Модель динамики противоборства неоднородных группировок сил

Дтн профессор Буравлев А.И., Гордеев С.В.

Введение. Моделирование боевых действий является основным инструментом решения многих задач, связанных с военным строительством, планированием применения вооруженных сил, оценкой эффективности образцов вооружения и военной техники. Среди большого арсенала математических моделей особое место занимают аналитические модели противоборства, впервые полученные в 1915-1916 гг. независимо друг от друга русским штабс-капитаном В. Осиповым [1] и английским штабным офицером Ф. Ланчестером [2]. В работах [3, 4] было показано, что модели Осипова-Ланчестера представляют собой разновидность моделей массового обслуживания и описывают динамику средних численностей группировок при пуассоновских потоках поражающих воздействий. В течение длительного времени эти модели применялись для описания динамики боевых действий и их количественно-качественного анализа [3, 4, 5]. С развитием методов имитационного моделирования интерес к моделям «динамики средних» постепенно угас и в последнее время их применение ограничивалось лишь учебными целями. Вместе с тем, дальнейшие исследования в области теории больших военных систем [6, 7] показали, что модели «динамики средних» являются достаточно эффективным инструментом их качественного анализа и выявления новых закономерностей их развития при учете нелинейных соотношений между параметрами систем.

В данной работе рассматривается аналитическая модель динамики противоборства неоднородных группировок сил, которое характеризуется следующими особенностями:

– в составе группировок имеется большое количество неоднородных объектов, которые могут быть разделены на однородные классы;

– процесс противоборства группировок представляет дискретно-непрерывный случайный процесс обмена ударами, моменты нанесения и результат которых является случайным;

– потоки поражающих воздействий группировок представляют собой сумму независимых (слабо зависимых) и равномерно ограниченных потоков, что практически обусловливает их пуассоновский характер;

– потоки поражающих выстрелов распределяются в соответствии с заданной схемой целераспределения по непораженным объектам противника;

– каждый объект группировки может находиться только в двух состояниях: *поражен* или *не поражен* с определенной вероятностью;

– интенсивности поражающих воздействий объекта любого класса практически не зависит от числа объектов в этом классе;

– процесс восполнения группировок носит случайный характер и может быть с достаточной точностью описан пуассоновским нестационарным процессом.

В результате этих допущений процесс противоборства достаточно хорошо аппроксимируется нестационарным пуассоновским процессом, что является достаточным условием для применения метода динамики средних [8].

Описание модели. Рассматриваются две противоборствующих группировки, дислоцирующихся в заданных позиционных районах $\Omega^{(I)}, \Omega^{(II)}$ на удалении *D* друг от друга. Удаление позиционных районов определяется минимальным расстоянием между границами позиционных районов. В составе каждой группировки имеется несколько воинских формирований (ВФ), разделенных на два эшелона. Первый эшелон составляют ударные ВФ, второй – резервные ВФ. Обозначим $l = l_1 + l_2$ – число ВФ в составе группировки I, где l_1 – число ударных, а l_2 – число резервных ВФ; $s = s_1 + s_2$ – число ВФ в составе группировки II, где s_1 – число ударных, а s_2 – число резервных ВФ группировки. Воинские формирования дислоцируется в определенных районах, представляющие собой прямоугольники *П*. Таким образом, позиционный район каждой группировки представляется как объединение фрагментов, занимаемых ее воинскими формированиями:

$$\Omega^{(I)} = \sum_{r=1}^{l} \Pi_r^{(I)}\,; \quad \Omega^{(II)} = \sum_{q=1}^{s} \Pi_q^{(II)}\,.$$

Положение r-го ВФ в позиционном районе определяется координатами центра прямоугольника $Ц_r = (X_r, Z_r)$ относительно заданной системы координат OXZ (рисунок 1).

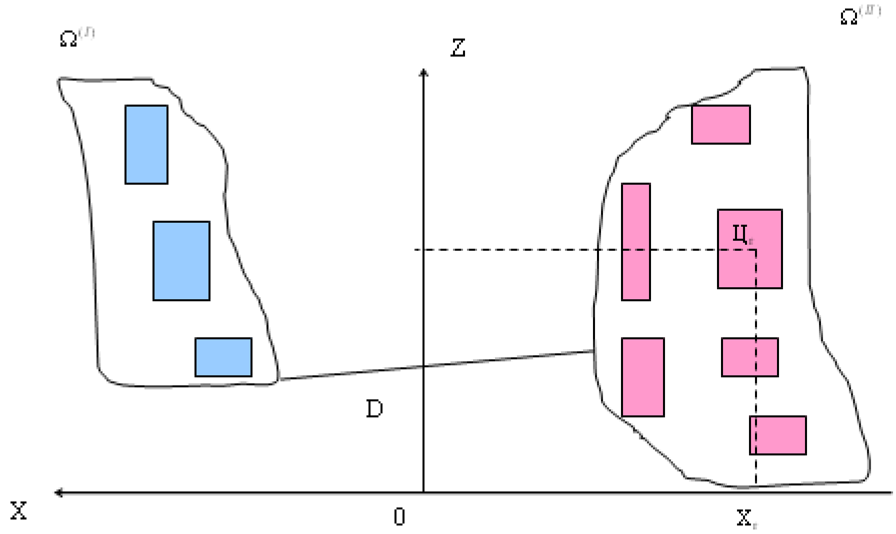

Рисунок 1

В составе противоборствующих группировок имеется несколько классов (типов) образцов вооружения и военной техники (ВВТ) численностью $N^{(I)} = (N_i^{(I)})_{k \times 1}$, $N^{(II)} = (N_j^{(II)})_{n \times 1}$, где k, n – соответственно, число различных типов образцов ВВТ I и II стороны. Боевой состав ВФ характеризуется номенклатурой и численностью образцов ВВТ.

Воинские формирования группировок имеют боевой состав, который характеризуется структурой и численностью применяемых образцов ВВТ. Обозначим $0 \le \delta_{ri} < 1$, $\sum_{r=1}^{l} \delta_{ri} = 1$ – процентное соотношение средств ВВТ i-го класса в составе r-го ВФ. Тогда матрицы $\Delta^{(I)} = \left(\delta_{ir}^{(I)}\right)_{k \times l}$, $\Delta^{(II)} = \left(\delta_{jq}^{(II)}\right)_{n \times s}$ характеризуют боевой состав группировок сторон.

Для разнородных группировок нельзя определять их общую численность путем арифметического суммирования входящих в них различных средств ВВТ и личного состава, поскольку между разными компонентами группировок (танки, самолеты, артиллерия и пр.) отсутствует количественная соизмеримость (числовой эквивалент). Здесь мы сталкиваемся с векторными величинами, для которых не определена метрика в пространстве их значений. На этот случай, как отмечено в [7], впервые указал Я.М. Лихтеров. Тем не менее, на оперативно-тактическом уровне используется условная количественная оценка общей численности группировки как сумма всех сил и средств ВВТ. Эту условную оценку мы будем использовать ниже только с единственной целью – для расчета плотности войск в позиционных районах, занимаемых группировкой.

Поэтому определим условно общую численность ударных M и резервных Q ВФ группировок как средневзвешенную сумму численностей различных образцов ВВТ:

$$M_h = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ih} N_i, \;\; Q_m = \sum_{i=1}^{k} \delta_{im} N_i, \;\; (h = \overline{1, l_1}), \;\; (m = \overline{1, l_2}).$$

По замыслу операции ударные ВФ наносят удары по противостоящим ударным и резервным ВФ и осуществляют поражение их объектов. Объектами поражения являются средства ВВТ и объекты системы управления ВФ и инфраструктуры позиционных районов. Эффективность поражения этих объектов зависит от дальности и точности стрельбы, могущественности средств поражения, живучести объектов и других тактико-технических характеристик.

Полную информацию о боевых возможностях образцов ВВТ сторон задают матрицы интенсивностей поражающих воздействий объектов противника $\lambda^{(I)} = (\lambda_{ij}^{(I)})_{k \times n}$, $\lambda^{(II)} = (\lambda_{ji}^{(II)})_{n \times k}$, в общем случае зависящих от дальности стрельбы. Распределение поражающих воздействий задается матрицами целераспределения для каждого ВФ: $\gamma_r^{(I)} = \left(\gamma_{ij}^{(I,r)}\right)_{k \times n}$, $(r = \overline{1, l})$, $\gamma_q^{(II)} = \left(\gamma_{ji}^{(II,q)}\right)_{n \times k}$, $q = \overline{1, s}$ элементы которых есть вероятности целеуказания $0 \le \gamma_{ij}^{(I,r)} \le 1$, $\sum_{r=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{(I,r)} = 1$, $0 \le \gamma_{ji}^{(II,q)} \le 1$, $\sum_{q=1}^{s_1} \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ji}^{(II,q)} = 1$ для различных типов образцов ВВТ. При детерминированном распределении $\gamma_{ij} = 1 \cup 0$. Огневое воздействие ведется только по непораженным объектам противника.

Резервные ВФ являются источником восполнения ударных сил и вступают в боевые действия по решению командующего группировки. Восполнение ударных ВФ осуществляется путем восстановления (ремонта) пораженных средств ВВТ и объектов инфраструктуры, либо поставкой новых средств ВВТ из резерва. Восполнение производится до штатного уровня ВФ. Интенсивность восполнения характеризуется диагональными матрицами интенсивностей $\mu^{(I)} = (\mu_i^{(I)})_{k\times k}$, $\mu^{(II)} = (\mu_i^{(II)})_{n\times n}$ восполнения одиночных средств ВВТ. Значения этих интенсивностей зависят от численности ВВТ в составе резервных ВФ. Процесс восполнения группировок различными средствами ВВТ может иметь запаздывание τ_B относительно текущего времени.

При заданных условиях динамику изменения средних численностей $m^{(I)} = (m_i^{(I)})_{k\times 1}$, $m^{(II)} = (m_j^{(II)})_{n\times 1}$ противоборствующих группировок можно описать нестационарной системой дифференциальных уравнений.

Для ударных ВФ эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{dm_i^{(I)}}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ji}^{(II)} m_j^{(II)} + \mu_i^{(I)} 1(t-\tau_{Bi}^{(I)})(N_i^{(I)} - m_i^{(I)}),\ \ m_i^{(I)}(0) = N_i^{(I)},\ (\ i=\overline{1,k}\ ) \\
\frac{dm_j^{(II)}}{dt} = -\sum_{i=1}^{k} \Lambda_{ij}^{(I)} m_i^{(I)} + \mu_j^{(II)} 1(t-\tau_{Bj}^{(II)})(N_j^{(II)} - m_j^{(II)}),\ \ m_j^{(II)}(0) = N_j^{(II)},\ (\ j=\overline{1,n}\ ) \qquad (1) \\
M_r^{(I)} = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ir}^{(I)} m_i^{(I)},\ (\ r=\overline{1,l_1}\ ),\ \ M_q^{(II)} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{iq}^{(II)} m_j^{(II)},\ (\ q=\overline{1,s_1}\ ),
\end{gathered}$$

где $\Lambda_{ij}^{(I)} = \gamma_{ij}^{(I)} \lambda_{ij}^{(I)}$, $\Lambda_{ji}^{(II)} = \gamma_{ji}^{(II)} \lambda_{ji}^{(II)}$ – интенсивности поражающего воздействия средств ВВТ с учетом целераспределения;

$\gamma_{ij}^{(I)} = \sum_{r=1}^{l_1} \gamma_{ij}^{(I,r)}$, $\gamma_{ij}^{(I)} = \sum_{r=1}^{l_1} \gamma_{ij}^{(I,r)}$ – обобщенные характеристики целераспределения сторон;

$1(t-\tau_B) = \begin{cases} 0, & t < \tau_B \\ 1, & t \ge \tau_B \end{cases}$ – оператор запаздывания.

Для резервных ВФ система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{dm_i^{(I)}}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ji}^{(II)} m_j^{(II)} - \mu_i^{(I)} 1(t-\tau_{Bi}^{(I)})(N_i^{(I)} - m_i^{(I)}),\ \ m_i^{(I)}(0) = N_i^{(I)};\ (\ i=\overline{1,k}\ ) \\
\frac{dm_j^{(II)}}{dt} = -\sum_{i=1}^{k} \Lambda_{ij}^{(I)} m_i^{(I)} - \mu_j^{(II)} 1(t-\tau_{Bj}^{(II)})(N_j^{(II)} - m_j^{(II)}),\ \ m_j^{(II)}(0) = N_j^{(II)},\ (\ j=\overline{1,n}\ ) \qquad (2) \\
Q_h^{(I)} = \sum_{i=1}^{k} \delta_{hi}^{(I)} m_i^{(I)},\ (\ h=\overline{1,l_2}\ ),\ \ Q_\nu^{(II)} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\nu j}^{(II)} m_j^{(II)},\ (\ \nu=\overline{1,s_2}\ ).
\end{gathered}$$

В том случае, когда одна из сторон наносит упреждающий удар с опережением во времени τ_Y, данный факт учитывается изменением начальных условий. Например, в случае упреждающего удара *I* стороны, начальные условия для системы уравнений будут иметь вид:

$$m_i^{(I)}(0) = N_i^{(I)}, \quad m_j^{(II)}(0) = N_j^{(II)} - \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ij}^{(I)} \lambda_{ij}^{(I)} N_i^{(I)} \tau_Y^{(I)}.$$

В отличие от известных уравнений динамики боя [3, 4] здесь учитывается характер целераспределения поражающих воздействий средств ВВТ различного типа, запаздывание и ограниченный уровень восполнения группировок различными средствами ВВТ.

В процессе боевых действий происходит изменение расположения ВФ в позиционных районах.

Обозначим S_r – площадь района дислокации r-го ВФ численности M_r, где $S_r = L_{Xr} \times L_{Zr}$; L_{Xr}, L_{Zr} - размеры прямоугольника Π_r. Тогда плотность сосредоточения войск ВФ в r-м районе сосредоточения будет равна $\rho_r = \frac{M_r}{S_r}$. Изменение численности ВФ при фиксированной его плотности приводит к изменению размеров и площади его района сосредоточения Π_r. Отсюда получаем следующие дифференциальные соотношения между численностью ФВ и размерами районов их дислокации:

$$dS_r = \frac{dM_r}{\rho_r}, \; dS_r = L_{Zr} dL_{Xr} + L_{Xr} dL_{Zr}. \tag{3}$$

Поскольку изменение границ района дислокации ВФ может происходить по решению командующего группировки, то введем параметр управления $0 \le U_r \le 1$ границами района дислокации ВФ. Тогда изменение размеров района дислокации будет описываться следующими соотношениями:

$$dL_{Xr} = \frac{U_r}{L_{Zr}} dS_r, \quad dL_{Zr} = \frac{(1 - U_r)}{L_{Xr}} dS_r. \tag{4}$$

Вместе с изменением границ районов сосредоточения ВФ может происходить изменение положения их центра относительно начала системы координат *OXZ*. Это изменение зависит от решения командующего ВФ, которое задается признаком $I_r \in \{1,0\}$, где $I_r = 1$ означает, что координаты центра района сосредоточения ВФ изменяются вместе с его границами и площадью. Дифференциальные соотношения для координат центра ВФ имеют вид:

$$dX_r = I_r dL_{Xr}, \quad dZ_r = I_r dL_{Zr}. \tag{5}$$

Это позволяет моделировать процессы маневрирования ВФ в границах позиционного района. Пусть $\overline{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{S_\Omega}$ характеризует текущую среднюю плотность войск группировки в позиционном районе, а ρ_r - плотность r-го ВФ. Тогда, если $\rho_r \geq \overline{\rho}$, то данное ВФ сохраняет свой район сосредоточения и продолжает выполнение боевых задач. При нарушении этого условия ($\rho_r < \overline{\rho}$), командующий группировки может принять решение о смене района дислокации или полном выводе данного ВФ из операции.

При изменении положения ВФ изменяется дальность стрельбы его систем оружия и интенсивность поражающего действия по объектам противникам. Обозначим $D_{rk} = \sqrt{(X_r - X_k)^2 + (Z_r - Z_k)^2}$ – текущую дальность между ВФ$_r$ и ВФ$_k$ противоборствующих группировок. Интенсивность поражающего действия всех средств ВВТ воинского формирования представим линейной зависимостью от дальности:

$$\lambda_{ij}(D_{rk}) = \hat{\lambda}_{ij} \frac{D_{\max ij} - D_{rk}}{D_{\max ij} - D_{\min ij}}, \tag{6}$$

где $D_{\min ij}, D_{\max ij}$ – минимальная и максимальная дальности стрельбы образца ВВТ по объектам противника;

$\hat{\lambda}_{ij}$ – максимальная интенсивность поражающего действия образца ВВТ на минимальной дальности стрельбы.

Тогда получаем следующую дифференциальную зависимость между дальностью стрельбы и интенсивностью поражающего действия образцов ВВТ:

$$d\lambda_{ij} = -\frac{\hat{\lambda}_{ij} dD_{rk}}{D_{\max ij} - D_{\min ij}}, \quad dD_{rk} = \frac{(X_r - X_k)(dX_r - dX_k)}{D_{rk}} + \frac{(Z_r - Z_k)(dZ_r - dZ_k)}{D_{rk}}. \tag{7}$$

В процессе боевых действий в зависимости от соотношения сил группировки могут менять также границы позиционного района дислокации своих ВФ, а также его расположение относительно позиционного района группировки противника.

Обозначим $Ц^{(I)}(\overline{X}^{(I)}, \overline{Z}^{(I)})$, $Ц^{(II)}(\overline{X}^{(II)}, \overline{Z}^{(II)})$ – координаты центра позиционных районов группировок относительно начала системы координат OXZ. Эти координаты определим как средние значения координат центров ВФ, расположенных в заданном позиционном районе:

$$\overline{X}^{(I)}=\frac{\sum_{r=1}^{l}X_r^{(I)}}{l},\ \overline{Z}^{(I)}=\frac{\sum_{r=1}^{l}Z_s^{(I)}}{l},\quad \overline{X}^{(II)}=\frac{\sum_{q=1}^{s}X_q^{(II)}}{s},\ \overline{Z}^{(II)}=\frac{\sum_{q=1}^{s}Z_r^{(II)}}{s}. \qquad (8)$$

Обобщенной характеристикой количественного соотношения сил является их средняя плотность в позиционном районе. Примем в качестве параметра управления положением позиционных районов разность между средними плотностями группировок $\Delta\overline{\rho}=\overline{\rho}^{(I)}-\overline{\rho}^{(II)}$. Выразим эту разность через конечные приращения численностей группировок и площадей позиционных районов:

$$\Delta\overline{\rho}=\frac{N^{(I)}}{S^{(I)}}-\frac{N^{(II)}}{S^{(II)}}=\frac{\Delta N\cdot S^{(I)}-\Delta S\cdot N^{(II)}}{S^{(I)}S^{(II)}},$$

где $\Delta N=N^{(I)}-N^{(II)}$, $\Delta S=S^{(I)}-S^{(II)}$.

Отсюда получаем выражение для разности площадей позиционных районов в зависимости от соотношения численностей и плотностей группировок:

$$\Delta S=\frac{\Delta N}{N^{(II)}S^{(II)}}-\frac{\Delta\overline{\rho}\cdot S^{(I)}S^{(II)}}{N^{(II)}}. \qquad (9)$$

Величина ΔS для противоборствующих группировок имеет разные знаки.

Используем величину ΔS для расчета приращений координат центров позиционных районов группировок. Полагая $\Delta S=\overline{Z}\cdot\Delta\overline{X}+\overline{X}\cdot\Delta\overline{Z}$ и вводя параметр управления положением позиционных районов $0\le V\le 1$, получаем следующие выражения для приращений координат их центров:

$$\Delta\overline{X}=\frac{V\Delta S}{\overline{Z}},\quad \Delta\overline{Z}=\frac{(1-V)\Delta S}{\overline{X}}. \qquad (10)$$

Поскольку приращение ΔS имеет разные знаки для группировок, то в соответствии с (10) группировка, имеющая большую плотность сил в позиционном районе, будет наступать, а другая – отступать. Направления наступления и отступления будут определяться параметрами управления $V^{(I)},V^{(II)}$, решение по которым принимают командующие группировок. При наступлении или отступлении группировки происходит одновременное изменение позиций всех ее ВФ. Изменение координат ВФ осуществляются пропорционально изменению координат позиционного района:

$$\Delta X_r = \frac{\Delta \overline{X}}{l}, \quad \Delta Z_r = \frac{\Delta \overline{Z}}{l}, \quad r = \overline{1,l}. \tag{11}$$

Соотношения (3)…(11) замыкают систему уравнений (2) для средних численностей противоборствующих группировок.

Расчет параметров модели $\Lambda^{(I)}, \Lambda^{(II)}, \mu^{(I)}, \mu^{(II)}$ производится в соответствии с принятыми методиками по планированию огневого поражения в Ракетных войсках и артиллерии (РВиА) Сухопутных войск, ВВС, ВМФ [например, 9].

Интенсивности поражающего воздействия для огневых средств РВиА можно рассчитать исходя из потребного числа расчетных боеприпасов $n_{РБ}$, необходимого для поражения объектов противника с заданной степенью на определенный период операции (удара, боя, сражения) $\tau_{ОП}$. Для каждого класса средств ВВТ и класса поражаемых объектов средняя интенсивность поражающего воздействия равна

$$\overline{\lambda}_{ij} = \frac{n_{РБ\ ij}}{\tau_{ОП}}.$$

Разделив эту величину на текущую численность средств ВВТ в данном классе, получаем интенсивность поражающего воздействия для одиночного средства ВВТ

$$\lambda_{ij} = \frac{\overline{\lambda}_{ij}}{m_i} = \frac{n_{РБ\ ij}}{\tau_{ОП} \cdot m_i}.$$

Интенсивности восполнения группировок также рассчитываются исходя из планируемой по периодам операции требуемой численности группировок для решения поставленных боевых задач. Если известны потребная численность i-го типа средств ВВТ в составе группировки $N_i(t_k)$ к предстоящему моменту операции t_k, $m_i(t_{k-1})$ – численность группировки в текущий момент времени, а $N_i'(t_k)$ – фактическая численность восстановленной группировки, то средняя интенсивность восполнения группировки данными средствами ВВТ на интервале времени $(t_{k-1},\ t_k)$ составит

$$\overline{\mu}_i = \frac{N_i'(t_k) - m_i(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})[N_i(t_k) - m_i(t_{k-1})]}.$$

В результате интегрирования систем уравнений (1)…(11) получаем динамику изменения средней численности и состава группировок, границ и положения их позиционных районов в процессе боевых действий в зависимости от параметров $\Lambda^{(I)}, \Lambda^{(II)}, \mu^{(I)}, \mu^{(II)}, \tau_B^{(I)}, \tau_B^{(II)}, U^{(I)}, U^{(II)}, I^{(I)}, I^{(II)}, V^{(I)}, V^{(II)}$. При этом параметры оперирующей стороны (например, стороны I) $\Lambda^{(I)}, \mu^{(I)}, \tau_B^{(I)}, U^{(I)}, I^{(I)}, V^{(I)}$ выступают в качестве управляющих параметров модели. Изменяя эти параметры при фиксированных параметрах стороны II, можно осуществлять управление процессом боевых действий.

Для получения обобщенных количественно-качественных характеристик противоборствующих сторон – боевых потенциалов группировок и их количественного соотношения необходимо осуществить количественное соизмерение разнородных компонент векторов численностей группировок.

Эту операцию можно осуществить с помощью экспертов путем установления между различными образцами ВВТ противоборствующих сторон коэффициентов соизмеримости $\alpha_{is}^{(I)} > 0$, ($i, s = \overline{1,k}$); $\alpha_{js}^{(II)} > 0$ ($j, s = \overline{1,m}$). Одной из эффективных процедур экспертного оценивания является методика парных сравнений Саати [10]. В результате применения данной процедуры можно получить нормированные коэффициенты приоритетности $p_i^{(I)} > 0$, $\sum p_i^{(I)} = 1$; $p_j^{(II)} > 0$, $\sum p_j^{(II)} = 1$ – для образцов ВВТ противоборствующих сторон. С помощью этих коэффициентов нетрудно определить коэффициенты соизмеримости $\alpha_{is}^{(I)} = \dfrac{p_i^{(I)}}{p_s^{(I)}} > 0$, ($i, s = \overline{1,k}$) образцов ВВТ и ввести числовую норму

$$\|m\| = \sum \alpha_i |m_i| \tag{12}$$

для векторов $m^{(I)} = \left(m_i^{(I)}\right)_{k\times 1}$, $m^{(II)} = \left(m_j^{(II)}\right)_{1\times n}$, которая метризует пространство численностей разнородных группировок.

Как следует из (12), норма вектора равна суммарной численности «эквивалентированных» сил и средств группировки. Далее эту величину мы будем называть *эквивалентной* численностью группировки.

Теперь имеется возможность произвести корректно расчет интегральных показателей противоборства группировок.

Боевые потенциалы группировок определяются отношением величин прогнозируемого ущерба, приходящегося на условную боевую единицу группировки:

$$\text{ÁÏ}^{(I)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}^{(II)}\Lambda_{ij}^{(I)}m_i^{(I)}}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_{is}^{(I)}m_i^{(I)}}, \quad \text{ÁÏ}^{(II)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{is}^{(I)}\Lambda_{ji}^{(II)}m_j^{(II)}}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}^{(II)}m_j^{(II)}}. \tag{13}$$

В выражениях (13) учтено, что коэффициенты соизмеримости $\alpha_{is}^{(I)}, \alpha_{jr}^{(II)}$ рассчитаны относительно фиксированных образцов ВВТ, которые для разных группировок могут также различаться.

Интегральной характеристикой процесса противоборства является количественно-качественное соотношение (ККС) сил сторон [11, 12], которое определяется отношением прогнозируемых потерь сторон в текущий момент времени:

$$KKC = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}^{(II)}\Lambda_{ij}^{(I)}m_i^{(I)}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{is}^{(I)}\Lambda_{ji}^{(II)}m_j^{(II)}}. \tag{14}$$

Данный показатель служит в качестве одной из целевых функций в задачах планирования и управления процессом боевых действий [12, 13].

Другим интегральным показателем является количественное соотношение сил сторон (КСС) равное отношению условных численностей группировок на текущий момент времени:

$$KCC = \frac{\sum_{i=1}^{k}\alpha_{is}^{(I)}m_i^{(I)}}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}^{(II)}m_j^{(II)}}. \tag{15}$$

В отличие от ККС данный показатель не учитывает боевой потенциал ВВТ группировок по поражению противника на предстоящем этапе боевых действий. Связь между этими показателями можно выразить, используя соотношение для показателей боевого потенциала группировок:

$$KKC = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}^{(II)}\Lambda_{ij}^{(I)}m_i^{(I)}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{is}^{(I)}\Lambda_{ji}^{(II)}m_j^{(II)}} = \frac{\text{ÁÏ}^{(I)}}{\text{ÁÏ}^{(II)}} \times KCC = \text{ÊÁÏ} \times \text{ÊÑÑ}, \tag{16}$$

где $КБП = \dfrac{БП^{(I)}}{БП^{(II)}}$ – коэффициент соотношения боевых потенциалов группировок.

Для оперативной оценки боевых потенциалов и количественно- качественного соотношения группировок можно использовать агрегированную модель динамики противоборства.

Агрегирование модели (1), (2) осуществляется путем суммирования численностей ударных и резервных ВФ сторон и получение дифференциальных соотношений между ними. Рассмотрим суммарную эквивалентную численность ударной и резервной составляющей группировки первой стороны:

$$M^{(I)} = \sum_{r=1}^{l_1} M_r^{(I)} = \sum_{r=1}^{l_1}\sum_{i=1}^{k} \alpha_{is}^{(I)}\delta_{ir}^{(I)} m_i^{(I)}, \quad Q^{(I)} = \sum_{h=1}^{l_2} Q_h^{(I)} = \sum_{h=1}^{l_2}\sum_{i=1}^{k} \alpha_{is}^{(I)}\delta_{ih}^{(I)} m_i^{(I)}.$$

Дифференцируя эти величины по времени и учитывая выражения (1), (2), получаем следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{dM^{(I)}}{dt} = -\overline{\Lambda}^{(II)} M^{(II)} + \overline{\mu}^{(I)}[N^{(I)} - M^{(I)}];$$

$$\frac{dM^{(II)}}{dt} = -\overline{\Lambda}^{(I)} M^{(I)} - \overline{\mu}^{(II)}[N^{(II)} - M^{(II)}] \qquad (16)$$

с начальными условиями $M(0)^{(I)} = N^{(I)}; \ M(0)^{(II)} = N^{(II)}$,

где $\overline{\Lambda}^{(II)}(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{is}^{(I)}\Lambda_{ji}^{(II)} m_j^{(II)}(t)}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jr}^{(II)} m_j^{(II)}(t)}$, $\overline{\Lambda}^{(I)}(t) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \alpha_{jr}^{(II)}\Lambda_{ij}^{(I)} m_i^{(I)}(t)}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_{1i}^{(I)} m_i^{(I)}(t)}$ – средние интенсивности поражающего действия боевых единиц группировок по объектам противника;

$$\overline{\mu}^{(I)}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_{1i}^{(I)} \mu_i^{(I)} 1(t - \tau_{Bi}^{(I)})[N_i^{(I)} - m_i^{(I)}]}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_{1i}^{(I)}[N_i^{(I)} - m_i^{(I)}]}, \quad \overline{\mu}^{(II)}(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}^{(II)} \mu_j^{(II)} 1(t - \tau_{Bj}^{(II)})[N_j^{(II)} - m_j^{(II)}]}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}^{(II)}[N_j^{(II)} - m_j^{(II)}]} \ -$$

средние интенсивности восполнения группировок в ходе боевых действий.

В результате агрегирования модели мы получили два связанных нестационарных дифференциальных уравнения (17) динамики изменения общих численностей группировок, с помощью которых можно оперативно оценивать количественно-качественные соотношения группировок и принимать необходимые решения по организации боевых действий. Результаты численного моделирования показали, что погрешность оценки ККС группировок по упрощенной модели не превышают 7-15 %.

Список использованных источников:

1. Осипов М. Влияние численности сражающихся на их потери//Военный сборник, №№6-9, 1915.
2. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Found Arm. F.W. Lanchester, Constable and Co, London, 1916.
3. Морз Ф.М., Кимбелл Д.К. Методы исследования операций. – М.: Советское радио, 1956.
4. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. – М.: Сов. радио, 1964.
5. Тараканов К.В. Математика и вооруженная борьба.- М.: Воениздат, 1974.
6. Морозов Н.А. Методические основы нелинейного анализа процессов вооруженной борьбы.- М.: Воениздат, 1990.
7. Морозов Н.А. Теоретические основы качественного анализа больших военных систем.- М.: Министерство обороны, 2003.
8. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Основы теории массового обслуживания.- М.: Наука, 1966.
9. Оценка эффективности огневого поражения ударами ракет и огнем артиллерии. Военно-теоретический труд./ Под ред. А.А. Бобрикова. – СПб., 2006.
10. Саати Т. Принятие решений: Метод анализа иерархий. – М.: Сов. Радио, 1993.
11. Стрельченко Б.И., Иванов Е.И. Некоторые вопросы оценки соотношения сил и средств в операциях // Военная мысль, №10, 1987.
12. Бонин А.С. Количественно-качественное соотношение сил авиационных группировок сторон (методология, методики, расчетные условия).- Министерство обороны РФ, 2001.
13. Ерохин В.А., Обухов А.П. Методика решения задачи планирования огневого поражения группировки противника в операции // Труды Военно-воздушной инженерной академии имени профессора Н.Е. Жуковского, №1. т.79, серия: Авиационные робототехнические системы. – М.: «Радиотехника», 2007.