

А.И. Буравлев, доктор технических наук,
профессор

Игровая задача оптимизации противоборства систем воздушно-космического нападения и обороны

В статье рассмотрена игровая задача противоборства системы воздушно-космического нападения и обороны в условиях неопределенностей. Сформулированы критерии эффективности действия сторон и определены условия существования точки равновесия в игре. Получен алгоритм нахождения равновесных стратегий действия сторон. Приведены иллюстративные примеры.

Введение

Моделирование процессов вооруженного противоборства является одной из ключевых задач исследования операций. Рассмотрению методологии и методов моделирования военных действий посвящено ряд фундаментальных зарубежных и отечественных трудов (например, [1-4]). В современных условиях эта задача приобретает особую актуальность в связи с появлением высокоточных систем оружия, переноса военных действий в космическую сферу, созданием эффективных систем информационно-управляющих систем.

Активное развитие средств воздушно-космического нападения (СВКН) приводит к необходимости совершенствования системы воздушно-космической обороны (ВКО) страны. В работах [6-9], рассмотрены основные проблемы, связанные с созданием эффективной воздушно-космической обороны от действия СВКН в условиях их массированного применения.

В работе [10] рассмотрена аналитическая модель оценки эффективности системы ВКО в условиях глобального удара высокоточным оружием. Несмотря на упрощенное описание процесса противоборства, данная модель позволяет в первом приближении оценить эффективность ВКО в зависимости от ее ключевых параметров: численности используемых в ее составе авиационных и зенитно-ракетных комплексов, структуры эшелонирования, организации взаимодействия.

В данной статье на базе данной модели рассматривается игровая задача оптимизации количественных параметров средств воздушно-космического нападения и обороны для определения направлений развития этих систем вооружения.

1. Математическая модель противоборства

Нападающая сторона (сторона 1) имеет в своем составе определенное число средств воздушно-космического нападения для нанесения нескольких массированных ударов по объектам стороны 2. Объектами нападения являются наземные объекты военной и гражданской инфраструктуры и средства воздушно-космической обороны.

Для упрощения задачи будем рассматривать только один тип СВКН и средств ВКО, находящихся в распоряжении противоборствующих сторон.

Обозначим:

N_1 – численность СВКН, планируемых к применению в одном ударе;

$W_{нц}$ – вероятность поражения одним ударным средством (УС) типовой наземной цели военной или гражданской инфраструктуры;

$W_{ВКО}$ – вероятность поражения одним УС средства ВКО. Распределение ударных средств по типам объектов действия характеризуется параметром целераспределения $0 \leq \beta \leq 1$, равным доле УС применяемых по средствам ВКО;

N_2 – численность средств в составе зональной и объектовой ВКО;

W_{yc} – вероятность поражения одного ударного средства комплексом ВКО;

$M_{2i}, (i=\overline{1, m})$ – численность наземных инфраструктурных объектов i -го типа; m – число типов наземных объектов стороны 2, планируемых к поражению СВКН.

Рассмотрим следующий сценарий противоборства. В некоторый момент времени t_1 сторона 1 наносит первый массированный удар по объектам стороны 2 численностью $N_1(t_1)$. Распределение численности УС по объектам стороны 2 задается параметром целераспределения β . Сторона 2 обнаруживает СВКН на дальности $D_{обн}$ и отражает массированный удар путем перехвата и уничтожения СВКН средствами ВКО. Распределение УС и средств ВКО по объектам действия принимается в среднем равномерным. Как показывают исследования, данное допущение при массированном применении боевых средств не имеет существенного влияния на результаты противоборства.

В ходе боевых действий показатели эффективности УС и ВКО $W_{нц}, W_{вко}, W_{yc}$ остаются неизменными.

Найдем значения средних ущербов, наносимых противоборствующими сторонами в ходе боевых действий в зависимости от дальности обнаружения СВКН, скорости их полета к целям и времени подготовки системы ВКО к отражению удара.

Если время подготовки системы ВКО к отражению массированного удара $t_{вко}$ меньше времени полета СВКН к целям $t_{п} = \frac{D_{обн}}{V_{yc}}$, где V_{yc} – средняя скорость полета УС, то система ВКО первой начинает стрельбу по СВКН.

В этом случае средние потери УС стороны 1 от действия ВКО определяются выражением:

$$\Delta N_1(t_1) = N_1(t_1) \left[1 - (1 - W_{yc})^{\frac{N_2(t_1)}{N_1(t_1)}} \right]. \quad (1)$$

Оставшиеся УС распределяются с коэффициентом β по средствам ВКО и $(1 - \beta)$ по объектам инфраструктуры. Средние потери объектов стороны 2 составят:

$$\Delta N_2(t_1) = N_2(t_0) \left[1 - (1 - W_{вко})^{\frac{\beta [1 - U_1(t_1)] N_1(t_1)}{N_2(t_1)}} \right]; \quad (2)$$

$$\Delta M_2(t_1) = \sum_{i=1}^m M_{2i}(t_0) \left[1 - (1 - W_{нц})^{\frac{(1 - \beta) [1 - U_1(t_1)] N_1(t_1)}{M_{2i}(t_0)}} \right], \quad (3)$$

где $U_1(t_1) = \frac{\Delta N_1(t_1)}{N_1(t_1)}$ – доля потерь УС стороны 1.

Численность непораженных объектов стороны 2 будет равна:

$$N_2(t_1) = N_2(t_0) - \Delta N_2(t_0); \quad (4)$$

$$M_2(t_1) = M_2(t_0) - \Delta M_2(t_0). \quad (5)$$

В том случае, если время подготовки системы ВКО окажется больше времени полета СВКН к целям, то удару подвергнутся как средства ВКО, так и наземные объекты инфраструктуры. При этом потери стороны 1 $U_1(t_1) = 0$, а средние потери стороны 2 рассчитываются по формулам (1)-(3).

Таким образом, результат массированного удара будет зависеть от дальности обнаружения СВКН и времени реакции системы ВКО.

Для оценки второго и последующих массированных ударов снова используются соотношения (1)...(5) с начальными условиями $N_1(t_2), N_2(t_1), M_2(t_1)$. Останов вычислительного процесса осуществляется либо при израсходовании запаса УС стороны 1:

$$\sum_{j=1}^n N_1(t_j) \leq N_1(t_0), \tag{7}$$

либо при достижении заданных потерь стороны 2:

$$\frac{\sum_{j=1}^n \Delta N_2(t_j)}{N_2(t_0)} \geq \bar{U}_{ВКО}; \quad \frac{\sum_{j=1}^n \Delta M_2(t_j)}{M_2(t_0)} \geq \bar{U}_{НЦ}. \tag{8}$$

В качестве показателей эффективности действий сторон рассмотрим величину ущерба, нанесенного противоборствующей стороне на единицу затраченных боевых средств с учетом их ценности:

$$P_{СВКН} = \frac{\sum_{j=1}^n [\Delta N_2(t_j) + \alpha \Delta M_2(t_j)]}{N_1(t_j)}; \quad P_{ВКО} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta N_1(t_j)}{N_2(t_0)}, \tag{9}$$

где $\Delta M_2(t_j) = \sum_{i=1}^m \Delta M_{2j}(t_j)$ – суммарные потери инфраструктурных объектов;

$\alpha \geq 0$ – коэффициент, характеризующий относительную значимость инфраструктурных объектов.

Использование данных показателей позволяет соизмерять полученный эффект с затратами на его достижение.

При планировании массированного удара и его отражения противоборствующие стороны не располагают достоверной информацией о численности применяемых СВКН и средств ВКО. Эта информация может быть получена ими только в ходе боевых действий. Таким образом, планирование операции осуществляется в условиях неопределенностей. В этих условиях каждая из сторон стремится максимизировать свои целевые показатели, выбирая надлежащим образом численность СВКН N_1 , параметр целераспределения β и численность средств ВКО N_2 .

В результате для противоборствующих сторон возникает игровая задача планирования своих действий, обеспечивающая максимум целевых функций сторон

$$P_{СВКН}(N_1, \beta, N_2, M_2, t_j) \rightarrow \max_{N_1, \beta, t_j}; \quad P_{ВКО}(N_1, N_2, t_j) \rightarrow \max_{N_1, N_2, t_j} \tag{10}$$

с использованием располагаемых стратегий.

Будем предполагать, что стратегии сторон ограничены, что соответствует практике планирования военных действий:

$$0 < N_1 \leq N_{1max}; \quad 0 < N_2 \leq N_{2max}; \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

При этом каждая из сторон располагает достоверной информацией о максимально возможной численности противника.

Отметим сразу, что при $t_{ВКО} > t_{СВКН}$ задача (10) вырождается и преимущество однозначно остается у нападающей стороны.

При $t_{ВКО} < t_{СВКН}$ сформулированная задача превращается в биматричную игру, решением которой является точка равновесия (N_1^*, β^*, N_2^*) . В этой точке целевые функции удовлетворяют условию Нэша [1, 5]:

$$P_{ВКО}(N_1, N_2^*) \leq P_{ВКО}(N_1^*, N_2^*); \quad P_{СВКН}(N_1, \beta, N_2^*) \leq P_{СВКН}(N_1^*, \beta^*, N_2^*). \tag{11}$$

Вследствие того, что целевые функции являются выпуклыми, а стратегии сторон заданы на ограниченном множестве (компакте), то сформулированная задача имеет единственное решение.

Для получения решения исследуем поведение целевых функций для различных стратегий сторон.

2. Исследование результатов численного моделирования

Введем относительные параметры модели: $\lambda = \frac{N_1}{N_2}$ – соотношение СВКН и средств ВКО;

$\rho = \frac{N_2}{M_2}$ – плотность прикрития средствами ВКО наземных инфраструктурных объектов.

На рисунках 1, 2, 3 показаны графики зависимостей $P_{СВКН} = f_1(\lambda, \rho, \beta)$, $P_{ВКО} = f_2(\lambda)$ от параметров λ, ρ, β для фиксированных значений $W_{УС}, W_{ВКО}, W_{НЦ}$ и $\alpha = 1$.

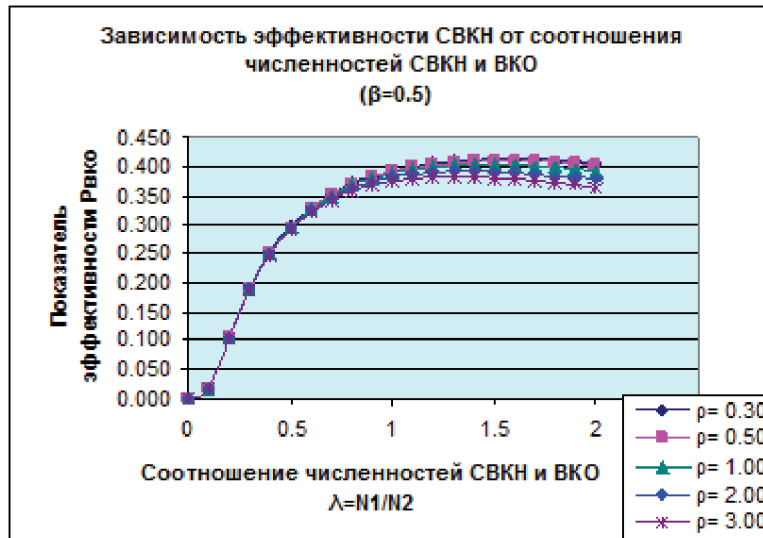


Рисунок 1 – Зависимость эффективности СВКН от соотношения численностей СВКН/ВКО $\lambda = \frac{N_1}{N_2}$

и плотности прикрития ВКО $\rho = \frac{N_2}{M_2}$

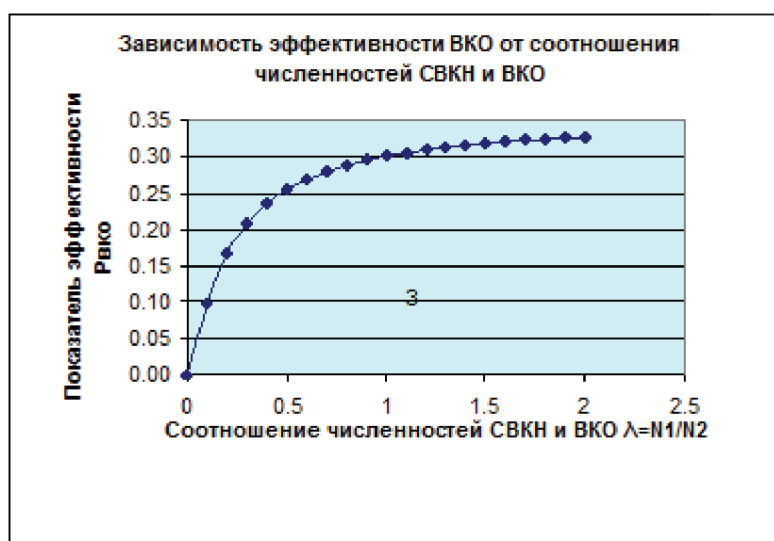


Рисунок 2 – Зависимость эффективности ВКО от соотношения численностей СВКН и ВКО $\lambda = \frac{N_1}{N_2}$

Из рисунков видно, что функция $P_{CBKH} = f_1(\lambda, \rho, \beta)$ имеет максимум по λ в диапазоне значений $\lambda = 1,0 \dots 2,5$ и затем монотонно убывает с его ростом. При этом зависимость от параметра плотности прикрытия ρ не существенная, что позволяет снизить требования к точности его определения. Зависимость $P_{BKO} = f_2(\lambda)$ является монотонно возрастающей по λ и стремится к своему предельному значению $\bar{P}_{BKO} = -\ln(1 - W_{yc})$.

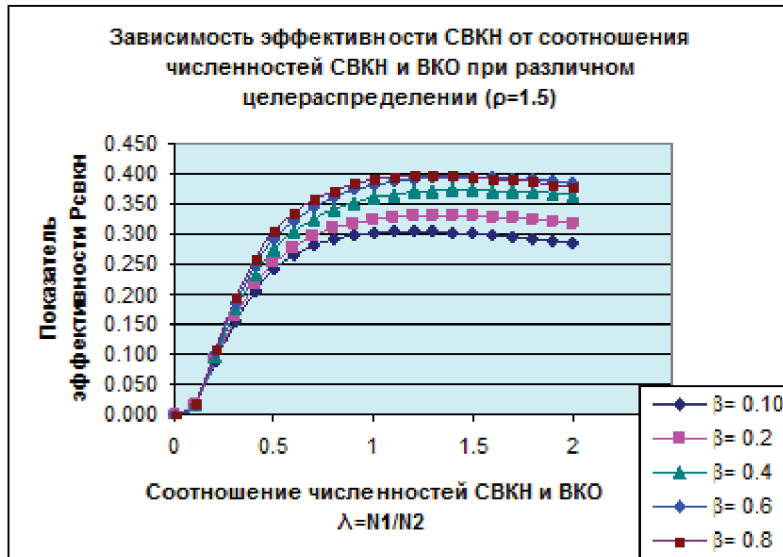


Рисунок 3 – Зависимость эффективности СВКН от соотношения численностей СВКН/ВКО $\lambda = \frac{N_1}{N_2}$ и параметра целераспределения β

На рисунке 3 показаны графики зависимости показателя эффективности $P_{CBKH} = f_1(\lambda, \rho, \beta)$ от параметра целераспределения β при фиксированной плотности прикрытия наземных объектов ВКО $\rho = 1,5$. Из рисунка видно, что параметр целераспределения β значимо влияет на показатель эффективности СВКН и его необходимо учитывать при планировании применения УС. Функция $P_{CBKH} = f_1(\lambda, \rho, \beta)$ по β также имеет экстремум, зависящий от соотношения численностей сторон λ .

Для дальнейших расчетов нам понадобятся в явном виде зависимости показателей эффективности сторон P_{CBKH}, P_{BKO} от параметров управления λ, ρ, β . После несложных преобразований из (1)-(3) получаем:

$$P_{CBKH} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - (1 - W_{BKO})^{\beta \lambda (1 - W_{yc})^{\frac{1}{\lambda}}} \right] + \frac{\lambda}{\beta \lambda} \left[1 - (1 - W_{HЦ})^{(1 - \beta) \lambda (1 - W_{yc})^{\frac{1}{\lambda}}} \right]; P_{BKO} = \lambda \left[1 - (1 - W_{yc})^{\frac{1}{\lambda}} \right]. \quad (12)$$

3. Алгоритм оценки точки равновесия в биматричной игре

В соответствии с целями игры каждая из противоборствующих сторон старается получить максимальный выигрыш (10). В условиях неопределенности информации о численности располагаемых средств нападения сторона 2 для защиты своих объектов использует максимально возможное число средств ВКО:

$$N_2^* = N_{2max}. \quad (13)$$

Степень прикрытия инфраструктурных объектов в этом случае составит $\rho = \frac{N_2^*}{M_2}$.

Сторона 1 по известной численности инфраструктурных объектов M_2 и прогнозу численности средств ВКО N_2 обороняющейся стороны производит расчет параметра целераспределения β , используя принцип концентрации ударных средств для поражения наиболее опасных объектов. В соответствии с данным принципом, чем больше численность средств ВКО и эффективность их поражения, тем выше должна быть доля СВКН для их поражения:

$$\beta = \frac{W_{ВКО} N_2}{W_{ВКО} N_2 + W_{НЦ} M_2} = \frac{\rho W_{ВКО}}{W_{НЦ} + \rho W_{ВКО}}. \quad (14)$$

Как следует из выражения (14), при $\rho = 0$ (прикрытие объектов инфраструктуры средствами ВКО отсутствует) $\beta = 0$ и все ударные средства направляются на поражения объектов инфраструктуры. С увеличением плотности прикрытия наземных объектов доля СВКН, направляемых на поражение средств ВКО, увеличивается.

Далее сторона 1 рассчитывает оптимальное соотношение численностей СВКН и средств ВКО, обеспечивающее максимум ее целевой функции:

$$\lambda^* = \arg \max P_{СВКН}(\lambda, \rho, \beta) \quad (15)$$

для известных параметров ρ, β .

Потребная численность СВКН при этом составит $N_1^* = \lambda^* N_2^*$.

Найденные численности сторон (N_1^*, N_2^*) определяют равновесную точку Нэша в рассмотренной игровой задаче. Любое отклонение численностей сторон от этих значений приводит к нарушению равновесия, что невыгодно для одной и другой стороны.

Рассмотрим ряд примеров решения рассмотренной игровой задачи.

Пример 1. В таблице 1 приведены данные по характеристикам противоборствующих сторон.

Таблица 1 – Данные по характеристикам противоборствующих сторон

Наименование характеристик сторон	Сторона 1	Сторона 2
Максимальное число СВКН, N_1	100	
Максимальное число средств ВКО, N_2		45
Вероятность поражения наземной цели, $W_{НЦ}$		0,4
Вероятность поражения средства ВКО, $W_{ВКО}$	0,5	0,5
Число наземных целей, M_2		30
Число средств ВКО		45
Вероятность поражения СВКН, $W_{УС}$	0,3	

Требуется найти равновесное решение биматричной игры.

Решение. По формулам (13), (14) рассчитывается возможная численность средств ВКО и плотность прикрытия наземных объектов стороны 2: $N_2^* = 45$; $\rho = 1,5$.

Далее по формуле (14) определяется параметр целераспределения $\beta = 0,65$ и соотношение численностей сторон λ , обеспечивающие максимальную эффективность стороны 1:

$$\lambda^* = \arg \max P_{СВКН}(\lambda, \rho, \beta) = 1,4; N_1^* = 63.$$

В точке равновесия стороны достигают следующие значения целевых функций:

$$P_{ВКО} = 0,315; P_{СВКН} = 0,397.$$

Изменим условия противоборства, например, увеличив число СВКН в массированном ударе до $N_1 = 72$ и $\lambda = 1,6$. Значения целевых функций сторон для этого случая будут равны:

$$P_{ВКО} = 0,32; P_{СВКН} = 0,395.$$

Как видно, показатель эффективности стороны 1 уменьшился, а стороны 2 увеличился. В силу пологости целевых функций эти изменения незначительные, тем не менее, они есть и нарушают равновесие сторон. Поэтому сторона 1 вынуждена уменьшать свою численность до исходной величины $N_1^* = 63$ ед.

Оценим результат массированного удара при оптимальных численностях сторон.

Доля пораженных СВКН средствами ВКО составит 22,5%. Оставшиеся ударные средства в количестве $N_1 = 49$ единиц обеспечат поражение 39% средств ВКО и 25% инфраструктурных объектов.

Для достижения более весомых результатов требуется еще один массированный удар. Для второго удара плотность прикрытия наземных объектов средствами ВКО составляет $\rho = 1,23$. Параметр целераспределения СВКН во втором ударе равен $\beta = 0,61$. Максимум целевой функции $P_{СВКН}(\lambda, \rho, \beta)$ достигается также при $\lambda = 1,5$. Численность СВКН для второго удара составит $N_1^* = 41$ ед.

Результаты удара и значения целевых функций сторон остаются примерно такими же, что и в первом ударе:

$$P_{ВКО} = 0,317 ; P_{СВКН} = 0,399 .$$

За два удара сторона 1 израсходовала $N_1 = 104$ ударных средств, из них 22% составляют потери. Относительные потери стороны 2 составляют: средств ВКО 63%, инфраструктурных объектов 44%.

Показатели эффективности сторон в процессе противоборства составляют:

$$P_{ВКО} = 0,51 ; P_{СВКН} = 0,40 .$$

Пример 2. В условиях примера 1 все СВКН первого удара направляются на поражение ВКО. Во втором ударе СВКН распределяются по объектам действия согласно принятому принципу целераспределения.

Решение. В первом ударе при $\beta = 1$ оптимальное соотношение и численность стороны 1 составляют $\lambda^* = 1,1$ и $N_1^* = 50$. Относительные потери СВКН в первом ударе составляют 28%, потери средств ВКО равны 42%.

Значения целевых функций сторон в первом ударе равны:

$$P_{ВКО} = 0,305 ; P_{СВКН} = 0,385 .$$

Для второго удара плотность прикрытия инфраструктурных объектов составляет $\rho = 0,86$, коэффициент целераспределения равен $\beta = 0,52$. Оптимальное соотношение и численность СВКН составят: $\lambda^* = 1,6$; $N_1^* = 41$. Результаты второго удара характеризуются следующими показателями: относительные потери СВКН составят 21%, потери средств ВКО равны 35%, потери инфраструктурных объектов составят 22%.

Значения целевых функций сторон во втором ударе равны:

$$P_{ВКО} = 0,317 ; P_{СВКН} = 0,402 .$$

За два удара общее число израсходованных СВКН составляет $N_1 = 91$ единицу, из них 24% составляют потери. Относительные потери стороны 2 составляют: средств ВКО 62%, инфраструктурных объектов 22%.

Показатели эффективности сторон в процессе противоборства составляют:

$$P_{ВКО} = 0,49 ; P_{СВКН} = 0,39 .$$

Сравнение с первым вариантом показывает, что второй вариант требует меньшего на 15% числа ударных средств для достижения практически одинакового результата.

Полученное выше решение игровой задачи предполагает, что нападающая сторона имеет достоверную информацию о максимально возможной численности средств ВКО обороняющейся стороны. Для компенсации этого преимущества обороняющаяся сторона может применить рефлексивную стратегию [5], состоящую в сокрытии истинной и распространении ложной информации о возможностях своей ВКО – численности и эффективности применяемых ударных средств. Это позволит повысить эффективность отражения удара нападающей стороны.

Пример 3. В результате применения рефлексивной стратегии нападающая сторона получает информацию о том, что плотность прикрытия инфраструктурных объектов составляет $\rho=1,1$.

По известной плотности прикрытия нападающая сторона оценивает оптимальное соотношение сил $\lambda^*=1,6$, численность СВКН $N_1^*=33$ единицы и параметр целераспределения $\beta=0,58$.

В действительности же обороняющаяся сторона имеет численность средств ВКО $N_2=45$ единиц. При этом соотношение численностей составляет $\lambda=0,8$.

При таком соотношении СВКН и средств ВКО показатели эффективности сторон в первом ударе составят:

$$P_{ВКО}=0,288 ; P_{СВКН}=0,365 .$$

По сравнению с первым вариантом эффективность как системы ВКО, так и СВКН уменьшилась в среднем на 8,5%.

К рефлексивной стратегии также относится сокрытие от противника истинного значения вероятностей поражения СВКН средств ВКО $W_{ВКО}$ и инфраструктурных объектов $W_{ИЦ}$. Уменьшение значений этих вероятностей приводит к снижению эффективности действия СВКН.

Заключение

Рассмотренная игровая задача может быть использована при обосновании количественного состава и эффективности средств ВКО для отражения массированного удара СВКН противника по военным и гражданским объектам.

Список использованных источников

1. Гермейер Ю.Б. Введение в исследование операций. – М.: Наука, 1971.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука, 1972.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3-х томах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.
4. Саати Т. Математические модели конфликтных ситуаций / Пер. с англ. под ред. И.А. Ушакова. – М.: Советское радио, 1977.
5. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
6. Мартофляк А.П., Михайлюк А.В. Вооруженное противоборство в воздушной и космической средах: изменения в содержании // Военная мысль. – 2011. – № 6.
7. Купцов И.М. Борьба с гиперзвуковыми летательными аппаратами: новая задача и требования к системе воздушно-космической обороны // Военная мысль. – 2011. – № 1.
8. Белоус Р.А., Сизов Ю.Г., Скоков Л.А. Некоторые особенности ПВО в условиях массированного применения противником комплексов БЛА и ВТО // Военная мысль. – 2013. – № 6.
9. Горевич Б.Н. Выработка способа противовоздушной обороны объекта на основе комплексного использования разнотипных математических моделей боевых действий // Военная мысль. – 2008. – № 9.
10. Ачасов О.Б., Буравлев А.И. Аналитическая модель оценки эффективности глобального удара высокоточным оружием // Вооружение и экономика. – 2014. – № 2 (27).