В.Ю. Чуев, кандидат технических наук
И.В. Дубограй
Р.А. Рябцев, кандидат технических наук

# Стохастические модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с переменными эффективными скорострельностями боевых единиц сторон при упреждающем ударе одной из них[1]

*На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны вероятностные модели двухсторонних боевых действий с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон, позволяющие вычислить основные показатели боя многочисленных группировок. Проведено сравнение с результатами моделирования боя при использовании детерминированной модели с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей от времени боя, а также с вероятностными моделями боя с постоянными эффективными скорострельностями. Установлена область применимости моделей этих типов. Исследовано влияние упреждающего удара одной из противоборствующих сторон на исход и основные показатели боя.*

## Введение

При создании новых технических систем возникает необходимость построения математической модели их функционирования [1]. Основой оценки разрабатываемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, позволяющие оценить степень приспособленности данного образца к решению поставленных боевых задач [2-5]. В качестве основы такой оценки необходимо использовать модели двухсторонних боевых действий, так как они позволяют более достоверно учесть большее число факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учета ответного огня [3]. А поскольку бой является стохастическим процессом, в качестве основы такой оценки предпочтительно использовать вероятностные модели боевых действий, так как они позволяют описать процесс протекания боя со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних), одновременно являясь более простыми и гибкими в использовании, чем статистические модели боя.

Одним из возможных методов построения вероятностной модели двухсторонних боевых действий является использование теории непрерывных марковских процессов [6]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [7].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [2]. Используется также прием, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовем успешным, если он поражает боевую единицу противника [3].

В настоящее время разработаны марковские модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок как при одновременном открытии огня противоборствующих сто-

1 Статья подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-08-00502.

рон, так и при упреждающем ударе одной из них [8]. Однако эти модели имеют довольно существенный недостаток – эффективные скорострельности боевых единиц сторон полагаются в течение всего боя постоянными, что не всегда приемлемо при отображении реальных боевых действий. Так, например, анализ боевых действий противотанковой обороны, осуществляемой различными противотанковыми средствами, показывает, что во время боя эффективные скорострельности единиц как наступающей, так и обороняющейся стороны, претерпевают значительные изменения. При атакующих действиях группировки танков происходит сближение сторон, приводящее к уменьшению дальности стрельбы, в результате чего существенно возрастает точность стрельбы танковых и противотанковых орудий. Также, при уменьшении дальности стрельбы при небольших скоростях противотанковых управляемых ракет (ПТУР) существенно уменьшается время полета ракеты до цели, что приводит к значительному повышению скорострельности (при больших скоростях ПТУР это проявляется в меньшей степени). Кроме того, разработка модели боя с переменными скорострельностями боевых единиц позволит адекватно оценивать эффективность комплексов вооружения, состоящих из нескольких типов оружия. Например, в танках это могут быть комплексы управляемого вооружения (КУВ), более эффективные, чем артиллерийское вооружение на дальностях свыше 3 км, для боевых машин пехоты (БМП) или боевых машин поддержки танков (БМПТ) состав вооружения может быть еще более сложным (КУВ, автоматический гранатомет, автоматическая пушка, пулемет).

Ранее были исследованы модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с переменными эффективными скорострельностями при одновременном открытии огня обеими сторонами [9]. В настоящей работе исследуются модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с переменными эффективными скорострельностями боевых единиц сторон при упреждающем ударе одной из них.

**Описание процесса протекания боя. Основные математические зависимости и формулы**

Пусть в начале боя сторона *X* имеет *m* однотипных боевых единиц, а сторона *Y* имеет *n* также однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны *X*. Введем следующие обозначения: $p_x$, $p_y$ – вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон *X* и *Y* соответственно, $\lambda_x$, $\lambda_y$ – практические скорострельности боевых единиц сторон *X* и *Y* соответственно, величины $v=p_x\lambda_x$ и $u=p_y\lambda_y$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц сторон.

Проведенные теоретические исследования, а также экспериментальные данные показали, что во многих ситуациях необходимо учитывать изменение эффективных скорострельностей боевых единиц сторон в течение боя. В ряде случаев их хорошей аппроксимацией являются экспоненциальные функции времени боя, то есть:

$$v=k_x e^{a_x t},\ u=k_y e^{a_y t}.$$

Считаем, что противоборствующие стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам. Также полагаем, что хорошая маскировка боевых единиц стороны *X* позволяет им в течение времени $t_c$ вести огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия. Тогда в течение времени $t_c$ процесс протекания боя опишется системой уравнений:

$$\begin{cases} F'_{m0}(t)=mk_x e^{a_x t}F_{m1}(t), \\ F'_{mj}(t)=mk_x e^{a_x t}\left(F_{m;j+1}(t)-F_{mj}(t)\right); j=\overline{1;n-1}, \\ F'_{mn}(t)=-mk_x e^{a_x t}F_{mn}(t), \\ F'_{ij}(t)=0; i=\overline{0;m-1}; j=\overline{0;n} \end{cases}$$

с начальными условиями $F_{mn}(0)=1$, $F_{ij}(t)=0$, $i+j<m+n$,

где $F_{ij}(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t$ сохранились $i$ единиц стороны $X$ и $j$ единиц стороны $Y$ (вероятность состояния $i:j$),

$F'_{ij}(t)$ – ее производная по времени.

В момент времени $t_c$ открытия стороной $Y$ ответного огня получаем:

$$\begin{cases} F_{mn}(t_c)=e^{-c}=c_m, \\ F_{mj}(t_c)=\dfrac{c^{n-j}}{(n-j)!}e^{-c}=c_j, j=\overline{1;n-1}, \\ F_{m0}(t_c)=1-\sum\limits_{j=1}^{n}F_{mj}(t_c)=c_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $c=\dfrac{m\cdot kx}{a_x}\left(e^{a_x t}-1\right)$.

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений:

$$\begin{cases} F'_{i0}(t)=ik_x e^{a_x t}F_{i1}(t), \quad i=\overline{1,m} \\ F'_{0j}(t)=jk_y e^{a_y t}F_{1j}(t), \quad j=\overline{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F'_{ij}(t)=-(ik_x e^{a_x t}+jk_y e^{a_y t})F_{ij}(t)+ik_x e^{a_x t}F_{i,j+1}(t)+jk_y e^{a_y t}F_{i+1,j}(t), \quad i=\overline{1,m-1}; j=\overline{1,n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F'_{mj}(t)=-(mk_x e^{a_x t}+jk_y e^{a_y t})F_{mj}(t)+mk_x e^{a_x t}F_{m,j+1}(t), \quad j=\overline{1,n-1}, \\ F'_{i,n}(t)=-(ik_x e^{a_x t}+nk_y e^{a_y t})F_{i,n}(t)+nk_y e^{a_y t}F_{i+1,n}(t), \quad i=\overline{1,m-1}, \\ F'_{mn}(t)=-(mk_x e^{a_x t}+nk_y e^{a_y t})F_{mn}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями (1).

Полагая, что бой ведется до полного уничтожения одной из противоборствующих сторон, получаем, что окончательными состояниями системы являются:

$$(1:0),\dots(i:0),\dots(m:0),\dots(0:1),\dots(0:j),\dots(0:n).$$

Авторами разработан численный алгоритм, позволяющий вычислить вероятности текущих и окончательных состояний, а также основные показатели боя многочисленных группировок. К ним, в первую очередь, относятся: $P_{0x}$ и $P_{0y}$ – вероятности победы сторон $X$ и $Y$ соответственно, $M_x$ и $M_y$ – математические ожидания относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя.

Для боя $m:n$ эти величины вычисляются следующим образом:

$$P_{0x}=\sum_{i=1}^{m}F_{i0}(\infty),\ P_{0y}=\sum_{j=1}^{n}F_{0j}(\infty),\ M_x=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}iF_{i0}(\infty),\ M_y=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}jF_{0j}(\infty),$$

где $F_{ij}(\infty)$ – вероятности того, что к концу боя сохранились *i* единиц стороны *X* и *j* единиц стороны *Y*.

Аналогично опишется процесс протекания боя и вычисляются его основные показатели при упреждающем ударе стороны *Y*. Для дуэльного боя:

$$P_{0x}=M_x=F_{10}(\infty),\ P_{0y}=M_y=F_{01}(\infty).$$

**Анализ результатов расчетов**

Исследуем возможность использования для решения военно-технических и военно-тактических задач более простых моделей двухсторонних боевых действий: вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями боевых единиц и модели динамики средних с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя. Для этого проведем сравнение результатов моделирования боя при использовании различных моделей.

Введем следующие обозначения:

$$\mu=\frac{\sqrt{k_x k_y}}{a_x+a_y},\ \nu=\frac{a_y}{a_x+a_y},\ \xi=\frac{n}{m}\sqrt{\frac{k_y}{k_x}}.$$

Параметр $\mu$ характеризует степень роста интенсивности протекания боя (чем меньше $\mu$, тем быстрее она растет). В реальных боевых условиях $\mu\geqslant 1$ (в большинстве случаев $\mu\geqslant 2$). Параметр $\nu$ характеризует относительную скорость изменения эффективных скорострельностей боевых единиц одной из противоборствующих сторон относительно другой в процессе боя. Отметим, что $\nu\in[0;1]$. При $\nu=1$ значение $a_x=0$ (то есть эффективные скорострельности боевых единиц стороны X в течение всего боя постоянны), при $\nu=0$ величина $a_y=0$, а при $\nu=0{,}5$ получаем $a_x=a_y$. Параметр æ назовем параметром начального соотношения сил. Отметим, что для модели динамики средних с постоянными эффективными скорострельностями при одновременном открытии огня обеими сторонами значение $\xi=1$ является условием равенства сил противоборствующих группировок [9].

На рисунках 1-6 представлены результаты расчетов, полученные с использованием разработанного авторами численного алгоритма вычисления основных показателей боя. Значения $M_x$ и $M_y$, полученные с использованием представленной в настоящей статье модели, показаны соответственно красными и зелеными линиями. Значения $M_x$ и $M_y$, полученные методом динамики средних – синими и черными линиями.

Рисунки 1 и 4 соответствуют равным начальным численностям группировок ($m=n$), рисунки 2 и 5 соответствуют ситуации, когда начальные численности стороны *Y* в 5 раз превосходят начальные численности стороны *X* ($n=5m$), а рисунки 3 и 6 – ситуации, когда начальные численности стороны *X* в 5 раз превосходят начальные численности стороны *Y* ($m=5n$). Рисунки 1-3 соответствуют значению $\nu=0$ $(a_y=0)$, а рисунки 4-6 соответствуют значению $\nu=1$ $(a_x=0)$, то есть тем значениям $\nu$, которые наиболее сильно влияют на ход протекания боя и его основные показатели.

Все рисунки соответствуют значениям $\mu=1$ и $\bar{t}_c=0{,}5$, где $\bar{t}_c=\sqrt{k_x k_y}\,t_c$ – приведенное время нанесения стороной *X* упреждающего удара. Значение $\bar{t}_c=0{,}5$ соответствует проведению единицами стороны *X* по одному-двум выстрелам до открытия стороной *Y* ответного огня, так как в реальных боевых условиях после проведения боевой единицей одного-двух выстрелов она будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь. При упреждающем ударе стороны Y получаем аналогичные результаты.

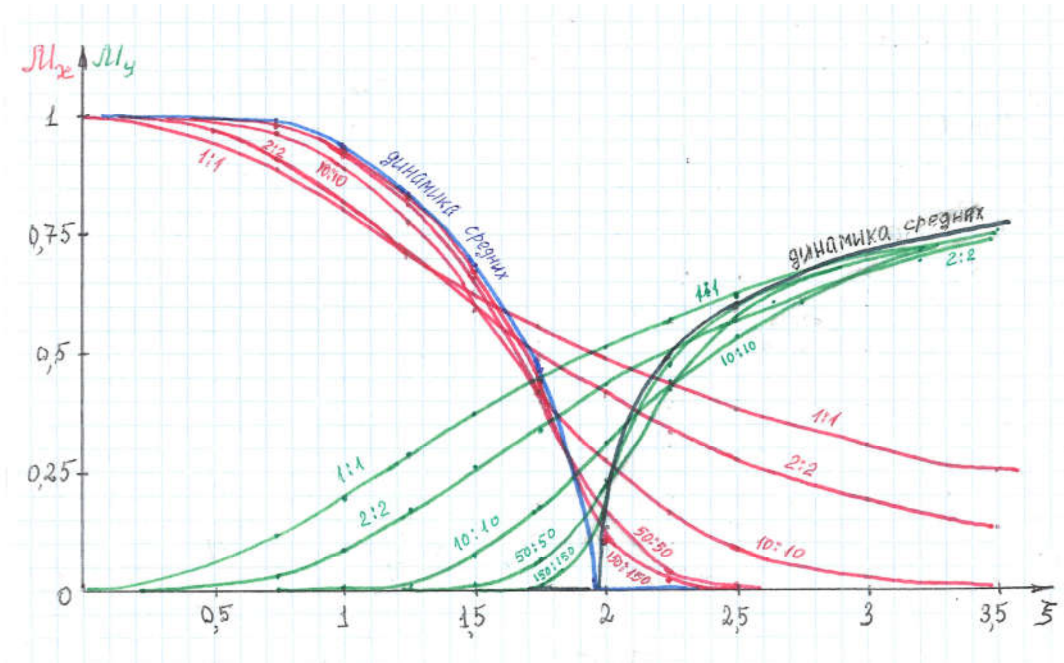


Рисунок 1 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны $X$ ( $m=n$ , $\nu=0$ , $\mu=1$ , $\bar{t}_c=0,5$ ).

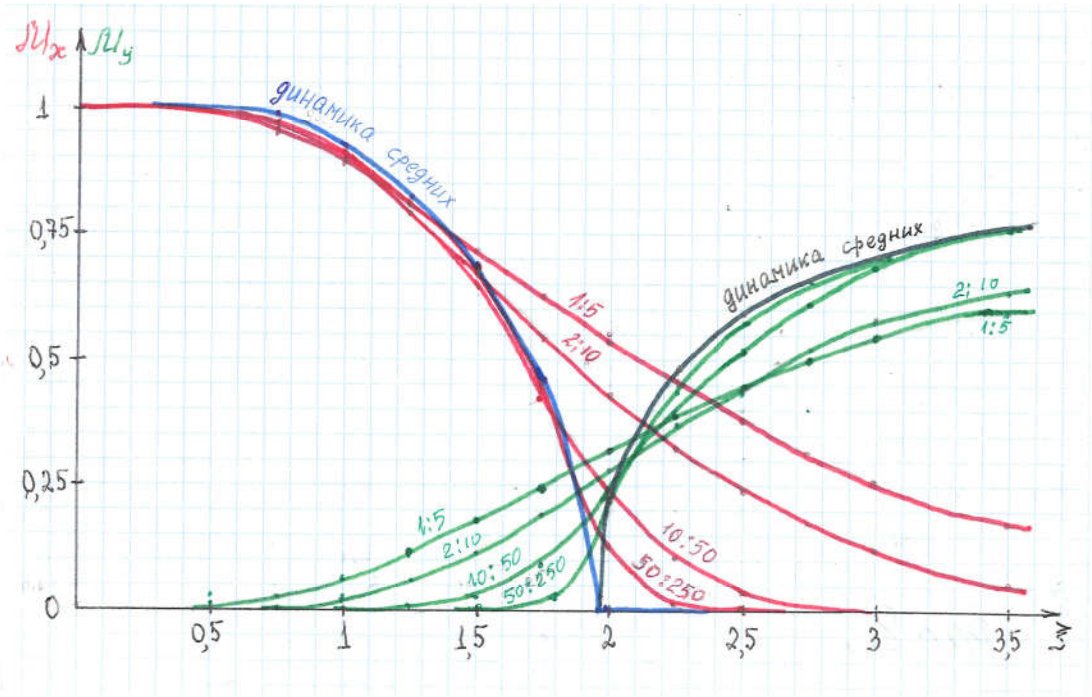


Рисунок 2 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны $X$ ( $n=5m$ б $\nu=0$ , $\mu=1$ , $\bar{t}_c=0,5$ ).

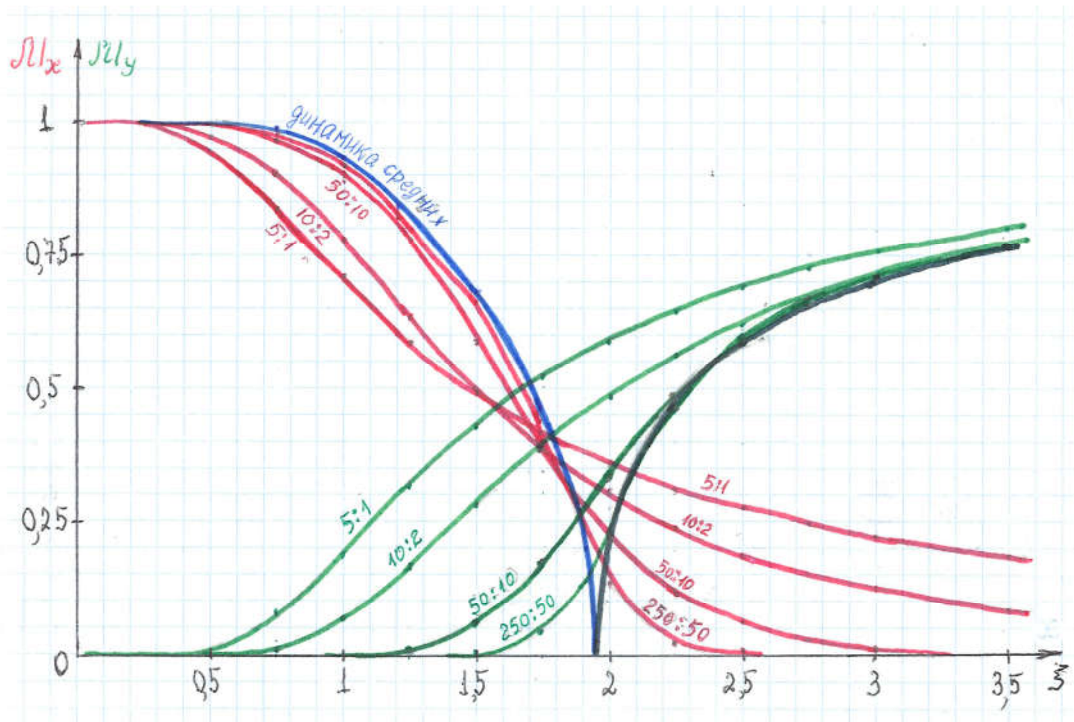


Рисунок 3 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны *X* ( $m = 5n$ , $\nu = 0$ , $\mu = 1$ , $\bar{t}_c = 0{,}5$ )

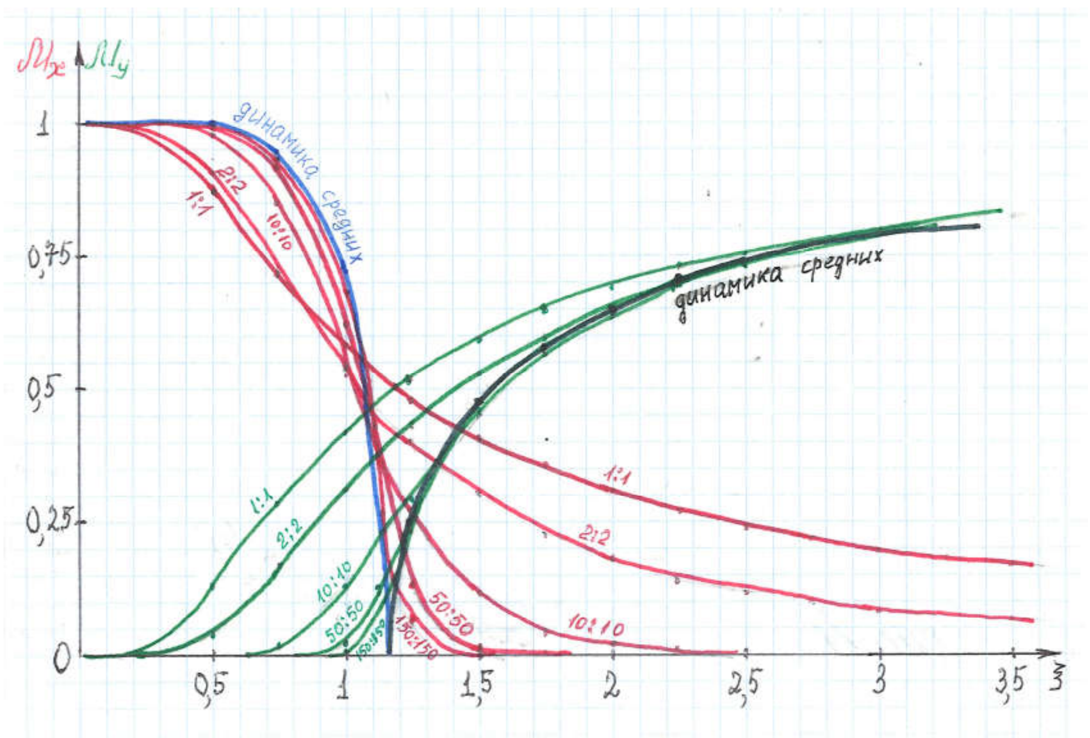


Рисунок 4 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны *X* ($m = n$, $\nu = 1$ , $\mu = 1$ , $\bar{t}_c = 0{,}5$ )

Как показали расчеты, на ошибки моделей динамики средних влияет в первую очередь соотношение сил противоборствующих группировок, а не их начальные численности. Так, для боя $150:50$ при упреждающем ударе стороны *X* при $\xi = 1{,}74$ , $\mu = 1$ , $\nu = 0{,}2$ , получаем $M_x = 0{,}211$

и $M_y = 0{,}167$ (для модели динамики средних $M_x = 0{,}144$, $M_y = 0{,}000$), то есть ошибка в определении $M_y$ превосходит 16%.

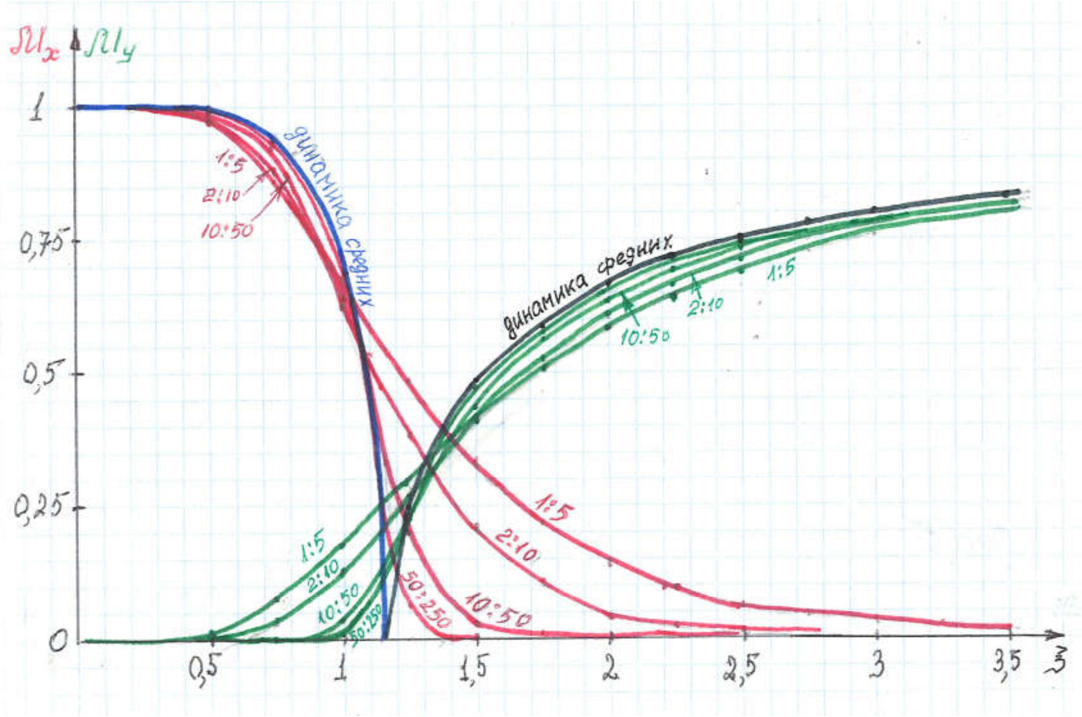


Рисунок 5 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны $X$ ($n = 5m$, $\nu = 1$, $\mu = 1$, $\bar{t}_c = 0{,}5$)

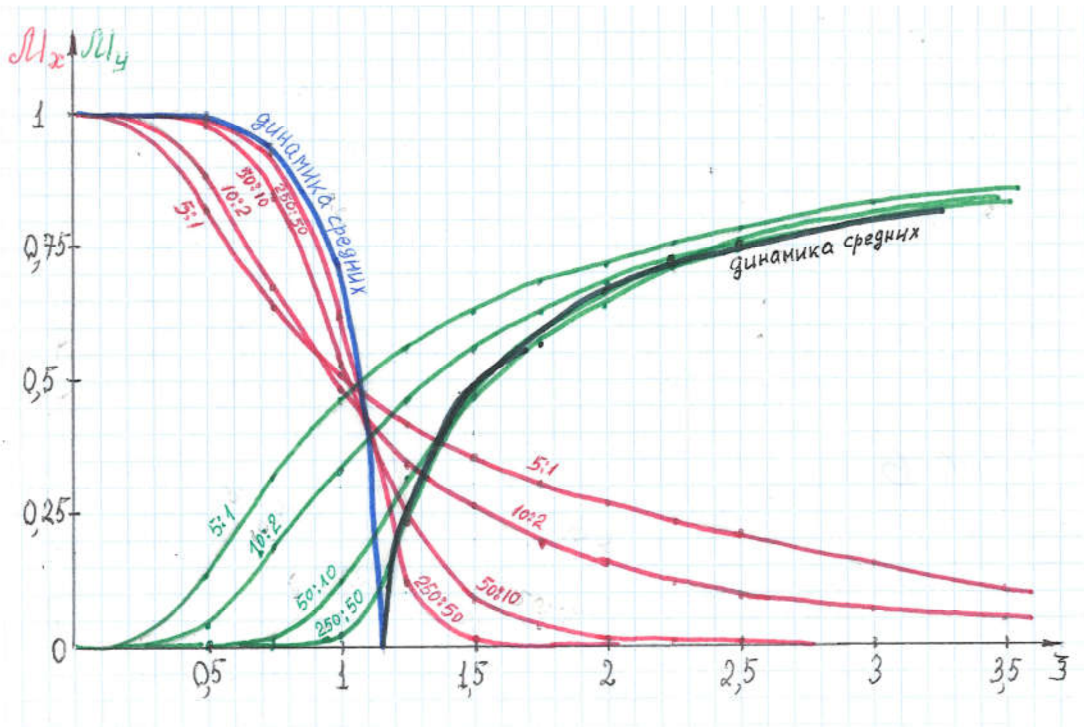


Рисунок 6 – Математические ожидания $M_x$ и $M_y$ относительных численностей сохранившихся боевых единиц к концу боя при упреждающем ударе стороны $X$ ($m = 5n$, $\nu = 1$, $\mu = 1$, $\bar{t}_c = 0{,}5$)

А для боя $100:100$ при упреждающем ударе стороны $X$, когда $\xi=1{,}23$, $\mu=1$, $\nu=0{,}9$ ошибка в вычислении величины $M_x$ превосходит 21% (для вероятностной модели $M_x=0{,}210$, $M_y=0{,}134$, а для модели динамики средних $M_x=0{,}000$, $M_y=0{,}081$). Причиной этих ошибок является достаточно высокая вероятность победы «более слабой» стороны, которая в обоих случаях превосходит 0,45.

Вместе с тем при двукратном и более превосходстве одной из противоборствующих сторон ошибки модели динамики средних в вычислении $M_x$ и $M_y$ не превосходят 5%, если каждая из противоборствующих сторон имеет в начале боя не менее пяти единиц (то есть $m\geqslant 5$, $n\geqslant 5$).

Использование вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями также может в ряде случаев привести к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя. Так для боя $25:25$ при упреждающем ударе стороны $X$, $k_x=0{,}01$, $k_y=0{,}0324$, $a_x=0{,}0162$, $a_y=0{,}0018$, $\bar{t}_c=0{,}5$ (при этом $\xi=1{,}8$, $\mu=1$, $\nu=0{,}1$) получаем $M_x=0{,}285$, $M_y=0{,}186$, $P_{0x}=0{,}570$, $P_{0y}=0{,}430$. Если считать эффективные скорострельности боевых единиц сторон равными их значениям в начале боя, получаем $M_x=0{,}064$, $M_y=0{,}426$, $P_{0x}=0{,}137$, $P_{0y}=0{,}863$. Если же принять их равными своим средним значениям в течение боя, то есть $v=0{,}0327$, $u=0{,}0369$ (при этом $\xi=1{,}06$), получаем $M_x=0{,}783$, $M_y=0{,}005$, $P_{0x}=0{,}983$, $P_{0y}=0{,}017$.

А для боя $50:10$ при упреждающем ударе стороны $X$, $k_x=0{,}01$, $k_y=0{,}4225$, $a_x=0{,}00325$, $a_y=0{,}02925$ (при этом $\xi=1{,}3$, $\mu=2$, $\nu=0{,}9$) получаем $M_x=0{,}337$, $M_y=0{,}230$, $P_{0x}=0{,}503$, $P_{0y}=0{,}497$. Если принять эффективные скорострельности равными их значениям в начале боя, получаем $M_x=0{,}470$, $M_y=0{,}139$, $P_{0x}=0{,}695$, $P_{0y}=0{,}305$. Если же положить их равными своим средним значениям в течение боя, то есть $v=0{,}0108$, $u=0{,}87789$ (при этом $\xi=1{,}8$), получаем $M_x=0{,}115$, $M_y=0{,}447$, $P_{0x}=0{,}203$, $P_{0y}=0{,}797$.

На ошибки в вычислении основных показателей боя при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями в первую очередь влияет значение $\nu$, в меньшей степени значения $\mu$ и $\xi$, и практически не влияют начальные численности противоборствующих сторон. При $0{,}47<\nu<0{,}53$ (погрешности в вычислении $M_x$ и $M_y$ не превосходят 5% при любых значениях $\mu$ и $\xi$, а при $\nu=0{,}5$ (то есть $a_x=a_y$) значения $M_x$, $M_y$, $P_{0x}$, $P_{0y}$ получаются одинаковыми при использовании обоих типов вероятностных моделей. Также отметим, что при $\mu\geqslant 5$ (то есть при достаточно медленном росте эффективных скорострельностей), а также при $\xi\leqslant 0{,}4$ и $\xi\geqslant 2{,}5$ (то есть при существенном превосходстве одной из противоборствующих сторон) погрешности в вычислении основных показателей боя при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями также не превосходят 5%.

Упреждающий удар одной из сторон существенно влияет на исход и основные показатели боя достаточно близких по силам группировок, причем это влияние значительно возрастает с пропорциональным ростом их начальных численностей. Так, при значениях $\xi=1{,}25$, $\mu=1$, $\nu=0$ при изменении приведенного времени $\bar{t}_c$ нанесения стороной $X$ упреждающего удара от 0 до 0,5 для боя $10:10$ значение $M_x$ увеличивается с 0,246 до 0,766, а значение $M_y$ уменьшается с 0,309 до 0,018, а для боя $150:150$ при тех же значениях $\mu$, $\nu$, $\xi$ значение $M_x$ увеличивается с 0,093 до 0,819, а значение $M_y$ уменьшается с 0,236 до 0,000.

При $\xi=1{,}75$, $\mu=1$, $\nu=0$ при том же изменении $\bar{t}_c$ для боя $1:5$ значение $M_x$ увеличивается с 0,346 до 0,625, а значение $M_y$ уменьшается с 0,545 до 0,246, а для боя 50:250 при тех же значениях $\mu$, $\nu$, $\xi$ значение $M_x$ увеличивается с 0,000 до 0,431, а значение $M_y$ уменьшается с 0,7615 до 0,019.

При четырехкратном и более начальном превосходстве стороны, наносящей упреждающий удар, его влияние на исход боя и его основные показатели несущественно (погрешности в вычислении величин $M_x$ и $M_y$ не превосходят 3%). Однако влияние упреждающего удара на ожидаемые потери стороны, наносящей ответный удар, достаточно велико даже при ее четырех-пятикратном начальном превосходстве. Они увеличиваются более чем на 10%.

**Выводы**

Таким образом, результаты настоящей статьи позволяют сделать следующие выводы.

1. На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны вероятностные модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя при упреждающем ударе одной из противоборствующих сторон.

2. Установлено, что использование модели динамики средних приводит к существенным ошибкам в вычислении основных показателей боя близких по силам группировок даже при их больших начальных численностях. При значительном превосходстве одной из противоборствующих сторон модели данного типа можно использовать для исследования боя даже небольших по численности группировок, что не приведет к сколь заметным ошибкам в вычислении его основных показателей.

3. Показано, что использование вероятностных моделей боя с постоянными эффективными скорострельностями может привести в ряде случаев к существенным погрешностям в вычислении его основных показателей. Установлена область применимости моделей данного типа. Также показано, что при одинаковых показателях роста эффективных скорострельностей боевых единиц противоборствующих сторон значения основных показателей боя совпадают со значениями, получаемыми при использовании вероятностных моделей с постоянными эффективными скорострельностями.

4. Установлено, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на исход и основные показатели боя близких по силам группировок, причем это влияние заметно возрастает с пропорциональным увеличением начальных численностей противоборствующих сторон.

5. Показано, что упреждающий удар одной из протвоборствующих сторон оказывает незначительное влияние на исход и основные показатели боя только при четырехкратном и более начальном превосходстве стороны, наносящей упреждающий удар. Однако его влияние достаточно велико на потери стороны, наносящей ответный удар, даже при ее пятикратном начальном превосходстве.

6. Разработанные модели создают основу для их применения в вероятностных моделях двухсторонних боевых действий многочисленных группировок при зависимостях эффективных скорострельностей боевых единиц сторон от времени боя произвольного вида, что в свою очередь, позволит перейти в дальнейшем к моделированию боевых действий группировок, состоящих из разнотипных боевых единиц.

**Список использованных источников**

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 1. – С. 5-17.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы и методология. – М.: УРСС, 2006. – 208 с.

3. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 270 с.

4. Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий // Программные продукты и системы. – 2010. – № 1. – С. 1-9.

5. Ильин В.А. Моделирование боевых действий сил флота // Программные продукты и системы. – 2006. – № 1. – С. 23-27.

6. Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Марковские модели боя. – М.: Министерство обороны СССР, 1985. – 85 с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Кнорус, 2016. – 658 с.

8. Дубограй И.В., Рябцев Р.А., Чуев В.Ю. Вероятностные модели двухсторонних боевых действий при упреждающем ударе одной из сторон // Известия РАРАН. – 2017. – № 4. – С. 34-46.

9. Ткаченко П.Н. Математические модели боевых действий. – М.: Советское радио, 1969. – 240 с.