А.А. Венедиктов, доктор экономических наук, профессор

О показателе согласованности экспертных оценок[1]

С учетом доказанной ранее непригодности коэффициента ранговой конкордации Кэнделла для оценки степени согласованности экспертных оценок в статье обосновывается перечень необходимых свойств, которыми должна обладать функция, адекватно вычисляющая такую согласованность. Доказывается, что коэффициент конкордации Кэнделла не удовлетворяет данным необходимым требованиям. Предлагается функция, удовлетворяющая необходимым условиям.

При решении задач в области военного планирования и прогнозирования нередко применяется метод экспертных оценок, когда то или иное управленческое решение принимается не на основе строгого научного доказательства его рациональности, а посредством обобщения субъективных оценок проблемы специалистами. С использованием данного метода более или менее успешно может производиться качественное сравнение объектов (по принципу «лучше-хуже»). Если имеется более двух сравниваемых факторов (объектов), то возникает задача упорядочения (ранжирования) исходного множества объектов по некому принципу, которая может быть сведена к попарному сравнению элементов такого множества [1].

Предполагается, что имеется m экспертов и n оцениваемых объектов (факторов). Задачей эксперта является ранжировать объекты по тому или иному признаку, т. е. присвоить каждому из факторов порядковый номер от 1 до n, причем каждый из номеров должен встречаться ровно один раз[2]. После сбора мнений экспертов, как правило, возникает необходимость оценить степень их согласованности. Для решения этой задачи нередко применяется так называемый коэффициент ранговой конкордации, иногда именуемый также коэффициентом конкордации (коэффициентом согласия) Кэнделла или просто коэффициентом Кэнделла, следующего вида [2]:

$$W=\frac{12}{m^2\left(n^3-n\right)}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}C_{ij}-m\frac{(n+1)}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

где W – коэффициент ранговой конкордации;

m – количество экспертов;

n – количество ранжируемых факторов;

C_{ij} – ранг j-го фактора по мнению i-го эксперта.

Значения W лежат в диапазоне $[0;1]$. При этом обычно предполагается, что значения W из диапазона $[0;0{,}3]$ свидетельствуют о низкой согласованности мнений экспертов, а из диапазона $[0{,}7;1]$ – о высокой.

Как было показано в [1], поведение функции Кэнделла на ряде наборов данных не является разумным: ее значения при весьма незначительном изменении аргумента могут отличаться существенным образом и, наоборот, обладающие качественными различиями исходные данные могут давать одинаковое значение коэффициента конкордации. Вместе с тем «разумность» поведения искомой функции является неформализованным понятием и по этой причине не может быть по-

1 Статья подготовлена в рамках проекта РФФИ № 17-06-0052217.

2 В [1] также рассмотрен вариант опроса, при котором экспертам разрешается выставлять отдельным сравниваемым объектам равные ранги при невозможности либо затруднительности их относительного ранжирования, однако здесь данный вариант не рассматривается с тем, чтобы не усложнять доказательства. Уточнение математического аппарата для подобного варианта опроса может быть рассмотрено отдельно.

ложена в основу обоснования пригодности любого из предлагаемых подходов к вычислению коэффициента конкордации. В целях формализации соответствующих требований обоснуем ряд правил, выполнение которых будем полагать необходимым условием пригодности анализируемой функции к использованию ее для определения согласованности экспертных оценок.

Итак, имеется матрица экспертных оценок $A_{n\times m}$, обладающая тем свойством, что каждый ее столбец $A_j=\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,n}}$ представляет собой вектор длины n, состоящий из натуральных чисел в диапазоне от 1 до n, при этом каждое из чисел встречается ровно один раз:

$$\forall k\in\mathbb{N}, 1\leqslant k\leqslant n\ \exists!i:\ a_{ij}=k\ . \tag{2}$$

Далее в настоящей работе мы будем рассматривать только такие матрицы. Для проверки адекватности функции, претендующей на ее использование для вычисления коэффициента конкордации ранговых экспертных оценок (обозначим ее $\operatorname{conc}(A)$), данной задаче будем проверять, обладает ли она перечисленными ниже свойствами.

Прежде всего, наложим на нее нормировочное ограничение: значения функции должны лежать в диапазоне от 0 до 1, при этом 0 будет соответствовать минимальной степени согласованности (точнее, максимальной несогласованности) экспертных оценок, а 1 – максимальной. Данное требование, с одной стороны, не является принципиально важным и вводится исключительно в целях сохранения преемственности с часто используемой функцией Кэнделла (1). С другой стороны, оно не является обременительным, поскольку для приведения значения к функции к данному диапазону в большинстве случаев потребуется простое линейное преобразование.

Итак, **свойство 1** (нормализованность): $\forall A:\ 0\leqslant\operatorname{conc}(A)\leqslant 1$.

Пусть $\{V_n\}$ – множество всех возможных векторов длины n, обладающих свойством (2)[1]. Данное множество содержит $n!$ элементов. Рассмотрим множество матриц $\{B_{n\times n!}\}\subset\{A_{n\times n!}\}$, обладающих следующим свойством:

$$\forall\vec{v}\in\{V_n\}\exists!j:\ B_j=\vec{v}\ . \tag{3}$$

Здесь B_j – j-й столбец матрицы B. Иными словами, столбцы матрицы B должны содержать все возможные комбинации векторов из натуральных чисел от 1 до n, каждая из которых встречается ровно один раз. Такие матрицы назовем максимально несогласованными и сформулируем еще два свойства:

Свойство 2: $\operatorname{conc}(B)=0$.

Свойство 3: Если $C\subset\{A_{n\times n!}\}$, $C\notin\{B_{n\times n!}\}$, то $\operatorname{conc}(C)>0$.

Свойство 2 является достаточно очевидным: если несогласованность мнений экспертов максимальна (а именно такому варианту соответствуют матрицы B), то значение коэффициента, характеризующего степень их согласованности, должно быть равно нулю. Отметим, что значение функции Кэнделла для такого набора данных также будет нулевым (таблица 1).

Таблица 1 – Пример максимально несогласованного распределения экспертных оценок, коэффициент ранговой конкордации Кэнделла $W=0$, $\operatorname{conc}(A)=0$

Номер вопроса	Номер эксперта					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	3	2	2	3
2	2	3	1	1	3	2
3	3	2	2	3	1	1

1 Или, что то же самое, матриц размера $n\times 1$: $A_{n\times 1}$.

Свойство 3 подразумевает, что нулевое значение коэффициента конкордации должно соответствовать лишь максимально несогласованному набору мнений экспертов (3). Остальные наборы должны иметь большее, т. е. положительное, значение соответствующего коэффициента. Функция Кэнделла *не удовлетворяет* этому свойству. В [1] были приведены примеры распределения заключений экспертов, для которых прослеживается определенная система в высказанных экспертами мнениях (согласованность), однако коэффициент конкордации W для них также равен нулю. Пример такого распределения приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Пример распределения экспертных оценок для пяти анализируемых факторов с полным совпадением рангов (3), присвоенных экспертами одному из факторов, и разделившимися в отношении 50/50 рангами для 1-5 и 2-4 объектов, $W=0$, $\text{conc}(A)>0$

Номер анализируемого фактора	**Номер эксперта**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5
2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4
5	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2

Рассмотрим матрицу $C_{n\times m}=\left(c_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$, полученную из матрицы $A_{n\times m}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ посредством замены ее элементов в соответствии с вектором подстановок $P=\left(p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots,p_n\right)$, обладающим свойством (2), по следующему правилу:

$$c_{ij}=p_{a_{ij}}. \tag{4}$$

Иными словами, в матрице $A_{n\times m}$ каждый элемент заменяется на соответствующий ему элемент вектора P. При этом индекс элемента вектора P равен значению a_{ij}. Приведем пример такой подстановки:

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&2&3\end{pmatrix}\underset{P=(2,3,1)}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2&2&2\\3&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}=C_{3\times 3}.$$

Такое преобразование матрицы A на основе подстановки P обозначим:

$$C=\text{Rep}(A,P).$$

Сформулируем **свойство 4** (инвариантность): для приведенных выше матриц A и C должно выполняться следующее равенство: $\text{conc}(C)=\text{conc}\left(\text{Rep}(A,P)\right)=\text{conc}(A)$. Иными словами, значение функции конкордации должно быть инвариантно к конкретным рангам, присвоенным экспертами тому или иному оцениваемому фактору (например, неважно, будут эксперты единодушны в выборе лучшего либо худшего показателя), и отражать лишь их согласованность между собой.

Отметим, что коэффициент конкордации Кэнделла *не обладает* свойством 4. Например, для распределения экспертных оценок, приведенного в таблице 2, значение коэффициента конкордации Кэнделла $W=0$, а для распределения, указанного в таблице 3, $W=0{,}9$. При этом матрица, соответствующая таблице 2, может быть получена из матрицы для таблицы 3 путем замены в соответствии с таким вектором подстановок: $P=(3,2,4,1,5)$.

По аналогии со свойствами 2 и 3 могут быть сформулированы условия для *максимального* значения коэффициента ранговой конкордации. Наибольшее значение соответствующей функции должно достигаться для матриц, в которых все столбцы $V_{n\times1}$ равны (такую матрицу назовем полностью согласованной):

$$E_{n\times m}=\underbrace{\left(V_{n\times1}V_{n\times1}\ldots V_{n\times1}\right)}_{m}. \tag{5}$$

Свойство 5: $\mathrm{conc}\left(E_{n\times m}\right)=1$.

Свойство 6: Если $C\subset\left\{A_{n\times m}\right\}$, $C\notin\left\{E_{n\times m}\right\}$, то $\mathrm{conc}(C)<1$.

Таблица 3 – Пример распределения экспертных оценок для пяти анализируемых факторов с полным совпадением рангов (1), присвоенных экспертами одному из факторов, и разделившимися в отношении 50/50 рангами для остальных анализируемых объектов, $W=0{,}90$

Номер анализируемого фактора	**Номер эксперта**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
2	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
5	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Наконец, необходимо определиться с тем, какую матрицу из двух сравниваемых мы будем считать «более согласованной». Для этого вначале рассмотрим две таблицы мнений экспертов, отличающихся друг от друга лишь парой соседних элементов одного столбца. Пусть имеются две матрицы: $A_{n\times m}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}\in\left\{E_{n\times m}\right\}$ (т. е. матрица A состоит из одинаковых столбцов) и $B_{n\times m}=\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ со следующими элементами:

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & \text{если } j\neq l \text{ или } i\neq k,\ i\neq k+1,\\ a_{(i+1)j}, & \text{если } j=l,\ i=k,\\ a_{(i-1)j}, & \text{если } j=l,\ i=k+1.\end{cases}$$

Иными словами, матрица B получена из матрицы A перестановкой k-го и (k+1)-го элементов l-го столбца ($k\leqslant m-1$).

Матрицы A и B могут иметь, например, следующий вид ($k=1$, $l=4$):

$$A_{4\times5}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\end{pmatrix},\quad B_{4\times5}=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\2&2&2&1&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

Из свойств 5 и 6 следует, что должно выполняться следующее условие: $\mathrm{conc}(A)>\mathrm{conc}(B)$ (поскольку $\mathrm{conc}(A)=1$, $\mathrm{conc}(B)<1$). Согласованность экспертных оценок, представленных матрицей A, очевидно выше (мнения всех экспертов совпадают), чем согласованность оценок, представленных матрицей B.

Далее рассмотрим матрицу $D_{m\times n}=\left(d_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$, которую получим из матрицы A перестановкой k-го и другого произвольно выбранного, но не соседнего с ним, r-го элемента l-го столбца ($r\neq k+1$, $r\neq k-1$, $r\neq k$):

$$d_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & \text{если } j\neq l \text{ или } i\neq k, i\neq r,\\ a_{rj}, & \text{если } j=l,\ i=k,\\ a_{kj}, & \text{если } j=l,\ i=r. \end{cases}$$

Пример матрицы *D*:

$$D_{4\times5}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Будет ли разумным следующее соотношение значений функции конкордации для матриц *B* и *D*: $\text{conc}(B)>\text{conc}(D)$? С одной стороны, в первом случае (матрица *B*) эксперт с номером *l* допустил минимальное отклонение от единодушного мнения остальных экспертов: посчитал, что два соседних элемента ранжированы иным образом. Во втором случае (матрица *D*) расхождение с мнением остальных участников опроса выглядит более существенным. С такой точки зрения приведенное выше строгое неравенство является оправданным. С другой стороны, 2-й и 3-й элементы 4-го столбца совпадают с теми же элементами остальных столбцов, т. е. в отношении рангов этих факторов эксперты были единодушны. Поэтому 4-й столбец матрицы можно интерпретировать и так, что 4-й эксперт также допустил единственное отклонение от мнения остальных экспертов (как и в предыдущем примере). В этом случае вместо строгого неравенства мы получим равенство: $\text{conc}(B)=\text{conc}(D)$. Для того, чтобы наше ограничение не противоречило ни одному из перечисленных подходов, зададим его в виде нестрогого неравенства: $\text{conc}(B)\geqslant\text{conc}(D)$.

Наконец, рассмотрим следующий пример матрицы:

$$F_{4\times5}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Руководствуясь аналогичными соображениями, зададим отношение $\text{conc}(D)$ и $\text{conc}(F)$ в виде нестрогого неравенства: $\text{conc}(D)\leqslant\text{conc}(F)$.

Для определения степени близости двух векторов V_1 и V_2, где V_2 получен из V_1 перестановкой двух его элементов v_{1k} и v_{1r}, $k\neq r$, введем следующую меру:

$$\|V_1,V_2\|=2\cdot|k-r|-1. \qquad (6)$$

«Расстояние» между такими векторами можно интерпретировать как минимальное число парных перестановок соседних элементов, которые необходимо произвести с элементами вектора V_1, чтобы получить вектор V_2, или наоборот. Например, для рассмотренных выше четвертых столбцов матриц *A*, *B*, *D* и *F* (соответственно A_4, B_4, D_4 и F_4):

$$\|A_4,B_4\|=1,\ \|A_4,D_4\|=5,\ \|A_4,F_4\|=3.$$

Рассмотрим более общий случай, когда элементы конкретного вектора (столбца сравниваемых матриц) отличаются не в одной паре, а «перемешаны» произвольным образом, например, так:

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Ответ на вопрос о том, как соотносятся в данном случае $\mathrm{conc}(F)$ и $\mathrm{conc}(G)$, не столь очевиден, как в предыдущих примерах. Для выяснения того, какая из матриц A и B ближе к преобладающему мнению экспертов, обобщим введенное выше понятие меры на этот, более сложный, случай. Будем считать мерой двух векторов V_1 и V_2 минимально возможное количество попарных перестановок соседних элементов одного из векторов, преобразующее этот вектор к другому вектору. Например:

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}\right\|=1\,;\quad \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}\right\|=3\,;\quad \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=6\,. \tag{8}$$

Отметим, что любую пару столбцов V_1, V_2 при помощи инвариантной подстановки:

$$P=(p_i)_{i=\overline{1,n}},\quad p_i=\mathrm{ind}(V_1,i)\,, \tag{9}$$

мы можем привести к виду $V_{\mathbb{N}}$, V_2^*, где $V_{\mathbb{N}}=\mathrm{Rep}(V_1,P)=(v_i)$, $v_i=i$, т. е. первый вектор будет представлять собой столбец упорядоченных по возрастанию натуральных чисел от 1 до n. Здесь $\mathrm{ind}(x,i)$ – номер элемента со значением i в векторе x, т. е. $x_{\mathrm{ind}(x,i)}=i$. В силу (2) такой элемент всегда существует, притом ровно один. При этом $V_2^*=\mathrm{Rep}(V_2,P)=(v_i^*)$. Правило (9) может оказаться удобнее записать следующим образом:

$$p_{v_i}=i\,. \tag{10}$$

Тогда значение меры может быть получено по следующей формуле:

$$\|V_1,V_2\|=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\begin{cases}1, & \text{если } v_i^*>v_j^*,\\ 0, & \text{если } v_i^*<v_j^*.\end{cases} \tag{11}$$

Вариант $v_i^*=v_j^*$ невозможен в силу условия (2). Отметим, что для векторов V_1 и V_2, где V_2 получен из V_1 перестановкой двух его элементов v_{1k} и v_{1r}, $k\neq r$, формула (6) является частным случаем (11). Этот показатель инвариантен к замене компонент обоих векторов в соответствии с упоминавшимся ранее вектором подстановок.

Зададим произвольный вектор подстановок: $P=(2,4,3,1)$.

Далее для векторов из примера (8) произведем соответствующую подстановку и убедимся, что мера осталась той же:

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix}\right\|=1\,;\quad \left\|\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right\|=3\,;\quad \left\|\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix}\right\|=6\,.$$

Докажем свойство, которое мы только что продемонстрировали.

Дано: векторы $V^{(1)}=V^{(1)}_{n\times 1}$, $V^{(2)}=V^{(2)}_{n\times 1}$ и $P=P_{1\times n}$, обладающие свойством (2).

Требуется доказать: $\left\|V^{(1)},V^{(2)}\right\|=\left\|\mathrm{Rep}\left(V^{(1)},P\right),\mathrm{Rep}\left(V^{(2)},P\right)\right\|$. Здесь двойные прямые скобки означают меру (11).

Доказательство: Первым шагом вычисления меры является выполнение подстановки, приводящей первый вектор пары к виду $V_{\mathbb{N}}$. Следовательно, к моменту вычисления значения (11) как вектор $V^{(1)}$, так и вектор $\mathrm{Rep}\left(V^{(1)},P\right)$ будут приведены к одинаковому виду ($V_{\mathbb{N}}$). Обозначим $P^{V^{(1)}}$ подстановку, преобразующую $V^{(1)}$ в $V_{\mathbb{N}}$:

$$V^{(1)} \underset{P^{V^{(1)}}}{\Rightarrow} V_{\mathbb{N}} .$$

Подстановку, преобразующую $\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)$ к виду $V_{\mathbb{N}}$, обозначим $P^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}$:

$$\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right) \underset{P^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}}{\Rightarrow} V_{\mathbb{N}} .$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\operatorname{Rep}\left(V^{(2)}, P^{V^{(1)}}\right)=\operatorname{Rep}\left(\operatorname{Rep}\left(V^{(2)}, P\right), P^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}\right)$.

Обозначим $V^{(2)R}$ вектор, полученный из $V^{(2)}$ в результате подстановки $P^{V^{(1)}}$:

$$V^{(2)} \underset{P^{V^{(1)}}}{\Rightarrow} V^{(2)R} ,$$

а $V^{(2)Q}$ – вектор, полученный из $V^{(2)}$ в результате последовательного применения подстановок P и $P^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}$:

$$V^{(2)} \underset{P}{\Rightarrow} V^{(2)T} \underset{P^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}}{\Rightarrow} V^{(2)Q} .$$

Докажем, что $V^{(2)R}=V^{(2)Q}$.

В соответствии с (4) и (9):

$$V_i^{(2)R}=P_{V_i^{(2)}}^{V^{(1)}}=\operatorname{ind}\left(V^{(1)}, V_i^{(2)}\right), \quad i=\overline{(1, n)} . \tag{12}$$

С другой стороны, в силу тех же соотношений:

$$V_i^{(2)Q}=P_{V_i^{(2)T}}^{\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)}=\operatorname{ind}\left(\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right), V_i^{(2)T}\right)=\operatorname{ind}\left(\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right), P_{V_i^{(2)}}\right), \quad i=\overline{(1, n)} . \tag{13}$$

В соответствии с (4) $\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right)=\left(P_{V_1^{(1)}}, P_{V_2^{(1)}}, \ldots, P_{V_n^{(1)}}\right)$. Поэтому в силу (2):

$$\operatorname{ind}\left(\operatorname{Rep}\left(V^{(1)}, P\right), P_{V_i^{(2)}}\right)=\operatorname{ind}\left(V^{(1)}, V_i^{(2)}\right) .$$

Следовательно, $V^{(2)R}=V^{(2)Q}$, что и требовалось доказать.

Обобщим формулу (11) на случай матрицы. Для вектора $V=V_{i=\overline{1,n}}$ и матрицы $A=A_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$, обладающих свойством (2), введем понятие меры в соответствии со следующей формулой:

$$\|V, A\|=\sum_{j=1}^{m}\|V, A_j\| , \tag{14}$$

где A_j – j-й столбец матрицы A.

На основе данной меры введем понятие усредненной экспертной оценки для матрицы A:

$$V_{\text{сред.}}=\underset{V \in \{B_j\}}{\operatorname{argmin}}\|V, A\| , \tag{15}$$

где $\{B_j\}$ – множество столбцов матрицы $B_{n \times n!}$, обладающей свойством (3).

Таким образом, усредненная экспертная оценка – такой вектор, сумма «расстояний» которого до всех векторов, соответствующих мнениям экспертов, минимальна. В некоторых специальных случаях таких векторов может быть несколько.

Рассмотрим в качестве промежуточного показателя согласованности экспертных оценок, заданных матрицей A, следующую функцию:

$$f(A)=\|V_{\text{сред.}}, A\| . \tag{16}$$

Данная функция будет обладать перечисленными выше свойствами 2, 4, 5, 6[1]. Чтобы получить возможность использовать подобное значение в качестве коэффициента конкордации, в частности, для соблюдения свойства 1 (нормализованность), необходимо нормировать данный показатель, т. е. умножить его на коэффициент α, обеспечивающий попадание соответствующих значений в диапазон $[0; 1]$. Учитывая, что чем хуже согласованы экспертные оценки, тем больше зна-

1 Свойству 3 данная функция *не соответствует*. Пути достижения выполнения этого условия мы обсудим ниже.

чение $f(A)$, необходимо вычесть полученный результат из единицы с тем, чтобы значение 1 соответствовало максимальной согласованности мнений экспертов, а 0 – минимальной:

$$c(A)=1-\alpha f(A). \tag{17}$$

Вычислим значение коэффициента α. Поскольку в соответствии со свойством 2 значение коэффициента конкордации для матрицы вида (3) должно быть равно нулю можно сделать вывод, что:

$$\alpha=\frac{1}{f(B)}, \tag{18}$$

где B – матрица вида (3), т. е. имеет размер $n\times n!$ и ее столбцы содержат все возможные комбинации векторов из натуральных чисел от 1 до *n*, каждое из которых встречается ровно один раз. Пример такой матрицы приведен в таблице 1. Обозначим $F(n)=f(B_{n\times n!})$.

Рассмотрим матрицу $B_{n\times n!}$, содержащую $n!$ столбцов. Разобьем ее на *n* групп столбцов по $(n-1)!$ столбцов в каждой таким образом, что каждая группа будет содержать матрицу $B_{(n-1)\times(n-1)!}$ (возможно, «разорванную» на две части по строкам) и строку, состоящую из элементов *n* (рисунок 1).

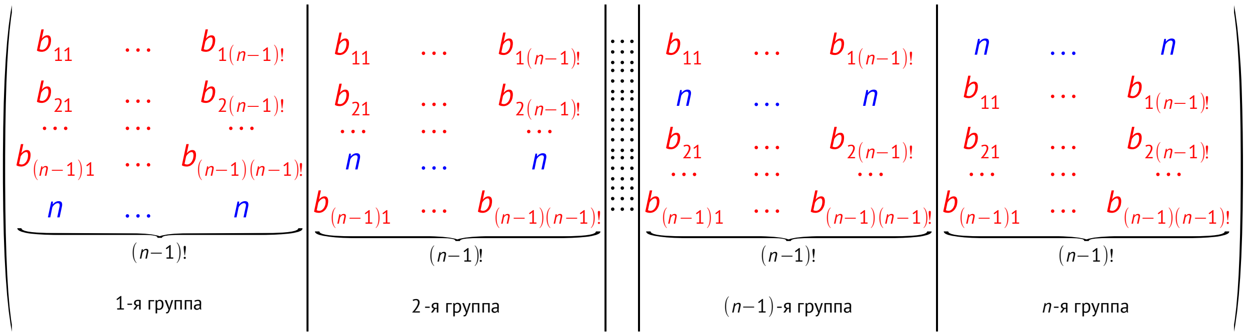

Рисунок 1 – Группировка столбцов матрицы $B_{(n+1)\times(n+1)!}$

На рисунке красным цветом выделены элементы, которые воспроизводят в том же порядке элементы матрицы $B_{(n-1)\times(n-1)!}$. Синим цветом – «новые» (т. е. отсутствующие в матрице $B_{(n-1)\times(n-1)!}$) элементы *n*. Отметим, что количество перестановок, приводящих матрицу $B_{(n-1)\times(n-1)!}$ к виду $E_{(n-1)\times(n-1)!}$, равно $F(n-1)$. Из рисунка видно, что в 1-й группе столбцов количество попарных перестановок соседних элементов, приводящих данную группу к виду $E_{(n+1)\times n!}$, равно $F(n-1)$, поскольку «новые» элементы *n* уже стоят на своих местах. Во 2-й группе число таких перестановок будет равно $F(n-1)+(n-1)!$, т. к. необходимо переставить $(n-1)!$ «новых» элементов на свои места в последней строке, после чего упорядочить элементы b_{ij}, произведя $F(n-1)$ перестановок.

Аналогично рассчитывается количество перестановок для остальных групп. После их сложения мы получим рекуррентную формулу для $F(n)$:

$$\begin{aligned}F(n)&=F(n-1)+\big(F(n-1)+(n-1)!\big)+\big(F(n-1)+2\cdot(n-1)!\big)+\ldots+\\&+\big(F(n-1)+(n-2)\cdot(n-1)!\big)+\big(F(n-1)+(n-1)\cdot(n-1)!\big)=n!\frac{n-1}{2}+n\cdot F(n-1).\end{aligned} \tag{19}$$

Подставим в формулу (19) аналогичное выражение для $F(n-1)$:

$$\begin{aligned}F(n)&=n!\frac{n-1}{2}+n\cdot F(n-1)=n!\frac{n-1}{2}+n\cdot\left((n-1)!\frac{n-2}{2}+(n-1)\cdot F(n-2)\right)=\\&=n!\frac{n-1}{2}+n!\frac{n-2}{2}+n\cdot(n-1)\cdot F(n-2).\end{aligned} \tag{20}$$

Далее, действуя аналогично, приводим формулу к следующему виду:

$$F(n)=n!\frac{n-1}{2}+n!\frac{n-2}{2}+\ldots+n!\frac{1}{2}+n!\cdot F(1)=\frac{n!}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n!\cdot F(1). \tag{21}$$

Поскольку $F(1)$ – количество перестановок для матрицы, имеющей размер 1×1, т. е. состоящей из единственного элемента, $F(1)=0$. Подставляя это значение в формулу (21), получаем окончательный вид искомой функции:

$$F(n)=\frac{n!}{4}(n^2-n). \tag{22}$$

Наконец, необходимо учесть то обстоятельство, что при выводе формул (19) и (22) мы правомерно исходили из того, что максимальная несогласованность экспертных оценок (при которой $\alpha=1$) достигается в том случае, когда количество столбцов матрицы представляет собой факториал от числа ее строк. Однако реальное количество экспертов, привлекаемых к решению той или иной задачи ранжирования факторов, не обязательно окажется равно факториалу количества этих факторов. В целях обеспечения адекватного поведения функции (17) необходимо умножить $F(n)$ на дополнительный нормирующий коэффициент, равный отношению факториала количества ранжируемых факторов к количеству экспертов. С учетом этого итоговый нормирующий коэффициент формулы (17) для матрицы экспертных оценок, содержащей n строк (т. е. для n ранжируемых экспертами факторов), вычисляется по формуле:

$$\alpha=\frac{1}{F(n)\cdot\dfrac{n!}{m}}=\frac{m}{\dfrac{(n!)^2}{4}(n^2-n)}=\frac{4m}{(n!)^2(n^2-n)}. \tag{23}$$

А формула (17) с учетом подстановки значения данного коэффициента примет вид:

$$c(A)=1-\frac{4m}{(n!)^2(n^2-n)}f(A). \tag{24}$$

Итак, вычислив минимальное количество попарных перестановок соседних элементов матрицы экспертных оценок, приводящее все ее столбцы к единому виду (который мы выше назвали усредненной экспертной оценкой), $f(A)$ и подставив его в формулу (24), мы получим величину, характеризующую степень согласованности мнений экспертов. При этом мы доказали, что формула (24) будет удовлетворять необходимым свойствам функции конкордации 1, 2, 4, 5, 6.

Покажем, что данная функция не удовлетворяет свойству 3, и дополним метод расчета значения соответствующего показателя в целях соблюдения данного необходимого условия. Рассмотрим матрицу *A*, заданную таблицей 4.

Таблица 4 – Пример распределения экспертных оценок с полным совпадением рангов (2), присвоенных экспертами одному из факторов

Номер анализируемого фактора	**Номер эксперта**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	3	1	3	1	3
2	2	2	2	2	2	2
3	3	1	3	1	3	1

Рассчитаем для нее значение функции $f(A)$. Как видим, матрица подобрана таким образом, что в качестве усредненной экспертной оценки в смысле (15) можно рассматривать любой вектор, состоящий из трех элементов: $(3,2,1)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(3,1,2)$, $(1,3,2)$ или $(1,2,3)$. При этом значение $f(A)$, вычисленное по формуле (14), для каждого из них будет равно 9, т. е. $c(A)=0$:

$$c(A)=1-\frac{4}{6(3^2-3)}\cdot 9=0.$$

Таким образом, мы привели контрпример, показывающий, что свойство 3 для функции (24) не выполняется: матрица не принадлежит к категории максимально несогласованных матриц $B_{n\times n!}$, однако показатель согласованности $c(A)$ равен нулю. Причина этого заключается в том, что приведенный выше порядок расчета $f(A)$ нечувствителен к совпадению отдельных элементов вектора усредненной оценки и столбцов матрицы. Так, если в качестве усредненного мы выберем вектор $(3,2,1)$, то мера (6) для данного вектора и 1-го столбца матрицы (таблица 4) будет равна трем, что является максимальным значением для матрицы, содержащей 3 строки:

$$V_{сред.}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=A_1, \tag{25}$$

где $V_{сред.}$ – вектор одной из усредненных экспертных оценок;

A_1 – первый столбец матрицы, соответствующей таблице 4.

У векторов $V_{сред.}$ и A_1 вторые элементы совпадают, что воспринимается как признак некоторой согласованности соответствующих экспертных оценок. Мнения, выраженные данными векторами, воспринимаются как отличающиеся всего в одной паре значений: для их приведения к единому виду нужно в любом из них переставить 1-й и 3-й элементы. Однако требование о возможности переставлять лишь соседние элементы вынуждает провести для этого 3 перестановки (25). Вместе с тем мы не можем позволить при вычислении меры переставлять любые (не соседние) элементы, поскольку в этом случае количество перестановок не будет адекватно отражать степень близости сопоставляемых экспертных оценок.

Уточним порядок расчета меры (11). После выполнения инвариантной подстановки (9), (10) (либо до нее, в данном случае это не имеет значения) удалим из векторов V_1 и V_2 совпадающие значения, т. е. сформируем новые «редуцированные» векторы $V_1^{ред.}$ и $V_2^{ред.}$, состоящие только из несовпадающих элементов. Например, для приведенных в (25) векторов $V_{сред.}$ и A_1 «редуцированные» векторы будут выглядеть так:

$$V_{сред.}^{ред.}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ A_1^{ред.}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Как видим, подобное уточнение, с одной стороны, позволяет выполнить требование 3 и привести функцию к более адекватному виду, с другой стороны, не «потерять» при вычислении показателя конкордации небольшие различия в согласованности экспертных оценок.

Дальнейший алгоритм остается без изменений, за исключением величины нормирующего коэффициента (22). Понятно, что поскольку изменился порядок расчета меры (11), изменится и количество перестановок для приведения максимально несогласованной матрицы к виду $E_{n\times m}$. Поскольку мы в отдельных случаях сократили размерность сравниваемых векторов, количество таких перестановок должно уменьшиться. Рассчитаем значение данного коэффициента с учетом произведенных изменений в порядке вычисления меры (11).

В максимально несогласованной матрице размера $n\times n!$ содержится $n\cdot n!$ элементов, из которых $n!$ стоят на «своих» местах (под нахождением элемента матрицы «на своем месте» мы будем понимать нахождение элемента i в i-й строке). Переставим столбцы матрицы таким образом, чтобы первые $(n-1)!$ элементов 1-й строки содержали единицы (рисунок 2), и посчитаем, сколько перестановок мы «сэкономили» по сравнению со «старым» вариантом расчета (11), без «редуцирования» векторов.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_{21} & \cdots & b_{2(n-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{(n-1)1} & \cdots & b_{(n-1)(n-1)!} \\ b_{n1} & \cdots & b_{n(n-1)!} \end{matrix}}_{\substack{(n-1)! \\ \text{1-я группа}}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} b_{1((n-1)!+1)} & \cdots & b_{1n!} \\ b_{2((n-1)!+1)} & \cdots & b_{2n!} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{(n-1)((n-1)!+1)} & \cdots & b_{(n-1)n!} \\ b_{n((n-1)!+1)} & \cdots & b_{nn!} \end{matrix}}_{\substack{n!-(n-1)! \\ \text{2-я группа}}}\right)$$

Рисунок 2 – Группировка столбцов матрицы $B_{n\times n!}$ с выделением единиц, стоящих в 1-й строке

Очевидно, что нахождение единиц на «своем» месте ничего не изменит с точки зрения количества перестановок, поскольку выше строки с единицами не содержится элементов, больших 1 (нет строк, выше первой), следовательно, количество перестановок не будет отличаться от вычисляемого по формуле (11) без «редуцирования». Проведем аналогичную группировку для стоящих во второй строке двоек (рисунок 3)[1].

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1(n-1)!} \\ 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{(n-1)1} & \cdots & b_{(n-1)(n-1)!} \\ b_{n1} & \cdots & b_{n(n-1)!} \end{matrix}}_{\substack{(n-1)! \\ \text{1-я группа}}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} b_{1((n-1)!+1)} & \cdots & b_{1n!} \\ b_{2((n-1)!+1)} & \cdots & b_{2n!} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{(n-1)((n-1)!+1)} & \cdots & b_{(n-1)n!} \\ b_{n((n-1)!+1)} & \cdots & b_{nn!} \end{matrix}}_{\substack{n!-(n-1)! \\ \text{2-я группа}}}\right)$$

Рисунок 3 – Группировка столбцов матрицы $B_{n\times n!}$ с выделением двоек, стоящих во 2-й строке

Среди элементов $b_{11},\dots,b_{1(n-1)!}$ будет ровно $(n-2)!$ единиц, а остальные $(n-1)!-(n-2)!$ элементов будут числами, большими 2. Следовательно, количество «сэкономленных» перестановок с учетом нахождения двоек во второй строке матрицы будет равно $\left((n-1)!-(n-2)!\right)\cdot 2$ или, что то же самое, $(n-2)(n-2)!\cdot 2$. Умножение на 2 связано с тем, что на каждой паре чисел, переносимых через 2-ю строку, «экономится» 2 перестановки (сравним, например, (25) – 3 перестановки и (26) – одна перестановка).

Для 3-й строки соответствующая экономия составит $2\cdot\left((n-1)!-2\cdot(n-2)!\right)\cdot 2$ или $2\cdot(n-3)(n-2)!\cdot 2$. Умножение на 2 перед скобками появилось вследствие того, что выше 3-й строки находятся 2 строки, каждая из которых вносит свой вклад в «экономию» перестановок. Повторяя данные рассуждения для строк с 4-й по n-ю, получаем, что для i-й строки «экономия» составит:

$$(i-1)(n-i)(n-2)!\cdot 2\,. \tag{27}$$

Просуммируем «экономию» для всех n строк:

1 Отметим, что b_{ij} на рисунке 2 не совпадает с b_{ij} на рисунке 3.

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-i)(n-2)!\cdot 2=2\cdot(n-2)!\left(\sum_{i=1}^{n}i(n+1)-\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}n\right)=2\cdot(n-2)!\left((n+1)\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2-n^2\right)=$$
$$=2\cdot(n-2)!\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^2\right)=2\cdot(n-2)!\frac{n^3-3n^2+2n}{6}=$$
$$=2\cdot(n-2)!\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n!(n-2)}{3}.$$

Эту величину необходимо вычесть из формулы (22) для получения уточненного значения $F(n)$:

$$F(n)=\frac{n!}{4}(n^2-n)-\frac{n!(n-2)}{3}=n!\frac{3n^2-7n+8}{12}. \qquad (28)$$

После умножения на нормирующий коэффициент $\frac{n!}{m}$ получаем уточненное значение $\alpha=\frac{1}{F(n)}$:

$$\alpha=\frac{12m}{(n!)^2(3n^2-7n+8)}. \qquad (29)$$

Резюмируем вышесказанное в виде алгоритма вычисления предлагаемого коэффициента конкордации для матрицы экспертных оценок *A*, имеющей размер $n\times m$:

1. Выбираем векторы вида (2), претендующие на роль усредненной экспертной оценки для матрицы *A*. Наиболее простым (однако требующим проведения большего количества вычислений) является полный перебор всех возможных векторов. В этом случае в качестве таковых должны выступать столбцы матрицы $\{B_{n\times n!}\}$.

2. Для каждого из выбранных на предыдущем этапе векторов *V* выполняем следующие операции:

 2.1. Для вектора *V* по формуле (9) выбираем инвариантную подстановку и применяем ее к матрице *B*; в результате получаем матрицу B^*.

 2.2. По формулам (14) и (11) вычисляем меру для вектора $E_{n\times 1}$ и матрицы B^* (с учетом «редуцирования» векторов, т. е. удаления из них совпадающих элементов, при вычислении меры).

3. Выбираем минимальное значение меры из набора полученных для всех рассматриваемых векторов (обозначим его $M=f(A)$). Тем самым на данном этапе в качестве «побочного эффекта» (а в действительности – в качестве дополнительного бонуса) мы получаем саму усредненную экспертную оценку (или их совокупность), которая понадобится нам в дальнейшем, при интерпретации результатов экспертного опроса.

4. Подставляем данное значение *M* в следующую формулу:

$$\mathrm{conc}(A)=1-\frac{12m}{(n!)^2(3n^2-7n+8)}\cdot M. \qquad (30)$$

Полученное значение будет обладать всеми перечисленными выше необходимыми свойствами коэффициента конкордации.

В качестве демонстрации адекватности поведения данной функции рассмотрим ее значения для экспертных оценок, представленных выше в таблицах 2-3, а также для наборов экспертных мнений из [1], на которых функция Кэнделла ведет себя неадекватно.

Для обеих матриц, соответствующих таблицам 2 и 3, $\mathrm{conc}(A)=0{,}75$, что заведомо более адекватно отражает согласованность представленных в таблицах экспертных оценок, чем коэффициент Кэнделла ($W(A)=0$ для таблицы 2 и $W(A)=0{,}9$ для таблицы 3).

Рассмотрим распределение экспертных оценок, приведенное в таблице 5. На первый взгляд, оно может показаться полностью несогласованным. Действительно, для каждого из трех факторов равное количество экспертов выставили каждый из возможных рангов. Однако это не так. Несмотря на высокую несогласованность мнений, мы видим, например, что ни один эксперт не выставил 1-й ранг первому вопросу и при этом 2-й ранг третьему или 3-й ранг второму. Нет такого эксперта, который, выставив 2-й ранг второму фактору, присвоил бы 1-й ранг третьему. Поэтому просматриваются отличия от *максимально несогласованного* распределения (таблица 1).

Таблица 5 – Пример несогласованного распределения экспертных оценок

Номер вопроса	Номер эксперта					
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	1	2	3
2	2	3	1	2	3	1
3	3	1	2	3	1	2

Коэффициент Кэнделла для такого распределения будет равен нулю. Однако согласно обоснованным выше свойствам, более адекватный показатель конкордации должен быть положительным. Для распределения, приведенного в таблице 5, $\mathrm{conc}(A)=0{,}14$, что говорит о весьма низкой, но все-таки ненулевой согласованности мнений экспертов.

Рассмотрим следующий пример из [1] (таблица 6). Коэффициент Кэнделла для такого распределения равен 0,75, а $\mathrm{conc}(A)=0{,}57$. Такое же значение предлагаемого нами коэффициента конкордации мы получим для таблицы 4, весьма похожей на таблицу 6. Коэффициент же Кэнделла для таблицы 4 равен нулю.

Таблица 6 – Пример распределения экспертных оценок с полным совпадением рангов (1), присвоенных экспертами одному из факторов, $W=0{,}75$

Номер анализируемого фактора	Номер эксперта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	3	2	3	2	3	2	3	2	3

В качестве одного из примеров нелогичного поведения функции Кэнделла в [1] приведено сравнение ее значений для таблиц 6 и 7. Коэффициент конкордации Кэнделла для этих весьма похожих распределений экспертных оценок отличается на порядок: для таблицы 6 – $W=0{,}07$, для таблицы 7 – $W=0{,}60$. Обоснованный в настоящей работе коэффициент конкордации для обеих таблиц имеет одно и то же значение 0,57.

Таблица 6 – Пример распределения экспертных оценок для четырех анализируемых факторов с полным совпадением рангов (1), присвоенных экспертами одному из факторов, $W=0{,}07$

Номер анализируемого фактора	Номер эксперта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	3	4	1	3	4	1	3	4
3	3	4	1	3	4	1	3	4	1
4	4	1	3	4	1	3	4	1	3

Наконец, последний из примеров абсурдных значений согласованности мнений экспертов «по Кэнделлу», рассмотренных в [1], приведен в таблицах 8, 9. Для таблицы 8 его значение равно 0,9, а для таблицы 9 – нулю. Наш коэффициент имеет значение 0,75 для обеих таблиц.

Таблица 7 – Пример распределения экспертных оценок для четырех анализируемых факторов с полным совпадением рангов (1), присвоенных экспертами одному из факторов, $W = 0{,}60$

Номер анализируемого фактора	Номер эксперта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	2	3	4	2	3	4
3	3	4	2	3	4	2	3	4	2
4	4	2	3	4	2	3	4	2	3

Таблица 8 – Пример распределения экспертных оценок для пяти анализируемых факторов с полным совпадением рангов (1), присвоенных экспертами одному из факторов, и разделившимися в отношении 50/50 рангами для остальных анализируемых объектов, $W = 0{,}90$

Номер анализируемого фактора	Номер эксперта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
2	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
5	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Таблица 9 – Пример распределения экспертных оценок для пяти анализируемых факторов с полным совпадением рангов (3), присвоенных экспертами одному из факторов, и разделившимися в отношении 50/50 рангами для остальных анализируемых объектов, $W = 0$

Номер анализируемого фактора	Номер эксперта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5
2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4
5	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2

Достоинства предлагаемого метода расчета показателя согласованности мнений экспертов (особенно по сравнению с функцией Кэнделла) очевидны, поэтому остановлюсь на его **недостатках**, как реальных, так и мнимых.

Прежде всего, можно предположить указание в качестве недостатка предлагаемого метода сложность его вычисления вручную. Этот «недостаток» явно относится к категории мнимых, поскольку нормирующий коэффициент (29) ненамного сложнее функции Кэнделла (1), кроме того, его значение может быть взято из таблицы на рисунке 4. Если подобное возражение и имело право на существование в 1930-е годы (когда был предложен коэффициент Кэнделла), то в настоящее время, когда подобные расчеты производятся на ЭВМ, оно выглядит устаревшим.

n \ m	5	6	7	8	9	10
3	8.400	7.000	6.000	5.250	4.667	4.200
4	$2.688\cdot10^{+02}$	$2.240\cdot10^{+02}$	$1.920\cdot10^{+02}$	$1.680\cdot10^{+02}$	$1.493\cdot10^{+02}$	$1.344\cdot10^{+02}$
5	$1.152\cdot10^{+04}$	$9.600\cdot10^{+03}$	$8.229\cdot10^{+03}$	$7.200\cdot10^{+03}$	$6.400\cdot10^{+03}$	$5.760\cdot10^{+03}$
6	$6.394\cdot10^{+05}$	$5.328\cdot10^{+05}$	$4.567\cdot10^{+05}$	$3.996\cdot10^{+05}$	$3.552\cdot10^{+05}$	$3.197\cdot10^{+05}$
7	$4.488\cdot10^{+07}$	$3.740\cdot10^{+07}$	$3.205\cdot10^{+07}$	$2.805\cdot10^{+07}$	$2.493\cdot10^{+07}$	$2.244\cdot10^{+07}$
8	$3.902\cdot10^{+09}$	$3.251\cdot10^{+09}$	$2.787\cdot10^{+09}$	$2.439\cdot10^{+09}$	$2.168\cdot10^{+09}$	$1.951\cdot10^{+09}$
9	$4.126\cdot10^{+11}$	$3.438\cdot10^{+11}$	$2.947\cdot10^{+11}$	$2.579\cdot10^{+11}$	$2.292\cdot10^{+11}$	$2.063\cdot10^{+11}$
10	$5.223\cdot10^{+13}$	$4.353\cdot10^{+13}$	$3.731\cdot10^{+13}$	$3.265\cdot10^{+13}$	$2.902\cdot10^{+13}$	$2.612\cdot10^{+13}$
11	$7.807\cdot10^{+15}$	$6.506\cdot10^{+15}$	$5.577\cdot10^{+15}$	$4.880\cdot10^{+15}$	$4.337\cdot10^{+15}$	$3.904\cdot10^{+15}$
12	$1.361\cdot10^{+18}$	$1.134\cdot10^{+18}$	$9.724\cdot10^{+17}$	$8.508\cdot10^{+17}$	$7.563\cdot10^{+17}$	$6.807\cdot10^{+17}$
13	$2.740\cdot10^{+20}$	$2.283\cdot10^{+20}$	$1.957\cdot10^{+20}$	$1.713\cdot10^{+20}$	$1.522\cdot10^{+20}$	$1.370\cdot10^{+20}$
14	$6.308\cdot10^{+22}$	$5.257\cdot10^{+22}$	$4.506\cdot10^{+22}$	$3.943\cdot10^{+22}$	$3.504\cdot10^{+22}$	$3.154\cdot10^{+22}$
15	$1.647\cdot10^{+25}$	$1.373\cdot10^{+25}$	$1.177\cdot10^{+25}$	$1.030\cdot10^{+25}$	$9.152\cdot10^{+24}$	$8.237\cdot10^{+24}$

Рисунок 4 – Приближенные значения α^{-1} для некоторых n и m

В качестве замечания, с которым частично можно согласиться, я бы упомянул высокую (экспоненциально возрастающую) вычислительную сложность данного метода. Однако для задач экспертного опроса, в которых ранжируется не более 10 факторов, обычная персональная ЭВМ легко справляется с подобной задачей. Кроме того, автор видит возможность многократного снижения вычислительной сложности алгоритма за счет замены простого перебора векторов-столбцов матрицы $B_{n\times n!}$ на выборочную проверку значений, претендующих на роль усредненной экспертной оценки. Вопросы оптимизации вычислительной процедуры могут быть рассмотрены отдельно.

Безусловно, метод Кэнделла имеет намного меньшую вычислительную сложность, чем обоснованный в настоящей работе. Однако здесь хочется вспомнить известный пример диалога двух программистов, приведенный Э. Йоданом в книге «Приемы построения и проектирования программ» [3] еще в 1975 году:

Программист А: «Моя программа в десять раз быстрее вашей и она занимает в три раза меньше памяти!»

Программист Б: «Да, но ваша программа не работает, а моя – работает!»

Безусловным достоинством предлагаемого метода является то, что он, в отличие от метода Кэнделла, работает.

Список использованных источников

1. Венедиктов А.А., Серебряков К.Г. Характеризует ли коэффициент ранговой конкордации степень согласованности экспертных оценок? // Вооружение и экономика. – 2017. – № 2 (39). – С. 5-10.

2. Kendall M.G., Smith B.B. The Problem of m Rankings // Annals of Mathematical Statistics. – 1939. – № 10. – P. 275-287.

3. Yourdon E. Techniques of program structure and design. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.