

А.И. Буравлев, доктор технических наук,  
профессор  
А.А. Нестеров

## Применение радиальных диаграмм для решения многокритериальных задач программно-целевого планирования

В статье рассматривается способ решения многокритериальных задач программно-целевого планирования, основанный на использовании свертки нескольких целевых показателей качества системы в агрегированный показатель с применением известной процедуры построения лепестковых и радиальных диаграмм.

Большинство задач программно-целевого планирования являются многокритериальными, поскольку используют не один, а несколько целевых показателей, которые необходимо либо максимизировать (минимизировать), либо вывести на заданный уровень для достижения желаемого эффекта [1]. Решение многокритериальных задач связано с определенными вычислительными трудностями [2, 3]. При этом результат получается в виде некоторого множества компромиссных (парето-оптимальных) вариантов, из которых исследователю или лицу, принимающему решение, снова приходится выбирать некоторое решение на основе уже другого критерия [4-6]. Поэтому на практике часто прибегают к свертке нескольких целевых показателей в агрегированный показатель [7, 8]. Одним из методов свертки является построение лепестковой или радиальной диаграммы на множестве целевых показателей [8].

Пусть имеется набор целевых показателей  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , характеризующий качество некоторой системы или направления ее развития. Каждый целевой показатель  $k_i$  нормирован относительно максимально возможного значения и принимает значения  $0 < k_i \leq 1$ . Далее на плоскости задается полярная система координат в виде  $n$  радиусов  $k_i$  с угловыми координатами  $a_i = \frac{2\pi}{n}$ ,  $(i = \overline{1, n})$ . Концы соседних радиусов  $k_i$  соединяются между собой прямыми линиями. В результате получаем следующую лепестковую диаграмму (рисунок 1). Построение лепестковых диаграмм предусмотрено в программной среде MS Excel.

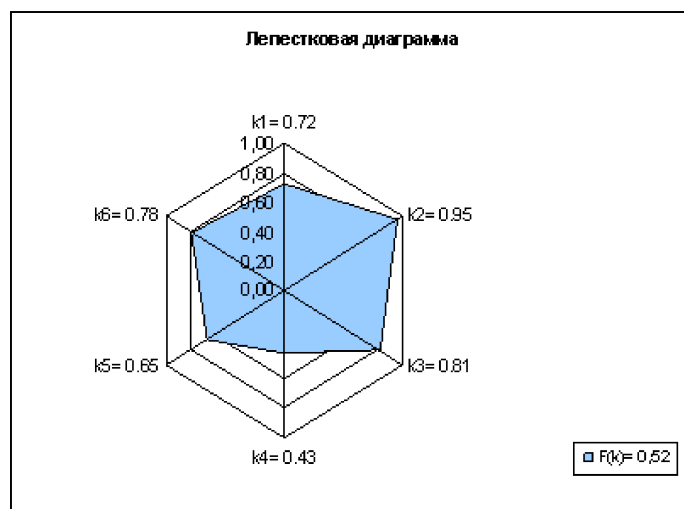


Рисунок 1 – Лепестковая диаграмма целевых показателей системы

Площадь лепестковой диаграммы составляет:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n k_i k_{i+1} \sin \alpha}{2},$$

где  $k_{n+1} = k_1$  и представляет собой аддитивно-мультипликативную свертку целевых показателей исследуемой системы. Площадь правильного многоугольника с радиусом  $k_i = 1$  равна  $S_{max} = \frac{n \sin \alpha}{2}$  и характеризует максимальное значение данной свертки. Отношение площадей характеризует степень близости агрегированного показателя к максимально возможному значению:

$$F(K) = \frac{S}{S_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i k_{i+1}}{n}. \tag{1}$$

Более удобной по сравнению с лепестковой является радиальная диаграмма. Она отличается тем, что концы радиусов  $k_i$  описывают дугу в пределах секторального угла  $\alpha$ , а максимально возможная область представляет собой круг единичного радиуса (рисунок 2).

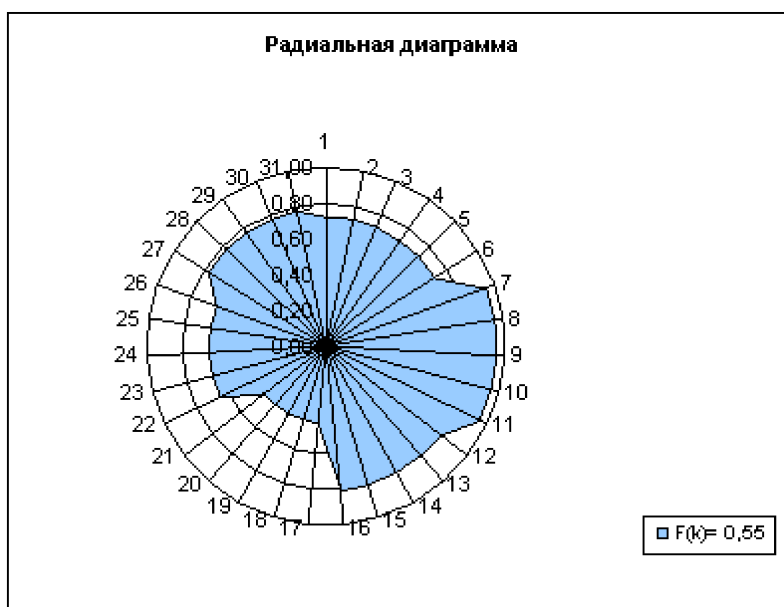


Рисунок 2 – Радиальная диаграмма целевых показателей системы

Площадь радиальной диаграммы составляет  $S = \frac{\pi \sum_{i=1}^n k_i^2}{n}$  и является аддитивной квадратич-

ной сверткой целевых показателей, а площадь единичного круга равна  $S_{max} = \pi$ . В результате агрегированный показатель радиальной диаграммы представляет собой среднее квадратичное значение целевых показателей:

$$F(K) = \frac{S}{S_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n}. \tag{2}$$

Если целевые показатели имеют различную значимость для исследователя, то ее можно учесть изменением полярного угла  $\alpha_i$ , удовлетворяющего условию  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$ . Чем больше угол  $\alpha_i$ , тем больше площадь сектора с радиусом  $k_i$ .

В этом случае агрегированный показатель качества системы будет иметь вид:

$$F(K) = \frac{S}{S_{max}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_i^2}{2\pi}. \quad (3)$$

Для сравнения двух систем, имеющих одинаковый набор, но различные значения целевых показателей, можно использовать агрегированный показатель  $F(K)$ .

Если  $F(K) > F(K')$ , то система с набором целевых показателей  $K$  интегрально предпочтительнее системы с целевыми показателями  $K'$  ( $K > K'$ ). При равенстве  $K = K'$  обе системы считаются равнозначными.

В прикладных задачах целевые показатели  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  содержат элемент неопределенности, обусловленный наличием случайных погрешностей в их значениях. В этом случае агрегированные показатели в форме (2), (3), представляющие собой средние значения квадратов целевых показателей, обладают фильтрующим свойством, уменьшающим влияние случайных погрешностей.

Если известны средние значения  $\bar{k}_i$  и дисперсии  $\sigma_{k_i}^2$  целевых показателей системы, то из формул (2), (3) можно получить средние значения и дисперсии агрегатов  $F(K)$ :

$$\bar{F} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{k}_i^2}{n}; \quad \sigma_F^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{k_i}^2}{n}; \quad (4)$$

$$\bar{F} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{k}_i^2}{n}; \quad \sigma_F^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{k_i}^2}{n}. \quad (5)$$

Принимая распределение агрегата  $F$  приближенно нормальным со средним значением  $\bar{F}$  и дисперсией  $\sigma_F^2$ , можно получить оценку доверительного интервала для  $F$  с заданной доверительной вероятностью  $d$ :

$$\bar{F} - \varepsilon_d \sigma_F \leq F \leq \bar{F} + \varepsilon_d \sigma_F, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_d = \Phi^{-1}\left(\frac{1+d}{2}\right)$  – квантиль нормального распределения с уровнем значимости  $d$ .

Доверительная интервальная оценка позволяет повысить надежность принимаемых решений при анализе систем.

При сравнении систем с агрегированными показателями качества  $F(K)$  и  $F(K')$ , содержащими случайные погрешности, алгоритм принятия решений о предпочтительности систем имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{а) если } \bar{F} - \varepsilon_d \sigma_F \geq \bar{F}' + \varepsilon_d \sigma_{F'}, \text{ то } K > K'; \\ \text{б) если } \bar{F} + \varepsilon_d \sigma_F < \bar{F}' - \varepsilon_d \sigma_{F'}, \text{ то } K < K'; \end{aligned} \quad (7)$$

где знак  $\approx$  означает равнозначность систем.

Повышение качества систем связано с необходимостью дополнительных затрат ресурсов. В этом случае возникает задача оптимального распределения ресурсов по направлениям совершенствования системы и достижения заданного интегрального уровня качества при минимальных затратах ресурсов, либо максимизации интегрального показателя качества при заданных

ресурсах. Обозначим  $C_i(k_i)$  затраты, необходимые для достижения уровня показателя качества  $k_i$ . Эта зависимость, как правило, нелинейная. Чем выше уровень качества системы, тем большие затраты требуются для его достижения.

В прикладных задачах часто используется логистическая зависимость затрат от уровня качества  $k_i$ :

$$C_i(k_i) = \frac{\alpha_i k_i}{(1 + \varepsilon - k_i)^{\beta_i}}, \quad (8)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – параметры, определяемые по статистическим и экспертным данным.

Параметр  $\varepsilon > 0$  ограничивает бесконечно большое значение функции  $C_i(k_i)$  при  $k_i \rightarrow 1$ . График функции затрат  $C_i(k_i)$  показан на рисунке 3.

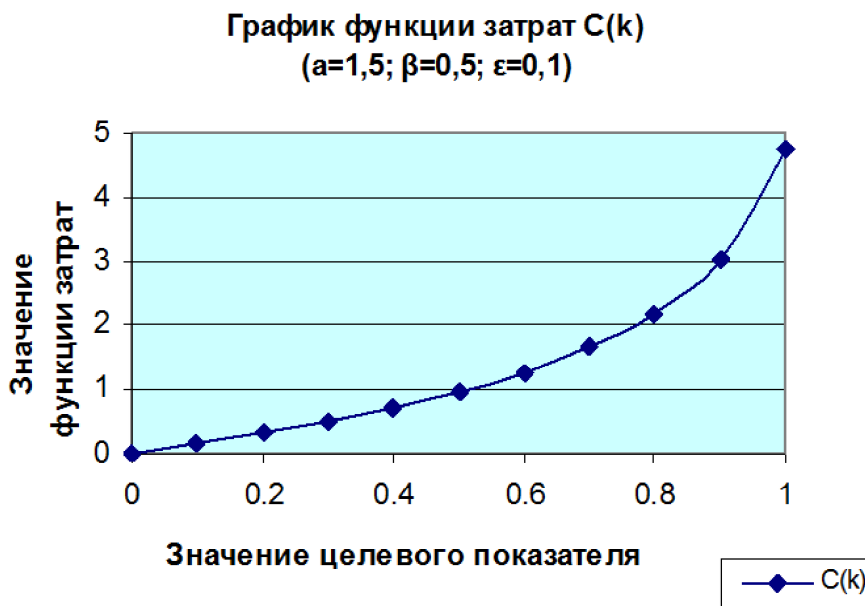


Рисунок 3 – График функции затрат

Общие затраты на реализацию совокупности целевых показателей  $K$  в первом приближении можно представить суммой затрат по отдельным составляющим:

$$C(K) = \sum_{i=1}^n C_i(k_i). \quad (9)$$

В результате получаем следующие задачи математического программирования:

а) прямая задача:

$$C(\bar{K}^*) = \min_K C(\bar{K}); F(\bar{K}^*) \geq F_{зад}; \quad (10)$$

б) обратная задача:

$$F(\bar{K}^*) = \max_K F(\bar{K}); C(\bar{K}^*) \leq C_{зад}, \quad (11)$$

где  $F_{зад}, C_{зад}$  – заданные значения агрегированного показателя качества и затрат.

Рассмотрим примеры решения этих задач применительно к целевым функциям (2), (8) с использованием численных методов. В целях упрощения записи символ осреднения для целевых показателей системы опускаем.

Для прямой задачи целесообразно использовать градиентный метод поиска условного минимума суммарных затрат. В качестве аналога градиента можно использовать отношение  $\Delta F_i(k) / \Delta C_i(k)$ , ограничивая прирост целевых показателей переменным шагом:

$$\delta(t) = \lambda [F_{зад} - F(K(t-1))] \quad (12)$$

с коэффициентом  $\lambda > 0$ , который подбирается в зависимости от скорости сходимости алгоритма. Итерационная схема алгоритма в этом случае имеет следующий вид:

$$C(\bar{K}^*) \leq C_{зад}, \quad (i=1, n), \quad (13)$$

где  $t=1, 2, \dots$  – номер итерации;

$$F_i(k_i) = \frac{k_i^2}{n} - i\text{-я составляющая агрегированного показателя качества системы.}$$

Для обратной задачи итерационный алгоритм остается прежним, кроме расчета величины его шага:

$$\delta(t) = \lambda [C_{зад} - C(K(t-1))]. \quad (14)$$

На рисунках 4-7 приведены графики изменения целевых показателей  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , агрегированного показателя  $F(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{\sum_{i=1}^4 k_i^2}{4}$ , суммарных затрат  $C(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_i k_i}{(1 + \varepsilon - k_i)^{\beta_i}}$  с параметрами  $\alpha_1=1,5; \alpha_2=1,0; \alpha_3=1,2; \alpha_4=1,1; \beta_1=0,5; \beta_2=0,2; \beta_3=0,4; \beta_4=0,3; \varepsilon=0,1$  при минимизации общей стоимости затрат для достижения заданного уровня качества  $F_{зад}=0,7$ .

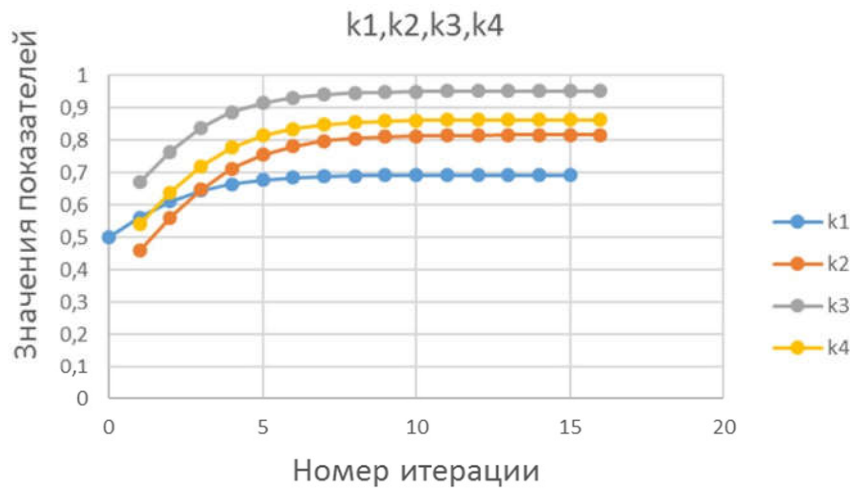


Рисунок 4 – Графики изменения целевых показателей при реализации итерационного алгоритма

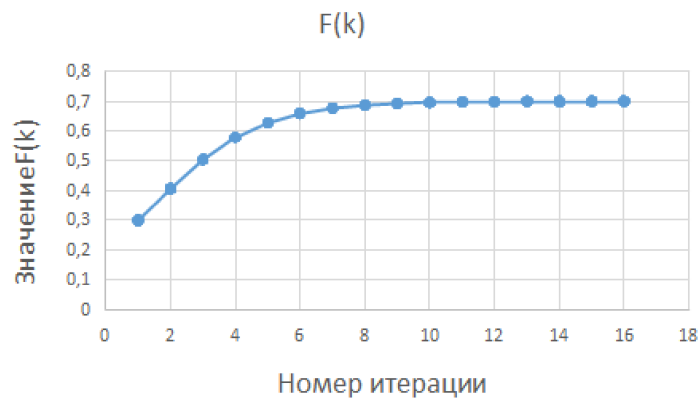
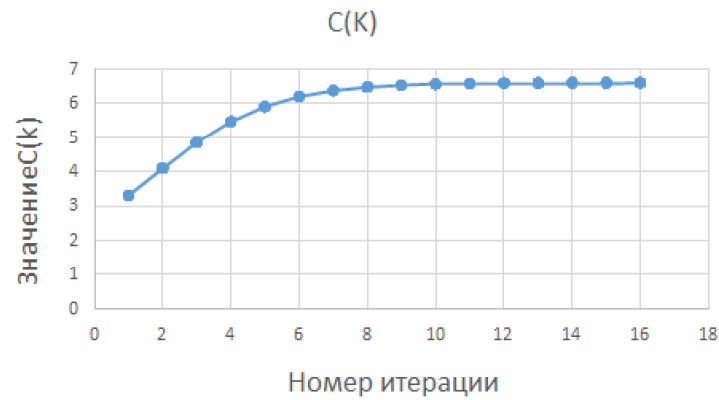
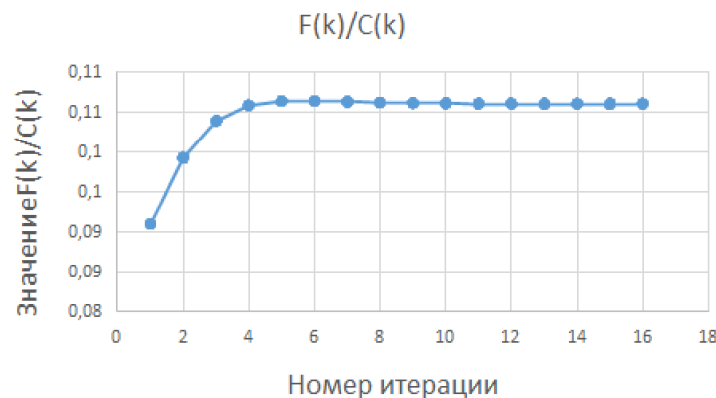


Рисунок 5 – График изменения значения агрегированного показателя  $F(k)$  в процессе итерационного поиска

Рисунок 6 – График изменения стоимости затрат  $C(k)$  в процессе итерационного поискаРисунок 7 – График изменения показателя эффективности системы  $F(k)/C(k)$  в процессе итерационного поиска

Из приведенных рисунков видно, что численный алгоритм поиска (13) быстро и достаточно точно выводит решение на стационарный режим. Подбором коэффициента  $\lambda$  регулируется сходимость алгоритма к стационарной точке. Алгоритм обеспечивает оптимизацию целевой функции как для радиальной, так и для лепестковой диаграмм. В качестве примера применения радиальных диаграмм рассмотрим следующие два примера.

Пример 1. Сравнительная оценка тактических авиационных комплексов.

На базе перечисленных в таблице 1 тактико-технических характеристик современных тактических авиационных комплексов можно сформировать комплекс агрегированных показателей, характеризующих функциональные возможности образца ВВТ. Такими показателями являются [8]:

- грузоподъемность  $G_b / G_{\max}$  ;
- топливоемкость  $G_T / G_{\max}$  ;
- топливная эффективность  $2L / G_T$  , км/кг;
- удельная мощность СУ  $P_{СУ} / G_{\max}$  , кВт/кг;
- дальность  $D_c$  , км;
- время реакции СУВ  $\tau = (D_{\text{обн}} - D_c) / V_{\text{ср}}$  , с;
- летный ресурс  $T_{\text{НР}}$  , час.

Таблица 1 – ТТХ современных тактических авиационных комплексов<sup>1</sup>

Тип ЛА	МиГ-29	Рафаль	F-16C	МиГ-35
Год выпуска	1982	1986	1984	2016
Масса пустого ЛА $G_{п}$ , кг	10900	10000	8275	11000
Объем топлива $G_{т}$ , л	4200	5325	3105	5830
Масса боевой нагрузки $G_{б}$ , кг	3000	6000	5445	7000
Масса взлетная максимальная $G_{макс}$ , кг	18980	19500	17010	23500
Тактический радиус $L$ , км	750	1093	660	1200
Максимальная скорость у земли $V_{макс}$ , км/ч	1300	1900	1400	1450
Скороподъемность $V_{ск}$ , м/с	310	305	375	330
Средняя скорость полета $V_{ср} = \sqrt{V_{макс}^2 + V_{ск}^2}$ , м/с	476	608	479	520
Перегрузка максимальная $n_{γ}$	9	9	9	10
Тяга двигателей $P_{св}$ , кгс	16500	15000	10780	18000
Дальность обнаружения целей $D_{обн}$ , км	80	100	100	120
Дальность применения УР «В-В» $D_c$ , км	60	90	80	110
Летный ресурс ЛА, $T_{нр}$ , час	2500	4000	4000	6000
Площадь зоны рассеивания, $S_p$ , м <sup>2</sup>	314,16	78,54	78,54	78,54
Срок службы, $t_c$ , лет	20	20	20	20

Совокупность перечисленных агрегированных показателей является функционально независимой, и увеличение значения каждого показателя означает повышение военно-технического уровня образца ВВТ. Эти показатели рассчитываются непосредственно по тактико-техническим и эксплуатационным характеристикам комплексов ВВТ и могут сравниваться с аналогичными показателями образцов, принятых за эталон (базовый образец).

В качестве базового образца выбран тактический истребитель F-16C. Значения агрегированных показателей относительно базового образца, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения агрегированных показателей относительно базового образца

Тип ЛА	МиГ-29	Рафаль	F-16C	МиГ-35
Грузоподъемность $G_b/G_{макс}$	0,49	0,96	1	0,93
Топливоемкость $G_t/G_{макс}$	1,21	1,5	1	1,36
Топливная эффективность $2L/G_t$ , км/кг	0,84	0,97	1	0,97
Удельная мощность СУ $P_{св}/G_{макс}$ , кВт/кг	1,21	0,97	1	1,16
Дальнобойность $D_c$ , км	0,75	1,13	1	1,38
Время реакции СУВ $\tau = (D_{обн} - D_c)/V_{ср}$ , с	0,88	1,6	1	1,93
Летный ресурс $T_{нр}$ , час	0,63	1	1	1,5

Представим полученные относительные агрегированные показатели в виде радиальной диаграммы (рисунок 8).

В соответствии с (2) получим:

$$\text{Для МиГ-29} - F(K) = \frac{\sum_{i=1}^n \text{тон} k_i^2}{n} = \frac{0,49^2 + 1,21^2 + 0,84^2 + 1,21^2 + 0,75^2 + 0,88^2 + 0,63^2}{7} = 0,8;$$

1 Левин М.А., Ильин В.Е. Современные истребители. – М.: Хоббикнига, 1994; Энциклопедия современной военной авиации / Авторы-сост.: Морозов А.П., Обухович В.А., Сидоренко С.И., Широкоград А.Б. – Минск: Харвест, М.: АСТ, 2001. – 720 с.; [https://ru.wikipedia.org/wiki/Dassault\\_Rafale](https://ru.wikipedia.org/wiki/Dassault_Rafale); <https://ru.wikipedia.org/wiki/МиГ-35>.

$$\text{для Рафаль} - F(K) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n} = \frac{0,96^2 + 1,5^2 + 0,97^2 + 0,97^2 + 1,13^2 + 1,6^2 + 1^2}{7} = 1,41;$$

$$\text{для F-16C} - F(K) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n} = \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{7} = 1;$$

$$\text{для МиГ-35} - F(K) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{n} = \frac{0,93^2 + 1,36^2 + 0,97^2 + 1,16^2 + 1,38^2 + 1,93^2 + 1,5^2}{7} = 1,84.$$

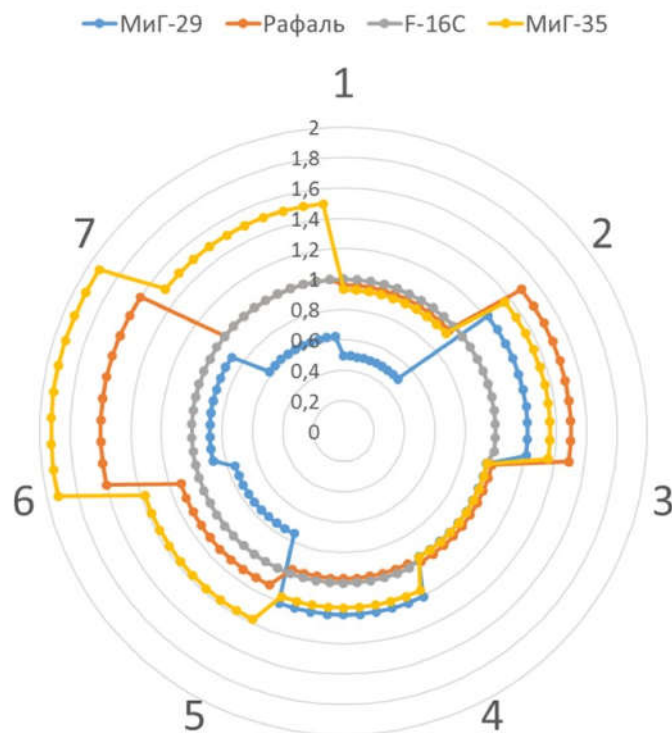


Рисунок 8 – Радиальная диаграмма агрегированных показателей оценки военно-технического уровня образцов

На рисунке 9 показан график результата сравнительной оценки образцов ВВТ с использованием радиальной диаграммы.

Результаты сравнительного анализа также совпадают с оценками, полученными специалистами-экспертами на основе моделирования и анализа результатов практического применения истребителей.

Пример 2. Определение оптимальной стратегии модернизации управляемой ракеты «воздух-поверхность» с лазерно-телевизионной системой.

В качестве основных направлений модернизации управляемой ракеты рассматриваются:

- 1) установка системы спутниковой навигации для повышения точности и надежности наведения ракеты на цель;
- 2) установка двигателя с двумя режимами работы (стартовый и маршевый);
- 3) применение комбинированной боевой части с увеличенным радиусом поражения;
- 4) применение двухканального взрывательного устройства;
- 5) разработка системы газодинамического управления ракетой.



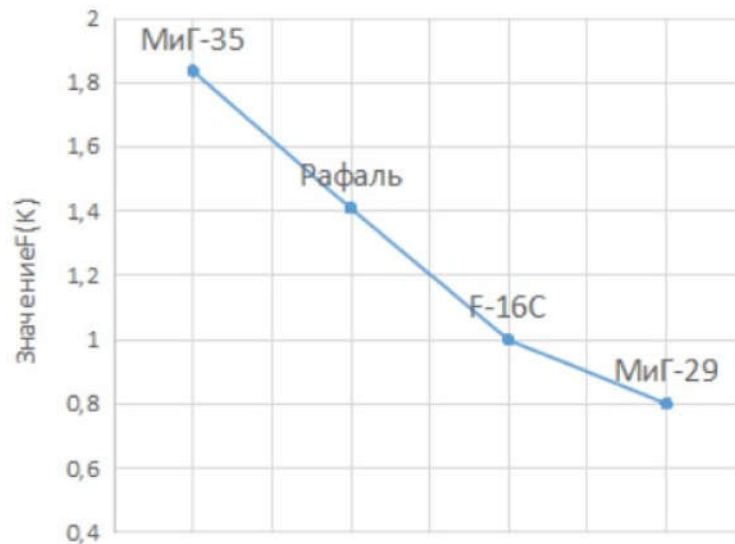


Рисунок 9 – Результаты сравнительной оценки тактических авиационных комплексов

Реализация каждого проектного решения увеличивает эффективность применения ракеты, но и требует увеличения затрат на ее модернизацию. Расчетно-экспертные оценки по реализации указанных проектных решений приведены в таблице 3, где  $F_0, C_0$  – значение показателей эффективности и стоимости исходного образца.

Таблица 3 – Расчетно-экспертные оценки по реализации проектных решений

Варианты проектных решений	1	2	3	4	5
Прирост эффективности применения управляемой ракеты $\Delta F/F_0$	0,15	0,1	0,12	0,07	0,1
Увеличение затрат $\Delta C/C_0$	0,1	0,2	0,15	0,12	0,15
Показатель «эффективность-стоимость» $\frac{\Delta F/F_0}{\Delta C/C_0}$	1,5	0,75	0,80	0,58	0,67

Представим направления модернизации управляемой ракеты и достигаемый эффект по каждому направлению в виде лепестковой диаграммы (рисунок 10).

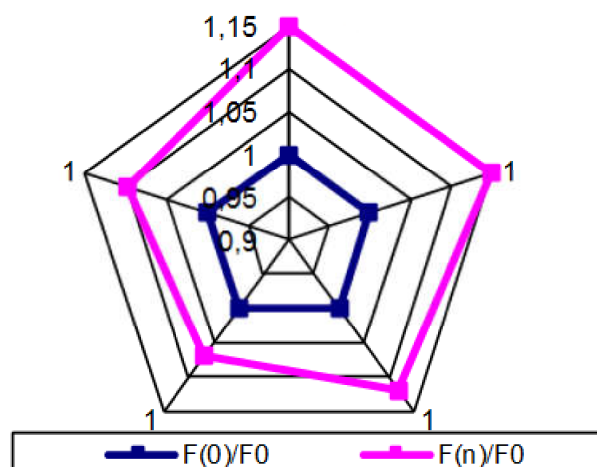


Рисунок 10 – Лепестковая диаграмма направлений модернизации управляемой ракеты

Реализация всех  $n=5$  направлений модернизации ракеты обеспечит рост эффективности

ракеты 
$$F(n)/F_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (1+\Delta F_i/F_0) \cdot (1+\Delta F_{i+1}/F_0)}{n} = 1,25$$
, т. е. на 25% выше, чем у исходного образца.

При этом стоимость модернизированного образца составит  $C(n)/C_0 = \sum_{i=1}^n (1+\Delta C_i/C_0) = 1,72$ , т. е. увеличится более чем в 1,7 раза по сравнению с исходным образцом.

Построим оптимальную стратегию модернизации, основанную на максимальном росте эффективности образца при заданных затратах ресурсов. Будем выбирать направление модернизации исходя из максимального значения градиента  $g_i(l) = \frac{\Delta F_i/F(l)}{\Delta C_i/C(l)}$  на каждом  $l=1, 2, \dots, 5$

шаге. Мы здесь используем относительные приращения эффективности и стоимости при модернизации, так как на практике часто абсолютные значения этих показателей неизвестны.

На первом шаге ( $l=1$ ) выбирается первое направление модернизации, имеющее максимальное значение градиента  $g_i(l)=1,5$ . На втором шаге выбирается третье направление, на третьем шаге – второе, затем пятое и четвертое направление. На рисунке 11 показаны графики зависимости роста эффективности управляемой ракеты и ее стоимости при оптимальной модернизации управляемой ракеты.

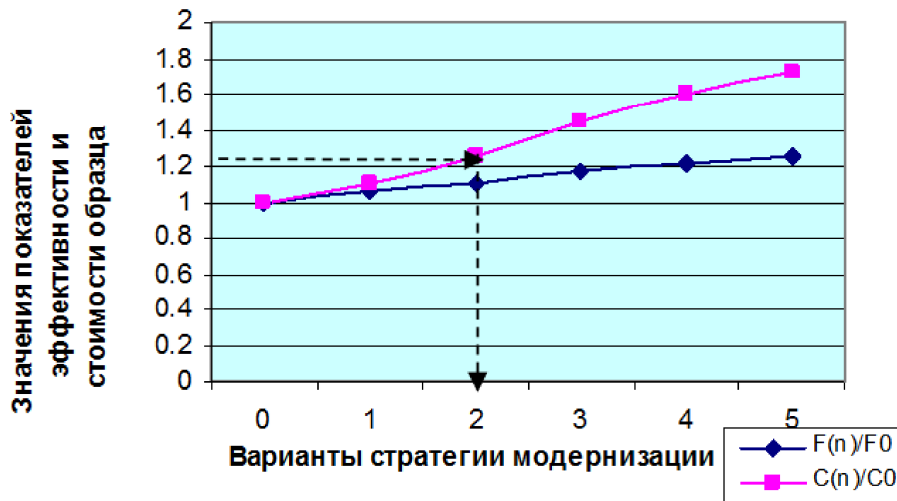


Рисунок 11 – Графики зависимости эффективности и стоимости изделия при оптимальной модернизации управляемой ракеты

Задаваясь значением стоимости можно определить возможные направления модернизации изделия и достигаемый при этом эффект. На рисунке 12 показан график зависимости показателя «эффективность-стоимость»  $\frac{F(l)C_0}{F_0 C(l)}$  от объема модернизации изделия.

Это типичная логистическая зависимость, характерная для военно-технических изделий, когда эффективность образца на единицу вложенных ресурсов уменьшается с ростом затрат.

Предложенный метод свертки многокритериальных задач с использованием лепестковых (радиальных) диаграмм обладает наглядностью, физической и математической интерпретацией и позволяет корректно решать прикладные задачи анализа и синтеза различных военно-технических систем по критерию «эффективность-стоимость».

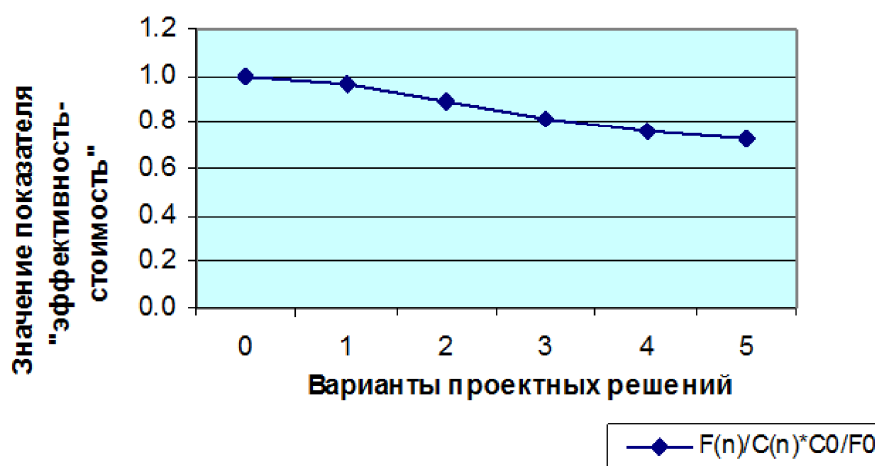


Рисунок 12 – Графики зависимости показателя «эффективность-стоимость» изделия от объема модернизации управляемой ракеты

#### Список использованных источников

1. Методология программно-целевого планирования развития системы вооружения на современном этапе. Части 1,2 / Под ред. В.М. Буренка. – М.: Граница, 2013. – 520 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 363 с.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
4. Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани, С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1978. – 192 с.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 176 с.
7. Семенов С.С. Оценка качества и технического уровня сложных систем: Практика применения метода экспертных оценок. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 352 с.
8. Буравлев А.И., Буренок В.М., Лавринов Г.А., Подольский А.Г., Пьянков А.А. Методы военно-научных исследований систем вооружения. – М.: Граница, 2017. – 512 с.