})=c_1a_1+c_2a_2=29$ у.е.

Требуется определить вектор качества для изделия стоимостью $C_{зад}=20$ у.е. при одинаковых коэффициентах значимости отклонений компонент качества $\delta_1=\delta_2=0{,}5$.

Р е ш е н и е . По формулам (2), (3) находим: $\lambda=0{,}122$; $a_1=1{,}15$; $a_2=2{,}40$.

Величина отклонения полученного вектора $\boldsymbol{a}=(1{,}15;2{,}40)$ относительно потенциально возможного вектора составляет $\Delta=\sqrt{\delta_1(\hat{a}_1-a_1)^2+\delta_2(\hat{a}_2-a_2)^2}=0{,}74$. Величина углового рассогласования векторов определяется косинусом угла между ними:

$$\cos\phi=\frac{\hat{a}_1a_1+\hat{a}_2a_2}{|\hat{a}||a|}=0{,}99\,,$$

где $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=3{,}61$; $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=2{,}65$ – длины векторов в евклидовой метрике.

На рисунке 1 показано расположение векторов на плоскости качества.

Изменим коэффициенты значимости отклонений вектора качества от потенциального возможного вектора: $\delta_1=0{,}7$; $\delta_1=0{,}3$. Тогда оптимальный вектор качества примет вид $\boldsymbol{a}=(1{,}4;2{,}0)$. Его расположение на плоскости показано на рисунке 2. Как видно из рисунка, вектор $\boldsymbol{a}=(1{,}4;2{,}0)$ практически пропорционален вектору $\hat{a}=(2;3)$ с коэффициентом $\lambda=0{,}7$.

Рассмотрим обратную задачу: по заданному уровню качества изделия найти минимальные затраты на его реализацию.

Здесь в качестве целевой функции приняты минимальные затраты на реализацию заданного качества изделия

$$\sum_{k=1}^{n}c_k a_k\rightarrow\min_{a_1,a_2,\ldots,a_n}\,, \tag{4}$$

а в качестве ограничения – заданное отклонение вектора качества изделия от потенциально возможного вектора:

$$\Delta^2=\sum_{k=1}^{n}\delta_k(a_k-a_k)^2\leq\Delta^2_{зад}\ .$$

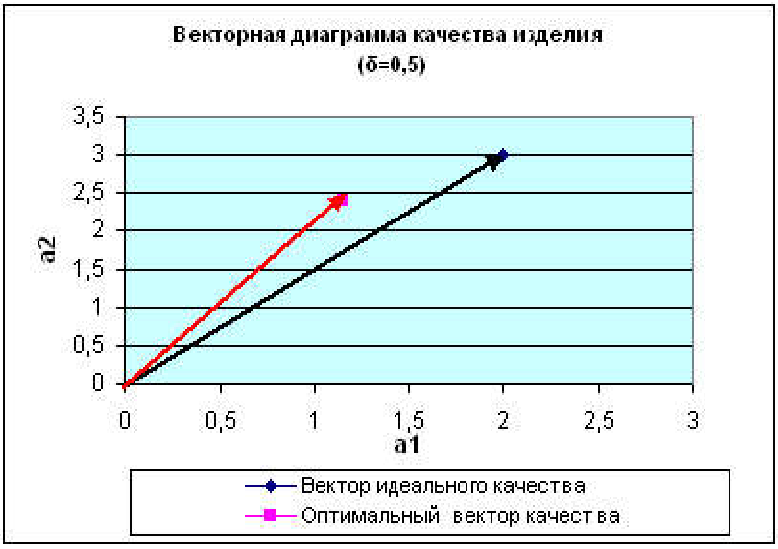

Рисунок 1 – Векторная диаграмма качества изделий
при коэффициенте значимости компонент $\delta_1=\delta_2=0{,}5$

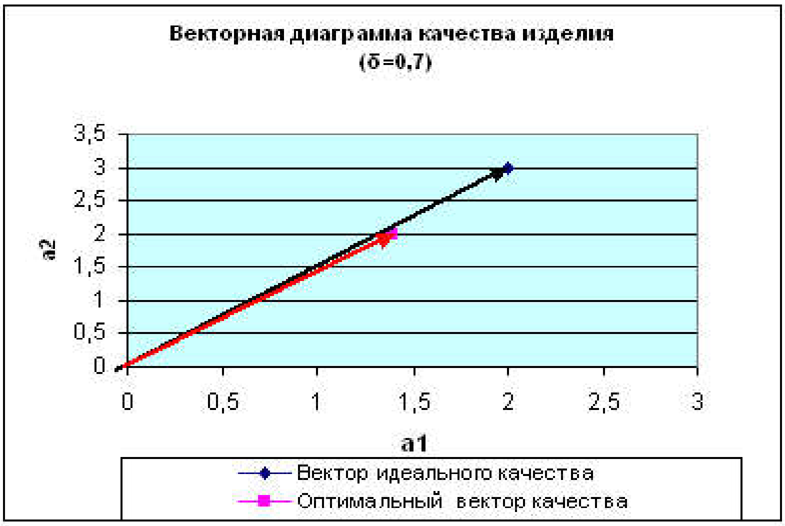

Рисунок 2 – Вектораня диаграмма качества изделий
при коэффициенте значимости компонент $\delta_1=0{,}7\ ;\ \delta_2=0{,}3$

Эта задача также решается методом Лагранжа, однако функция Лагранжа имеет уже другой вид:

$$L(\boldsymbol{a};\lambda)=\sum_{k=1}^{n}c_k a_k+\lambda\left(\Delta^2_{зад}-\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\hat{a}_k-a_k)^2\right).$$

Система уравнений для расчета компонент вектора качества в этом случае имеет вид:

$$a_k=\frac{\hat{a}_k+c_k}{2\lambda\delta_k}\ ;\ (k=\overline{1,n})\ ; \qquad (5)$$

$$2\lambda=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k^2}{\delta_k}}}{\Delta_{зад}}>0\ . \tag{6}$$

<u>Пример 2</u>. В условиях примера 1 найдем оптимальный вектор качества $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, обеспечивающий величину отклонения $\Delta_{зад}=0{,}74$ от потенциально возможного вектора при минимальных затратах на реализацию изделия.

Р е ш е н и е . По формулам (5), (6) находим: $\lambda=8{,}2$; $a_1=1{,}15$; $a_2=2{,}40$; $C(\boldsymbol{a})=20$ у.е.

Как и следовало ожидать, решение обратной задачи для выпуклых функций при одних и тех же исходных данных совпадает с решением прямой задачи.

Обобщим рассмотренные задачи на случай, когда стоимость изделия представляет собой нелинейную функцию от вектора качества:

$$C(\boldsymbol{a})=\sum_{k=1}^{n}C_k(a_k)\ , \tag{7}$$

где $C_k(a_k)$ – неубывающая функция с положительной производной $\frac{dC_i}{da_i}>0$.

Система уравнений для определения параметров функции Лагранжа в прямой задаче имеет вид:

$$a_k=a_k-\frac{\lambda}{2\delta_k}\frac{dC_k}{da_k}\ ;\ (k=\overline{1,n})\ ;\ \frac{\lambda}{2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\delta_k a_k\left(\hat{a}_k-\frac{a_k}{2}\right)}{C_{зад}}\ . \tag{8}$$

Для обратной задачи эта система уравнений принимает вид:

$$a_k=a_k+\frac{\frac{dC_k}{da_k}}{2\lambda\delta_k}\ ;\ (k=\overline{1,n})\ ;\ 2\lambda=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\delta_k}\left(\frac{dC_k}{da_k}\right)^2}}{\Delta_{зад}}\ . \tag{9}$$

<u>Пример 3</u>. В условиях примера 1 зависимость стоимости изделия от его вектора качества описывается следующей функцией $C(\boldsymbol{a})=a_1c_1^{a_1}+a_2c_2^{a_2}$. Стоимость изделия с потенциально возможным вектором качества составляет $C(\boldsymbol{a})=\hat{a}_1c_1^{\hat{a}_1}+\hat{a}_2c_2^{\hat{a}_2}=473$ у.е. Требуется определить оптимальный вектор качества изделия при заданной стоимости $C_{зад}=310$ у.е.

Р е ш е н и е . Производные функции стоимости по компонентам вектора качества имеют вид: $\frac{dC_k}{da_k}=c_k^{a_k}(1+a_k\ln c_k)$; $(k=1,2)$.

Решение системы уравнений (9) осуществляется методом итераций. Результатом решения является вектор $\boldsymbol{a}=(1{,}9;2{,}7)$. Стоимость изделия при этом составит $C(\boldsymbol{a})=304$ у.е. Полученный вектор качества практически совпадает с потенциально возможным вектором, но требует существенно меньших затрат на его реализацию. Это обстоятельство обусловлено нелинейной функцией затрат $C(\boldsymbol{a})$.

Рассмотренная задача оптимизации может быть использована при поисковых исследованиях на стадии проектирования военно-технических систем, когда возникает проблема выбора проектных решений в зависимости от располагаемых материальных и финансовых ресурсов.

Список использованных источников

1. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.