Оценка качества объектов по неметризуемому вектору характеристик

Дтн профессор Буравлев А.И., Брезгин В.С.

Существует большой перечень задач в области экономики, экологии, социологии, военного дела, связанных с оценкой качества объектов по совокупности признаков, измеренных в различных квалиметрических шкалах [1, 2]. Основной проблемой в этих задачах является определение единой шкалы измерений (оценивания) признаков объекта и выбор соответствующей метрики в пространстве получаемых оценок. Известные подходы к решению этой проблемы используют различные процедуры многокритериальной оценки [3, 4], информационные критерии сравнения [5, 6], методы агрегирования и кластеризации многомерных данных [6, 7] и др. Однако практическое применение этих процедур ограничивается трудностями физической интерпретации результатов оценивания, что вызывает определенное к ним недоверие со стороны исследователей. Примерами могут служить применение операции арифметического осреднения для величин, измеренных в порядковых и шкалах отношений («средние баллы», «средние рейтинги», «средние индексы»), применение евклидовой метрики для несравнимых оценок, применение искусственно вводимых информационных метрик и т.п.

Ниже рассматривается подход, основанный на построении обобщенной функции качества объектов на базе математической теории полезности [8].

Постановка задачи. Пусть некоторый класс, состоящий из N объектов, характеризуется вектором признаков $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ с неотрицательными компонентами из линейного векторного пространства R_n^+. Каждый признак x_i количественно характеризует одно или несколько функциональных свойств объекта и выступает частным показателем качества объекта. Все признаки *линейно независимы* и выражены в метрических шкалах отношений, в том числе с разными основаниями, что делает их *несравнимыми* между собой. В этом случае в векторном пространстве R_n^+ отсутствует метрика и согласованная с ней норма вектора. Возникает задача сравнения объектов и упорядочивания их по признакам качества в неметризованном пространстве.

Сформулированная задача является типичной для прикладных исследований.

Решение данной задачи возможно путем построения обобщенной функции качества, являющейся аналогом функции полезности объекта.

Выберем из рассматриваемого класса объект с вектором характеристик $x^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$, имеющим ненулевые компоненты. Поскольку частные признаки объектов измерены в шкалах отношений с различными основаниями, то по парное сравнение объектов можно производить только путем покомпонентного сравнения векторов их характеристик. Будем считать, что, если между i-ми компонентами векторов x и x^* установлено предпочтение $x_i \succ x_i^*$ (значение x_i предпочтительнее значения x_i^*) при выполнении числового неравенства $x_i > x_i^*$, то числовой характеристикой предпочтения является отношение $w_i = \frac{x_i}{x_i^*}$; в противном случае, числовой характеристикой предпочтения будет отношение $\frac{1}{w_i} = \frac{x_i^*}{x_i}$.

Рассмотрим функцию

$$F(w;\alpha) = \prod_{i=1}^{n} w_i^{\alpha_i}\ ;\ \alpha_i > 0\ ;\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\ , \tag{1}$$

где $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ – вектор покомпонентного сравнения характеристик объектов;

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – вектор предпочтений субъекта относительно частных показателей качества объекта.

Выражение (1) представляет собой средневзвешенное геометрическое покомпонентных сравнений объектов. Эта функция обладает следующими свойствами:

$$1)\ \forall w_i = 0,\ F(w;\alpha) = 0;$$
$$2)\ w = 1,\ F(w;\alpha) = 1\ ;$$
$$3)\ \forall w' > w,\ F(w';\alpha) > F(w;\alpha)\ ;$$
$$3)\ \forall t > 0,\ F(tw;\alpha) = tF(w;\alpha)\ . \tag{2}$$

Первое свойство – это мультипликативность функции; оно отражает тот факт, что *все* признаки объекта необходимы для формирования обобщенной функции качества и исключение какого-либо их них «обнуляет» значение функции. Второе свойство задает признак эквивалентности объектов относительно базового объекта. Третье свойство – монотонность функции, отражает возможность строгого упорядочивания объектов по качеству. Третье свойство – однородность функции по вектору признаков при заданном предпочтении субъекта; оно характеризует инвариантность обобщенной оценки качества относительно шкалы отношений, в которой измеряются первичные признаки объекта.

С учетом указанных свойств, функция (1) может представлять функцию *полезности* [8] или обобщенную функцию качества объекта с вектором характеристик x относительно базы сравнения x^* при фиксированном предпочтении субъекта $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Эта функция однозначно отображает вектор признаков $x \in R_n^+$ в значения метрической шкалы R_1^+. Максимальное значение обобщенной функции качества, достигаемое на заданном классе объектов, определяет объект с наивысшим уровнем качества:

$$F(\overline{w};\alpha) = \max_{1 \le k \le N} \sup_{w^{(k)} \in R_n^+} F(w^{(k)};\alpha) \Rightarrow x^{(m)} \succ x^{(k)}, \quad k = \overline{1,N}. \tag{3}$$

В качестве базового объекта можно выбрать объект, вектор признаков которого имеет максимально возможные значения компонент $x^* = (x_{max1}, x_{max2}, ..., x_{\max n})$. В этом случае функция полезности $F(w;\alpha)$ нормируется к 1 и обеспечивает задачу сравнения объектов на числовом множестве (0, 1).

Пример 1. Имеются три объекта с векторами характеристик, заданных следующими числовыми значениями:

$$x_1 = (20;\ 5;\ 2;\ 0,6);\quad x_2 = (15;\ 7;\ 1,5;\ 0,8);\quad x_3 = (30;\ 12;\ 3;\ 0,5).$$

Для компонент векторов заданы следующие предпочтения: для первой компоненты вектора предпочтение $x_{1i} \succ x_{1k}$, если $x_{1i} < x_{1k}$; для остальных компонент предпочтение $x_{1i} \succ x_{1k}$, если $x_{1i} > x_{1k}$.

Выберем в качестве базового вектор с максимально возможными значениями компонент $x^* = (30;\ 12;\ 5;\ 0,8)$.

Рассчитаем для каждого вектора функцию полезности $F(w;\alpha)$ при заданном векторе предпочтений субъекта $\alpha = (0,1; 02; 04; 03)$:

$$F_1 = \left(\frac{30}{20}\right)^{0,1} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{0,2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{0,4} \times \left(\frac{0,6}{0,8}\right)^{0,3} = 0,56;$$

$$F_2 = \left(\frac{30}{15}\right)^{0,1} \times \left(\frac{7}{12}\right)^{0,2} \times \left(\frac{1,5}{5}\right)^{0,4} \times \left(\frac{0,8}{0,8}\right)^{0,3} = 0,59;$$

$$F_3 = \left(\frac{30}{30}\right)^{0,1} \times \left(\frac{12}{12}\right)^{0,2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{0,4} \times \left(\frac{0,5}{0,8}\right)^{0,3} = 0,71.$$

В результате все объекты упорядочиваются по обобщенному показателю качества следующим образом: $x_1 \prec x_2 \prec x_3$. Первый и второй объекты достаточно близки друг к другу и могут быть объединены в один кластер.

Пример 2. Сделаем предпочтения субъекта одинаковыми для всех признаков качества объекта. В этом случае получаем следующие значения обобщенного показателя качества:

$$F_1 = \left(\frac{30}{20}\right)^{0,25} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{0,25} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{0,25} \times \left(\frac{0,6}{0,8}\right)^{0,25} = 0,66;$$

$$F_2 = \left(\frac{30}{15}\right)^{0,25} \times \left(\frac{7}{12}\right)^{0,25} \times \left(\frac{1,5}{5}\right)^{0,25} \times \left(\frac{0,8}{0,8}\right)^{0,25} = 0,77;$$

$$F_3 = \left(\frac{30}{30}\right)^{0,25} \times \left(\frac{12}{12}\right)^{0,25} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{0,25} \times \left(\frac{0,5}{0,8}\right)^{0,25} = 0,78.$$

Упорядоченность объектов в обобщенной шкале качества не изменилась, хотя изменилась кластеризация объектов; теперь второй и третий объекты могут быть отнесены к общему кластеру.

Из приведенных примеров, что обобщенная функция качества (1) позволяет решать задачи сравнения и кластеризации объектов по неметризуемым признакам.

Список использованных источников:

1. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков и структур.- М.: Статистика, 1980.
2. Литвак Б.Г. Экспертная информация. Модели получения и анализа. - М.: Радио и связь, 1982.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ.- М.: Радио и связь, 1981.
4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2005.
5. Куренков Н.И., Лебедев Б.Д. Энтропийные методы определения обобщенных характеристик систем//ДАН, т.365, №3, 1999.
6. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989.
7. Куренков Н.И., Лебедев Б.Д. Метод агрегирования многомерных данных// Информационные технологии, №2, 2003.
8. Фишберн. П. Теория полезности для принятия решения. Пер с англ.– М.: Наука, 1978.