

И.Б. Бобров, кандидат физико-
математических наук
Н.А. Борщевская, кандидат физико-
математических наук
И.В. Дьяконов
И.В. Кондратьев
Е.В. Ковлаков
С.П. Кулик, доктор физико-
математических наук, профессор
С.С. Страупе, кандидат физико-
математических наук
Г.И. Стручалин
Н.Н. Сысоев, доктор физико-
математических наук, профессор

Квантовая обработка информации: фундаментальные и прикладные аспекты

Краткий обзор основных результатов фундаментальных и прикладных исследований в области квантовых технологий, относящиеся к квантовым вычислениям/моделированию и квантовым коммуникациям, в частности: разработка и создание автоматизированных (без участия оператора) и регенеративных систем квантовой связи на основе волоконно-оптических линий связи и атмосферных каналов с наивысшей степенью защищенности, создание системы мультиплексирования для квантовых каналов связи, изучение физических процессов в сложных квантовых системах, разработка компонентной базы для квантовых компьютеров.

(Окончание. Начало статьи – в предыдущем выпуске журнала)

5. Изучение физических процессов в сложных квантовых системах.

Цель этих исследований – разработка физических основ и технологий генерации неклассических состояний, а также диагностическое сопровождение процессов, происходящих в квантовых системах для задач квантовой связи и квантовых вычислений.

Одной из задач, проводимых в этом разделе исследований, является разработка нового протокола адаптивной квантовой томографии состояний высокоразмерных систем. К его достоинствам относится вычислительная простота нахождения следующего оптимального измерения, а также использование только факторизованных измерений (то есть измерений, чей оператор представим в виде тензорного произведения операторов измерений над подсистемами), что предпочтительно при экспериментальной реализации. Ниже приводится описание последних разработок и проведенных исследований в области пространственных преобразователей мод на основе оптических чипов: квантовая и классическая реконструкция матриц преобразования.

5.1. Теория

Основная часть результатов получена для случая двухкомпонентных систем размерности $D=\sqrt{D}\times\sqrt{D}$. Однако протокол может быть легко обобщен для систем размерности $D=d_1\times\cdots\times d_l$, состоящих из $l > 2$ компонент. Также сформулированы необходимые и достаточные условия на любой протокол томографии, при выполнении которых асимптотическая зависимость ошибки

восстановления от числа зарегистрированных отсчетов N ведет себя как $O(1/N)$, что является наилучшей границей. Эти условия также получены для произвольного разбиения исходной системы на компоненты. Работа протокола протестирована в ходе численных симуляций для систем размерности 9 и 36. Выполнен эксперимент по томографии пространственных состояний пар фотонов, рожденных в процессе спонтанного параметрического рассеяния. Число выбранных пространственных мод соответствовало системам размерности 9 и 36. Продемонстрирована лучшая точность восстановления состояния по сравнению с неадаптивными подходами.

Под квантовой томографией состояний понимают процедуру определения неизвестного квантового состояния ρ посредством серии измерений над ансамблем идентично подготовленных систем, каждая из которых находится в этом неизвестном состоянии. После измерения N копий состояния происходит процедура обработки полученных данных для нахождения оценки состояния $\hat{\rho}$. Одной из целей разработки протоколов томографии является повышение точности оценки при заданном N . Этого можно достичь, двигаясь по двум направлениям: во-первых, за счет оптимального выбора измерений, а во-вторых, за счет модификации алгоритма обработки данных – статистической оценки. Оба подхода дополняют друг друга и могут применяться совместно. Данная работа посвящена первому варианту. Для статистического оценивания использовался распространенный и хорошо известный метод максимального правдоподобия [24]. По сравнению с другими методами (линейная инверсия, байесовский подход) выбранная оценка представляется компромиссом между ее качеством и сложностью проводимых вычислений. Отметим, что вопрос о сложности вычислений встает особенно остро для высокоразмерных систем. Для оптимизации функции правдоподобия применялся алгоритм ускоренного проективного градиентного подъема [25].

По способу выбора измерений протоколы можно разделить на две большие группы: неадаптивные и адаптивные. В неадаптивных схемах набор измерений либо известен заранее (статистические протоколы), либо выбирается случайно. Определяющим для данной группы является факт независимости последующих измерений от данных, полученных при проведении предыдущих измерений. Напротив, в адаптивных протоколах новые измерения находятся с учетом уже полученных результатов, что позволяет повысить точность искомой оценки [26]. Разработанный протокол, называемый в дальнейшем ортогональным, относится ко второй группе. Общая схема протокола содержит следующий цикл. Сначала вычисляется оценка состояния на основе результатов всех ранее проведенных измерений, а далее, используя полученную оценку, находится новое оптимальное измерение, которое затем выполняется. Такие итерации повторяются требуемое число раз. На первом шаге, когда результаты измерений отсутствуют, в качестве априорной оценки используется максимально смешанное состояние. Следует отметить, что выбор следующего измерения зависит только лишь от матрицы плотности текущей оценки истинного состояния. Метод, которым получена оценка, не важен, что ведет к гибкости протокола. Это позволяет, имея хорошую априорную оценку истинного состояния, сразу подстроить протокол под это состояние.

Сама по себе идея использования адаптивных измерений не является новой. Однако развитие квантовых технологий ведет к увеличению размерности систем, и поэтому задача томографии высокоразмерных систем становится все более востребованной. Одной из проблем высокоразмерной адаптивной томографии является сложность вычислений, во-первых, по нахождению оценки истинного состояния, а во-вторых, по нахождению оптимальных измерений. Другая специфичная черта высокоразмерных систем заключается в том, что исследуемая система часто естественным образом разделена на подсистемы меньшей размерности. Полное гильбертово пространство H состояний системы представляется в виде тензорного произведения пространств подсистем: $H=H_1\ldots\otimes H_l$. Соответственно, измерения можно разделить на два класса:

измерения общего вида и факторизованные. При факторизованных измерениях оператор измерения M записывается в виде тензорного произведения операторов измерений над подсистемами: $M=M_1 \dots \otimes M_l$. С экспериментальной и практической точки зрения желательно использовать протоколы на основе только факторизованных измерений, так как их легче реализовать.

Таким образом, к протоколу томографии высокоразмерных систем предъявляются следующие требования:

- 1) высокая точность восстановления произвольных состояний;
- 2) вычислительная простота нахождения оптимальных измерений;
- 3) использование только факторизованных измерений.

Поясним, что подразумевается под высокой точностью восстановления в пункте 1. Точность восстановления неизвестного состояния системы будем характеризовать степенью совпадения F (fidelity) между истинным состоянием ρ и его оценкой $\hat{\rho}$: $F(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}^2 \sqrt{\rho^{1/2} \hat{\rho} \rho^{1/2}}$. Известна теоретическая асимптотическая граница достижимой точности, равная $1-F=O(1/N)$ [27]. Если протокол демонстрирует сходимость $O(1/N)$, то будем говорить, что он обладает высокой точностью. Для практических применений наиболее важными являются чистые и близкие к ним состояния ρ . В то же время они сложны для томографии, так как для неадаптивных протоколов асимптотическая сходимость величины $1-F=O(1/\sqrt{N})$, что качественно хуже, чем $O(1/N)$ для случая смешанных состояний [28]. Использование адаптивных методов с измерениями общего вида позволяет получать оптимальную сходимость $O(1/N)$ для любого входного состояния.

В некоторой степени вышеупомянутые требования противоречат друг другу. Например, вычислительно простые протоколы обычно дают менее точные оценки состояний. Далее, класс факторизованных измерений существенно более ограниченный, чем множество измерений общего вида, поэтому, вообще говоря, факторизованные протоколы заведомо не лучше протоколов общего вида. Хотя известны протоколы с факторизованными измерениями со сходимостью $O(1/N)$ для чистых состояний [26], однако вопрос о влиянии класса измерений на точность томографии оставался не ясным. Разработанный ортогональный протокол удовлетворяет указанным выше требованиям при выполнении дополнительных условий. Эти условия ограничивают точность не только рассматриваемого ортогонального протокола, но и любых протоколов томографии с факторизованными измерениями. Насколько известно авторам, подобные условия ранее не встречались в литературе.

Изучение влияния факторизованных измерений на сходимость томографии основаны на теории универсального статистического распределения величины $1-F$ [6]. Согласно данной теории асимптотически в пределе $N \rightarrow \infty$ среднее значение $\langle 1-F \rangle = \sum_{i=2}^{\nu+1} \frac{1}{\sigma_i}$, где σ_i – отсортированные по убыванию сингулярные числа матрицы информации Фишера для заданной функции правдоподобия (использовалась функция правдоподобия в виде произведения пуассоновских вероятностей), а $\nu = 2R_e D - R_e^2 - 1$ – число вещественных параметров, характеризующих матрицу плотности ранга R_e и размерности D . Значение R_e является параметром алгоритма томографии. Обычно ранг R_s истинного состояния априори неизвестен, поэтому распространена оценка полного ранга, для которой $R_e=D$. Если все сингулярные значения σ_i , входящие в сумму, отличны от нуля, то наблюдается оптимальная сходимость $O(1/N)$. Однако в ходе настоящей работы показано, что в случае, когда ранг истинного состояния и оценки не совпадают, $R_s < R_e$ (что типично для томографии близких к чистым состояний), то часть сингулярных значений обнуляется, если только

не использовать специально подобранные измерения. При этом формально сумма $\langle 1-F \rangle$ обращается в бесконечность, а на практике наблюдается сходимость $O(1/\sqrt{N})$.

Специальным выбором измерений можно добиться того, что сингулярные числа не обращаются в ноль, даже если $R_s < R_e$, что ведет к оптимальной сходимости $O(1/N)$. Следовательно, наличие в протоколе таких измерений, названных ортогональными, является необходимым условием для обеспечения оптимальной точности восстановления. В ходе работы установлено, что минимально достаточное число ортогональных измерений равняется $(R_e - R_s)(2D - R_e - R_s)$. Измерения названы ортогональными, потому что оператор измерения M должен быть ортогонален текущей оценке $\hat{\rho}$ в смысле скалярного произведения Гильберта – Шмидта: $\text{Tr}M\hat{\rho}=0$. Условие ортогональности также означает, что вероятность исхода, соответствующего измерению M , равна нулю. Поиск ортогонального измерения сводится к задаче оптимизации некоторой функции, которая может быть эффективно решена любым методом локальной оптимизации (в частности использовался алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно, BFGS).

Если наложить условие факторизуемости измерений, то оказывается, что ортогональные измерения существуют не всегда. Они существуют, если ранг состояния R не превосходит $R_{max} = d_1 + \dots + d_l - l$, где l – число компонент в системе, а d_i – размерность компоненты с номером i . Для двухкомпонентной системы $R_{max} = 2\sqrt{D} - 2$. Как результат, если используется любой протокол с факторизованными измерениями, и ранг истинного состояния R_s лежит в пределах $R_{max} < R_s < R_e$, то наблюдается медленная скорость сходимости $O(1/\sqrt{N})$. В данном случае для достижения оптимальной асимптотики $O(1/N)$ необходимы измерения общего вида.

Тем не менее результаты численных симуляций и экспериментов с пространственными состояниями пар фотонов (для размерностей $D=9$ и $D=36$) показывают, что ортогональный протокол все равно предпочтителен по сравнению со стратегией случайных измерений даже при $R_{max} < R_s < R_e$. При этом, как и ожидалось, и случайный, и ортогональный протокол демонстрируют сходимость $O(1/\sqrt{N})$, однако для ортогональных измерений зависимость $\langle 1-F \rangle$ лежит ниже. По результатам эксперимента преимущество может достигать до $\approx 2,2$ раз в зависимости от чистоты приготавливаемого состояния.

5.2. Эксперимент

На рисунке 5 показана одна из экспериментальных установок ЦКТ – квантово-томографический комплекс, на которой происходят генерация и измерение квантовых состояний света.

Апробация ортогонального протокола проводилась в эксперименте по томографии поперечных пространственных мод пар фотонов, рожденных в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Упрощенная схема экспериментальной установки изображена на рисунке 6. Управление пространственным состоянием пар фотонов, рожденных в процессе спонтанного параметрической рассеяния в кристалле РРКТР, осуществляется посредством пространственного фазового модулятора света SLM1. Разные половины модулятора SLM2 вместе с одномодовыми волокнами SMF выполняют заданное проекционное измерение приготовленного состояния.

Данная схема типична при работе с пространственными состояниями бифотонов и основывается на интерферометре Хэнбери Брауна – Твисса с установленными в каждом плече пространственными фазовыми модуляторами света (ПФМ). Излучение диодного лазера с длиной волны 407 нм после пространственной фильтрации одномодовым оптоволокном (не показано на рисунке) направляется на ПФМ SLM1 с целью получения заданного поперечного профиля пучка в первом порядке дифракции после ПФМ. Подготовленный пучок служит накачкой нелинейного периодически поляризованного кристалла титанила фосфата калия РРКТР длиной

25 мм. Кристалл спроектирован под коллинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа II. Линза L1 обеспечивает оптимальную фокусировку накачки в кристалл для получения одномодового режима генерации СПР [30]. Преобразованное излучение коллимируется линзой L2, и рожденная пара фотонов разделяется с помощью поляризационного светоделителя PBS. В каждом выходном канале PBS установлены две половины одного ПФМ SLM2, выполняющие заданное унитарное факторизованное преобразование состояния бифотона. Далее излучение собирается объективами в одномодовые волокна, где происходит проекционное измерение на фундаментальную (гауссовскую) пространственную моду волокна. Световоды подключены к счетным однофотонным детекторам D1 и D2. Коррелятор CC регистрирует события одновременного прихода фотонов в пределах временного окна 4 нс. Это обеспечивает учет только пар фотонов, рожденных в процессе СПР, а также фильтрацию фоновой засветки.

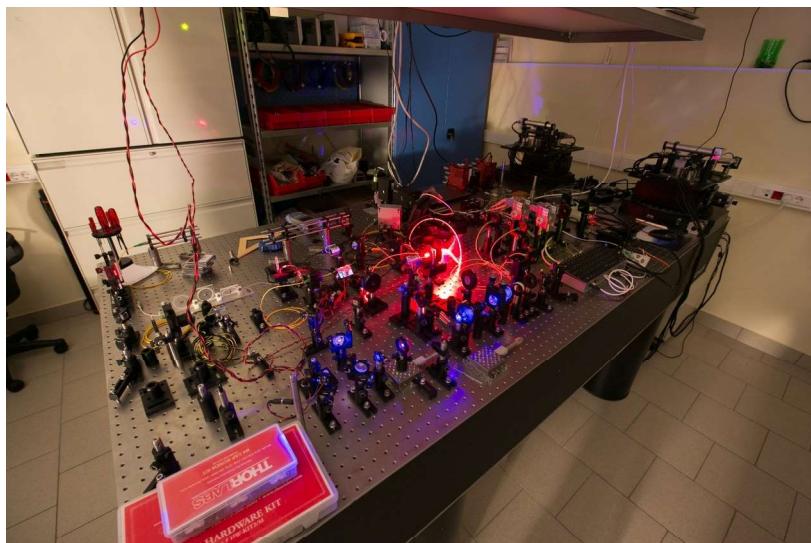


Рисунок 5 – Квантово-томографический комплекс для генерации и измерения квантовых состояний света

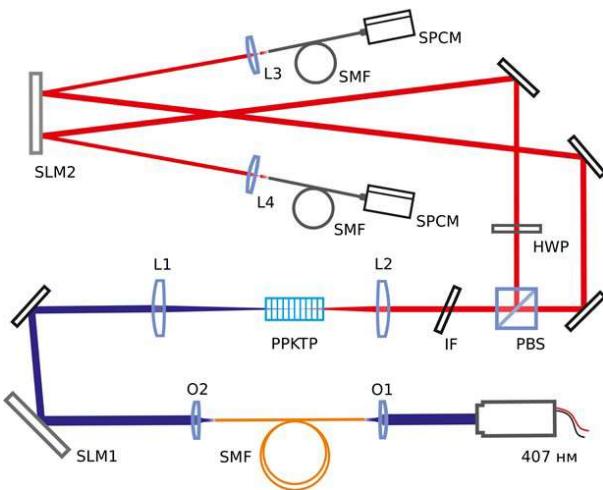


Рисунок 6 – Схема экспериментальной установки

Цифровая голограмма, отображаемая на SLM1, задает пространственное состояние приготавливаемых пар фотонов, а голограммы на ПФМ SLM2 определяют выполняемое измерение. Используемые ПФМ состоят из жидкокристаллической матрицы и способны модулировать только фазу отраженного от них излучения. Используя методику из работы [31], можно аналитически

рассчитать голограмму, после дифракции света на которой в первом порядке наблюдается заданное пространственное распределение, промодулированное как по фазе, так и по амплитуде. Описанная экспериментальная установка позволяет выполнять только факторизованные измерения, так как фотоны из рожденной пары разделяются светоделителем и в дальнейшем распространяются по отдельности.

В проведенных экспериментах для кодирования пространственных состояний использовались моды Эрмита-Гаусса. Амплитуда поля в перетяжке моды Эрмита-Гаусса описывается выражением:

$$HG_{nm}(x, y) \propto H_n\left(\frac{x}{w}\right) H_m\left(\frac{y}{w}\right) \exp\left(\frac{-x^2 + y^2}{2w^2}\right),$$

где n, m – неотрицательные индексы мод;

x, y – координаты в поперечной распространению пучка плоскости;

w – размер перетяжки;

H_n – полином Эрмита степени n .

Порядок моды определяется как сумма $n+m$.

Экспериментально были приготовлены два состояния:

1. $HG_{00} \otimes HG_{00}$ – факторизованное (в дальнейшем оно будет упоминаться как гауссовское состояние);

2. $(HG_{10} \otimes HG_{00} + HG_{00} \otimes HG_{10})/\sqrt{2}$ – перепутанное (белловское состояние).

Данные состояния получаются, если на кристалл направить пучок накачки в модах HG_{00} и HG_{10} соответственно. При этом размеры перетяжек всех пучков (как накачки, так и детектирующих мод) должны быть правильно подобраны, исходя из параметров кристалла [32]. Гауссовское состояние было дополнительно пропущено через одномодовый световод, устанавливаемый между кристаллом и поляризационный светоделителем (не показан на рисунке 7), с целью увеличения его чистоты.

В данной работе рассматривается томография только конечномерных систем, поэтому формально бесконечномерное пространство пространственных состояний следует ограничить, выбрав некоторое подпространство размерности D . Выбирая моды до первого порядка включительно, а именно $HG_{00}, HG_{01}, HG_{10}$, и образуя их всевозможные попарные тензорные произведения (например, $HG_{00} \otimes HG_{01}$), получим подпространство размерности $D=9$. Добавив моды второго порядка $HG_{11}, HG_{20}, HG_{02}$, придем к подпространству увеличенной размерности $D=36$. Таким образом, в работе исследуются системы, имеющие естественное разбиение на две трехмерных и шестимерных подсистемы соответственно.

Истинное состояние в эксперименте неизвестно, поэтому точность томографии характеризуется как расстояние $1-F$ между текущей и финальной оценкой $\hat{\rho}(N_0)$, полученной после детектирования N_0 событий. Графики зависимостей этой величины от числа зарегистрированных отсчетов N изображены на рисунке 7 (а-в) для томографии гауссовского и белловского состояний, восстановленных как состояния полного ранга. Результаты усреднены по нескольких проходам томографии (от 5 до 20), и полный объем статистики в каждом из них составил $N_0 = 3 \times 10^5$. Очевидно, приближении N к N_0 расстояние $1-F$ стремится к нулю, что не соответствует реальному улучшению точности оценки (характеризуемой как расстояние до истинного состояния). По этой причине графики приводятся только до значений $N = 5 \times 10^4$. Так же, как показывает анализ, при $N > 5 \times 10^4$ оценка в действительности перестает улучшаться из-за наличия инструментальных погрешностей.

Как следует из результатов, во всех рассмотренных случаях ортогональный протокол демонстрирует преимущество по сравнению со стратегией случайных измерений. Однако степень улучшения зависит от чистоты и размерности приготовленного состояния. Наибольший выигрыш достигается при томографии гауссовского состояния, обладающего наибольшей чистотой, в подпространстве меньшей размерности $D=9$. Для случайных измерений наблюдается сходимость $1-F \propto N^{-0.5}$, а для ортогонального протокола степень сходимости увеличивается до $1-F \propto N^{-0.7}$ (рисунок 7а). Эта разница ведет к повышению точности оценки в 2,2 раза при $N=5 \times 10^4$ (данное отношение растет с ростом N). В случае, когда гауссовское состояние восстанавливается в подпространстве более высокой размерности $D=36$, степени сходимости (наклоны зависимостей на графиках) для ортогонального протокола и случайных измерений примерно сравниваются (рисунок 7б). Тем не менее ортогональный протокол дает лучшую в 1,4 раза точность. Это отношение остается постоянным для различных N . Наименьшее преимущество наблюдается для состояния Белла, которое обладает относительно низкой чистотой. Среднее отношение расстояний $1-F$ для двух сравниваемых протоколов составило 1,25 (рисунок 7в).

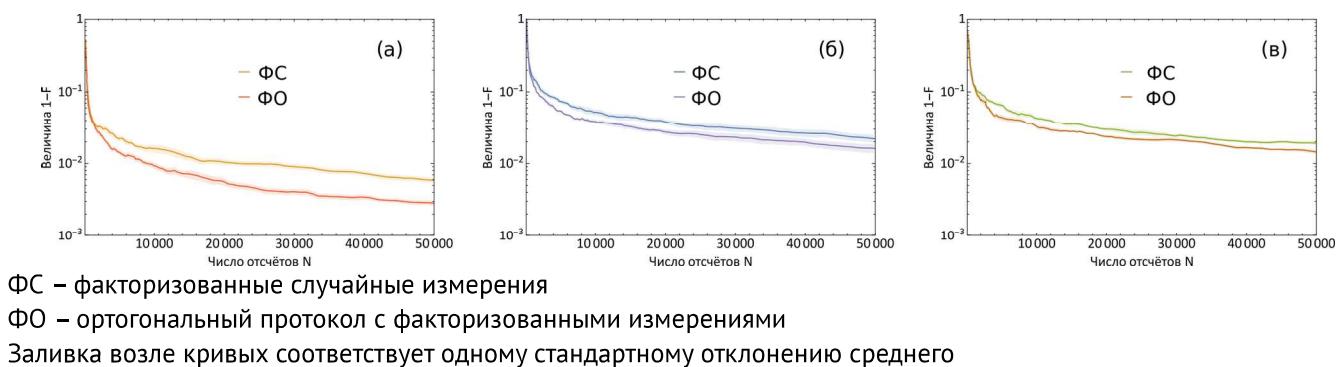


Рисунок 7 – Зависимости величины $\langle 1-F \rangle$ от числа зарегистрированных отсчетов N , полученные в эксперименте по томографии факторизованного состояния размерности $D=9$ (а) и $D=36$ (б) и запутанного состояния размерности $D=9$ (в)

Таким образом, в части диагностического сопровождения процессов, происходящих в квантовых системах для задач квантовой связи и квантовых вычислений, получены следующие результаты:

1. Разработан новый протокол адаптивной квантовой томографии состояний высокоразмерных систем. К его достоинствам прежде всего относится вычислительная простота нахождения следующего оптимального измерения, а также использование только факторизованных измерений, т. е. измерений, чей оператор представим в виде тензорного произведения операторов измерений над подсистемами. Именно такой тип измерений достаточно просто реализуется в эксперименте.

2. Построена экспериментальная установка (рисунки 5, 6) для управления пространственными состояниями пар фотонов. Управление эффективно осуществляется при помощи пространственных модуляторов, которые формируют пространственный профиль излучения накачки, а также преобразуют многомерные пространственные состояния двухфотонного света и вместе с одномодовыми волокнами SMF выполняют заданное проекционное измерение приготовленного состояния.

6. Разработка компонентной базы для квантовых компьютеров.

Цель этих исследований – поиск и использование свойств реалистичных физических систем, лежащих в основе устройств квантовой обработки информации и квантовых вычислений/симуляций.

Основные направления исследований в этой области сводятся к исследованию физических принципов и последующей разработке прототипов цифровых и аналоговых квантовых симуляторов, реализованных на двух различных физических платформах – одночочных атомах в оптических ловушках и фотонах в линейно-оптических схемах, и объединенных общей архитектурой управляющей системы, обеспечивающей универсальность и возможность реализации широкого класса квантовых вычислительных алгоритмов и алгоритмов квантовых симуляций. В настоящий момент существует несколько конкурирующих физических моделей для построения квантовых компьютеров и квантовых симуляторов. Среди наиболее (перспективных) популярных – модели на основе сверхпроводниковых кубитов, одночных ионов и атомов в ловушках, оптических фотонов в интегральных схемах и др. В связи с этим представляется актуальной разработка архитектуры квантового вычислительного устройства с возможностью адаптации к различным вариантам аппаратных решений на физическом уровне. Такая архитектура позволит обеспечить максимальную гибкость и независимость от конкретной используемой физической реализации кубитов. В связи с этим представляется актуальным направить усилия на разработку и создание прототипа такой архитектуры на примере конкретного квантового симулятора среднего масштаба (работающего в пространстве состояний размерности до 50 физических кубитов).

В Центре квантовых технологий внимание делается упор на развитие следующих основных взаимосвязанных направлений/технологий, позволяющих эффективно решать проблемы разработки квантовых вычислительных систем:

- технологии линейно-оптических квантовых вычислений;
- технологии эффективного управления изолированными атомными системами и создания вычислительных регистров на их основе;
- технологии цифровых и аналоговых квантовых симуляторов на основе оптических и атомных систем.

Важно отметить, что объединяющим элементом этих усилий станет универсальная архитектура управляющей системы, которая позволит выполнять один и тот же квантовый алгоритм (программный код) на квантовых вычислителях, реализованных как на атомных, так и на фотонных системах.

6.1. Фотонные системы

Линейно-оптические квантовые вычисления занимают обособленное место в ряду физических платформ для реализации универсального квантового компьютера или квантового симулятора. Во-первых, в отличие от остальных систем, квантовые состояния света слабо подвержены декогеренции и существуют эффективные методы ее подавления, во-вторых, оптические фотоны являются универсальными носителями информации, пригодными как для обработки (реализации алгоритмов вычислений), так и для передачи информации (в том числе и по квантовым каналам связи). Основными проблемами для реализации оптического квантового компьютера являются отсутствие эффективных (>99%) однофотонных источников по требованию, отсутствие эффективных однофотонных детекторов с высокой квантовой эффективностью, а также вероятностный характер двухкубитных оптических гейтов, обусловленный слабым взаимодействием одночных фотонов друг с другом. В направлении увеличения эффективности взаимодействия фотонов в нелинейных средах, а также построения N -фотонных источников/детекторов ведутся интенсивные исследования [38-40], тем не менее до сих пор реализация квази-детерминистического квантового гейта остается нерешенной задачей. В то же время современные теоретические исследования в области построения линейно-оптического квантового компьютера [41, 42] достигли существенных результатов, позволивших на несколько порядков уменьшить объем дополнительных ресурсов (одночных фотонов, оптических мод и однофотонных детекторов) необходимый для создания устойчивого к ошибкам полномасштабного квантового компьютера.

На сегодня существует два подхода к решению квантово-механической задачи определения собственных энергий многочастичных систем, к которым относятся сложные молекулы. Первый из них основан на квантовом алгоритме оценки фазы [3, 43], позволяющем в результате итеративной процедуры определить величины собственных энергий с химической точностью. Алгоритм задействует экспоненциально меньшее количество ресурсов и времени, нежели классические аналоги. Второй подход (квантовый вариационный алгоритм) основан на квантовом алгоритме оценки величины среднего значения гамильтониана системы [44].

Отдельно следует выделить задачи, которые можно описать гамильтонианами Изинга. Интерес к задаче нахождения основных состояний гамильтониана Изинга связан с возможностью поставить ей в соответствие различные оптимизационные задачи, встречающиеся в биологии, медицине, искусственном интеллекте и других. До недавнего времени эффективного способа решения таких проблем не существовало, поэтому интерес представляет построение физических изинговских моделей и проведение с их помощью необходимого моделирования. Недавно было предложено проводить исследования изинговских систем с использованием квантовых свойств оптического излучения и поставлены первые демонстрационные эксперименты [45-49]. Системы нейтральных атомов в оптических ловушках являются одной из наиболее перспективных систем для симуляции изинговских гамильтонианов. Недавние работы [36, 37] продемонстрировали принципиальную возможность симуляции систем из нескольких десятков спинов.

Задача о моделировании эволюции системы невзаимодействующих неразличимых бозонов под воздействием известного унитарного преобразования [50-54] является наиболее вероятным кандидатом для получения первых результатов о превосходстве квантовых вычислительных устройств над классическими. Постановка задачи не предполагает использование «перепутывающих» квантовых гейтов, что упрощает реализацию такого устройства и делает линейно-оптическую экспериментальную платформу естественным кандидатом для создания прототипа бозонного сэмплера. Использование интегрально-оптических технологий открывает дорогу к созданию линейно-оптических устройств, моделирующих квантовые унитарные преобразования размерностью, достаточной для демонстрации превосходства квантового компьютера над классическим. Серьезным препятствием на пути к реализации полномасштабного бозонного сэмплера является отсутствие эффективных источников однофотонных (или многофотонных фотоквантовых) состояний света по требованию.

Создание прототипа линейно-оптического квантового вычислителя основано на технологии фемтосекундной лазерной печати интегрально-оптических волноводных структур в прозрачных материалах и стандартной технологии литографии с использованием полупроводниковых материалов (Si_3N_4). Фемтосекундная лазерная печать предоставляет возможность быстрогоprotотипирования как пассивных, так и активных интегрально-оптических устройств с низкими потерями (< 1 дБ/см). Одним из основных преимуществ данной технологии является возможность изготовления интегрально-оптических структур с 3D-топологией. Благодаря этому становится возможно создание структур с оптимальной архитектурой, что значительно упрощает дизайн сложных интегральных схем. Интегральная оптика, созданная по литографической технологии, отличается высокой степенью миниатюризации оптических элементов за счет высокого контраста показателя преломления. Основной задачей в области изготовления интегрально-оптических элементов является повышение качества осуществляемых квантовых преобразований над состояниями адаптивными методами. Параллельное развитие обеих технологий изготовления интегрально-оптических элементов позволит на начальном этапе проекта решить базовые задачи, связанные с выбором и отладкой алгоритмов оптимизации характеристик интегральной оптики, с помощью более простого метода фемтосекундной лазерной печати и подготовить к концу проекта интегральную платфор-

му на базе литографии для последующего масштабирования квантовых линейно-оптических вычислителей. Проблема приготовления квантовых состояний света будет решена с помощью источников фотонов двух типов: вероятностного, на основе эффекта спонтанного параметрического рассеяния, и детерминистического, на основе квантовых точек в полупроводниковых структурах. Ключевой задачей группы интегральной оптики сектора квантовых вычислений ЦКТ является создание адаптивной интегрально-оптической системы, обеспечивающей высокую точность квантовых преобразований, необходимых для реализации прототипа линейно-оптического квантового вычислителя. При этом прикладной интерес связан с разработкой способов изготовления крупномасштабных интегральных оптических схем, способных работать с поляризационными квантовыми состояниями фотонов.

На рисунке 8 приведен фотонный чип в сборе – с элементами термоэлектрического управления для управления фазами в интегрально-оптическом интерферометре – изготовленный по технологии фемтосекундной лазерной печати. Это устройство позволяет выполнять произвольные унитарные преобразования пространственных кубитов размерности $D=4$. Такие чипы, в частности, используются для выполнения криптографических операций, а также для изготовления элементов твердотельной квантовой памяти [56, 57].

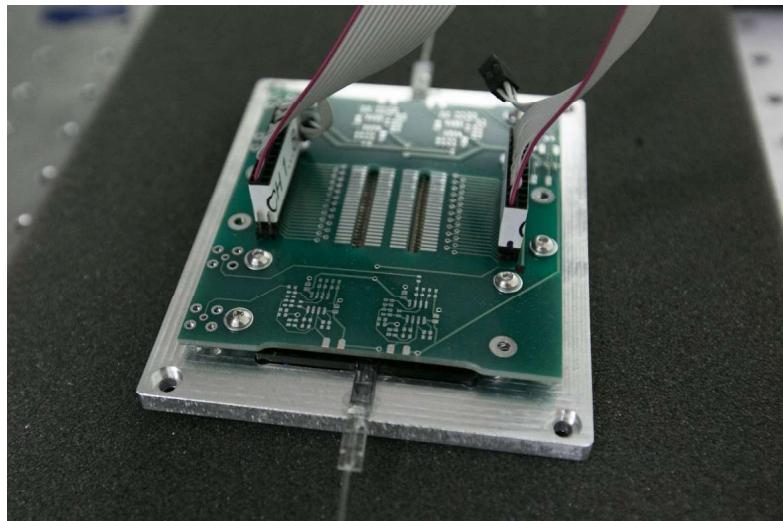


Рисунок 8 – «Фотонный чип», осуществляющий произвольные унитарные преобразования 4×4

6.2. Атомные кубиты

Технология, основанная на использовании атомных (и ионных) кубитов, обладает рядом преимуществ, которые позволяют рассчитывать на создание на ее основе практически полезных устройств в краткосрочной перспективе. В частности, атомные и ионные кубиты обладают большими временами когерентности (до сотен мс), намного превосходящими времена выполнения логических операций. Технология на основе нейтральных атомов (в отличие от ионов) также демонстрирует большой потенциал для масштабируемости: уже сейчас продемонстрированы регистры из более 50 упорядоченных атомных кубитов [33, 34], в ближайшей перспективе представляется реалистичным создание регистров с числом физических кубитов до 2000 [35]. Наиболее перспективной технологией для создания таких регистров представляется использование массивов дипольных микро-ловушек, создаваемых с помощью активных фазовых голограмм. Этот подход обладает максимальной гибкостью и предоставляет возможности для создания динамически перестраиваемых регистров с произвольной пространственной структурой, что особенно важно для реализации аналоговых симуляторов. Реализация физических кубитов на основе сверхтонких подуровней основного состояния атомов щелочных металлов помимо

больших времен когерентности обеспечивает простоту реализации однокубитных вентилей с индивидуальной адресацией, уже сейчас качество таких операций выше порога масштабируемости для большинства квантовых кодов коррекции ошибок [35]. Задачей ближайшего времени является реализация эффективных двухкубитных вентилей на основе диполь-дипольного взаимодействия атомов, возбужденных в ридберговские состояния. Теоретические оценки показывают, что этот подход позволит реализовать вентили высокого качества, большая часть проблем сейчас сводится к решению инженерных задач и может быть преодолена в ближайшие годы. Таким образом, в этой архитектуре возможна экспериментальная реализация кодов коррекции ошибок с небольшим количеством физических кубитов на один логический кубит, в отличие от, например, сверхпроводящих и линейно-оптических архитектур, в которых масштабируемость требует реализации сложных топологических кодов с огромным оверхэдом.

Реалистичными приложениями атомных квантовых вычислителей в ближайшей перспективе являются аналоговые симуляции сложных твердотельных моделей, актуальные в материаловедческих задачах, реализация поисковых алгоритмов на основе случайных блужданий, реализация классически неразрешимых задач сэмплинга и другие. Характерный масштаб задач в несколько десятков логических кубитов уже в ближнесрочной перспективе позволяет продемонстрировать реальное преимущество в быстродействии над классическими алгоритмами. Первые прототипы таких симуляторов уже продемонстрированы [36, 37].

Основным экспериментальным полигоном для технологии холодных атомов станет квантовый регистр, содержащий до нескольких десятков атомов. Основой предлагаемого регистра будут одиночные нейтральные атомы ^{87}Rb в оптических дипольных микроловушках. Микроловушки реализуются с помощью конфокальных асферических линз большой числовой апертуры (0,5 и более), установленных внутри вакуумной камеры. Основным методом реализации массива атомов в предлагаемом проекте станет использование голограмического оптического пинцета – создание массива микроловушек путем формирования заданного фазового фронта захватывающего пучка с помощью внешнего пространственного модулятора света. На рисунке 9 показана корреляционная функция интенсивности второго порядка, низкое значение которой при нулевой задержке является свидетельством захвата одиночного атома. Измерения проводились на стенде, схема которого представлена на рисунке 10.

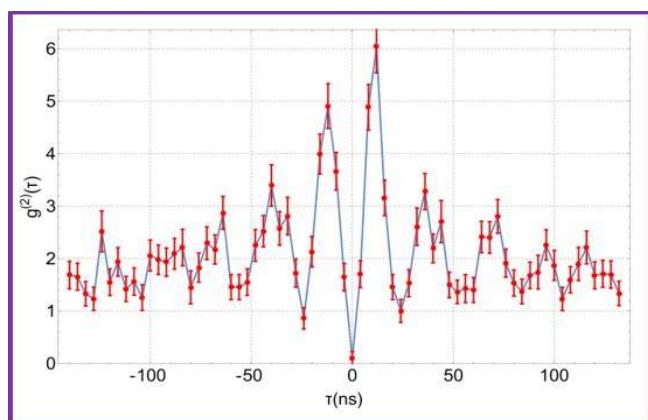


Рисунок 9 – Корреляционная функция интенсивности второго порядка для одиночного атома ^{87}Rb .

Возможность захвата нескольких десятков атомов в регулярные массивы, созданные таким методом, подтверждается недавними экспериментами конкурирующих групп, а также предварительными экспериментами, проведенными в нашей лаборатории. На рисунке 11 показана лабо-

ратория атомной оптики ЦКТ и уникальный стенд для захвата удержания и исследования массивов одиночных атомов рубидия.

Стенд по исследованию и захвату атомов рубидия в оптическую ловушку состоит из двух модулей – модуля приготовления оптического излучения для захвата/удержания одиночных атомов и модуля, на котором размещена вакуумная камера и оптическая схема, формирующая рабочие и вспомогательные пучки. Там же расположена и система регистрации света, испускаемого атомами.

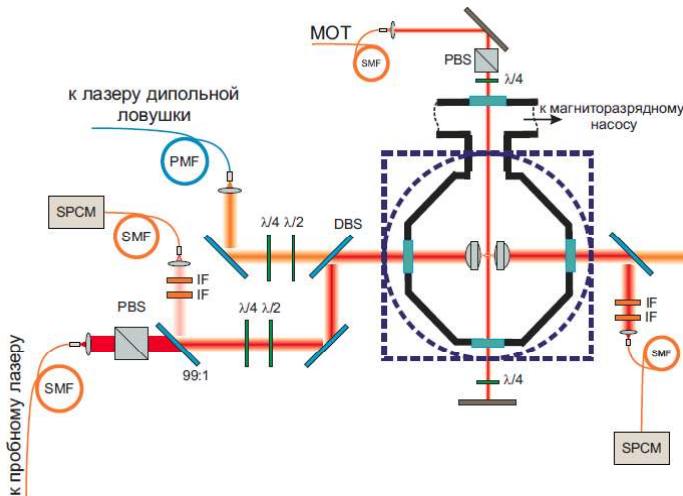


Рисунок 10 – Схема экспериментальной установки по измерению корреляционной функции интенсивности второго порядка. Атом находится в конфокальном микроскопе, помещенном внутрь вакуумной камеры. Показаны управляющие и пробные лазеры; SMF (PMF) – одномодовое волокно (сохраняющее поляризацию) для подвода/сбора излучения; DBS – дихроичное зеркало; SPCM – однофотонные модули – счетчики фотонов; IF – интерференционные фильтры; $\lambda/2$ и $\lambda/4$ – полу- и четвертьволновые пластинки для управления поляризации.

Ключевой задачей, которую потребуется решить станет реализация в таком регистре одно- и двухкубитных вентилей с достаточно низким уровнем ошибок. Следует подчеркнуть, что для получения результатов в регистрах промежуточного масштаба, рассматриваемых в рамках предлагаемого проекта, необязательно достижение сверхвысокой точности выполнения логических операций, а уровни ошибок в единицы процентов представляются вполне достижимыми для сегодняшнего уровня развития экспериментальной техники. В отдельности практически все ключевые элементы разрабатываемого регистра уже продемонстрированы в экспериментальных работах различных групп. Основной научно-технической задачей группы атомной оптики ЦКТ будет объединение и доработка существующих решений для обеспечения масштабируемости разрабатываемого регистра с пространством квантовых состояний размерности до 50 физических кубитов.

Технология голограммического пинцета позволяет создавать регулярные массивы из большого (несколько десятков) числа нейтральных атомов (рисунок 12). Захватывающий потенциал формируется в областях большой интенсивности лазерного излучения, отстроенного в красную область от атомного перехода. Формирование заданного потенциала производится с помощью цифровых голограмм, формирующих требуемое распределение интенсивности в фокальной плоскости фокусирующей асферической линзы. Голограммы отображаются с помощью жидкокристаллического фазового пространственного модулятора света. Для захвата рубидия используется излучение на длине волны 830-850 нм, что является разумным компромиссом между противоречивыми требованиями: уменьшением необходимой для формирования ловушки мощности (уменьшается с

уменьшением отстройки от резонанса) и уменьшением вероятности рассеяния фотонов из пучка ловушки (уменьшается при увеличении отстройки). Мощность, необходимая для формирования потенциала, глубиной 1 мК, составляет ~2 мВт на длине волны 830 нм, таким образом разумная мощность в несколько сотен мВт, достижимая с помощью коммерчески доступных диодных лазеров позволит создать массив ловушек из ~100 узлов (рисунок 126).

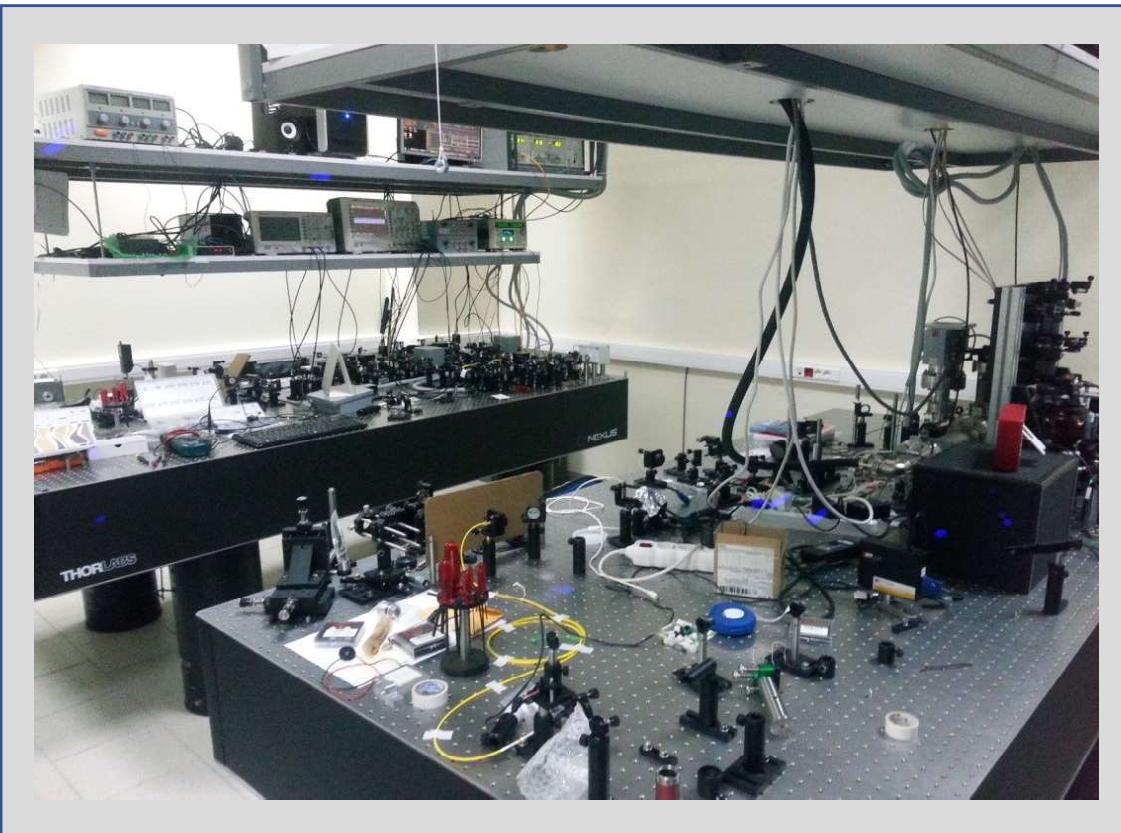


Рисунок 11 – Стенд по исследованию и захвату атомов рубидия в оптическую ловушку

На рисунке 12а показана матрицы из 9 и 25 атомов рубидия, захваченных в оптическую ловушку. На рисунке отчетливо видно пространственное распределение излучения, испущенного ловушкой, которое локализовано в узлах матрицы. Неоднородность распределения интенсивности обусловлена неоднородностью поперечного профиля пучка, осуществляющего захват атомов. Рисунок 12б демонстрирует маску, созданную голограммической ловушкой и состоящей из 400 узлов.

В настоящий момент существует два основных метода реализации двухкубитных вентилей для нейтральных атомов. Первый вариант использует диполь-дипольное взаимодействие атомов в высоковозбужденных ридберговских состояниях, второй основан на адиабатическом сближении удерживающих атомы микроловушек и взаимодействии атомов внутри одного узла. Оба типа вентилей требуют по возможности меньшей энергии теплового движения атома в ловушке: неоднородные энергетические сдвиги логических и ридберговских уровней ухудшают качество ридберговских вентилей, а вентили столкновительного типа вообще требуют для своей работы охлаждения атомов до основного колебательного состояния.

Поэтому одной из первоочередных задач группы будет реализация методов рамановского охлаждения атомов в массиве ловушек до основного колебательного состояния. Для одиночных дипольных ловушек такое охлаждение недавно продемонстрировано экспериментально, однако в больших массивах экспериментальные работы еще только предстоят. Мы планируем параллельную разработку вентилей обоих типов, т. е. одновременно с работами по рамановскому

охлаждению будет вестись разработка лазерной системы для двухфотонного возбуждения в ридберговские состояния. Рамановская система представляет собой два привязанных по фазе лазера на длине волны 780 нм, стабилизированные по частоте на переходы между подуровнями сверхтонкого расщепления D2 линии рубидия с $F=1-F'=2$ и $F=2-F'=2$ с отстройкой в несколько десятков ГГц и отстроенные от точного рамановского резонанса на частоту колебательного фона. Эта же система будет использоваться для реализации рамановских однокубитных вентиляй. Для возбуждения ридберговских состояний будут использованы стабилизированные по частоте лазеры на длинах волн 795 нм и 474 нм. Работы по ридберговским вентилям потребуют создания специализированной вакуумной камеры, в которой помимо фокусирующих линз будет установлена система электродов для компенсации статических электрических полей, приводящих к значительным сдвигам энергетических уровней ридберговских состояний.

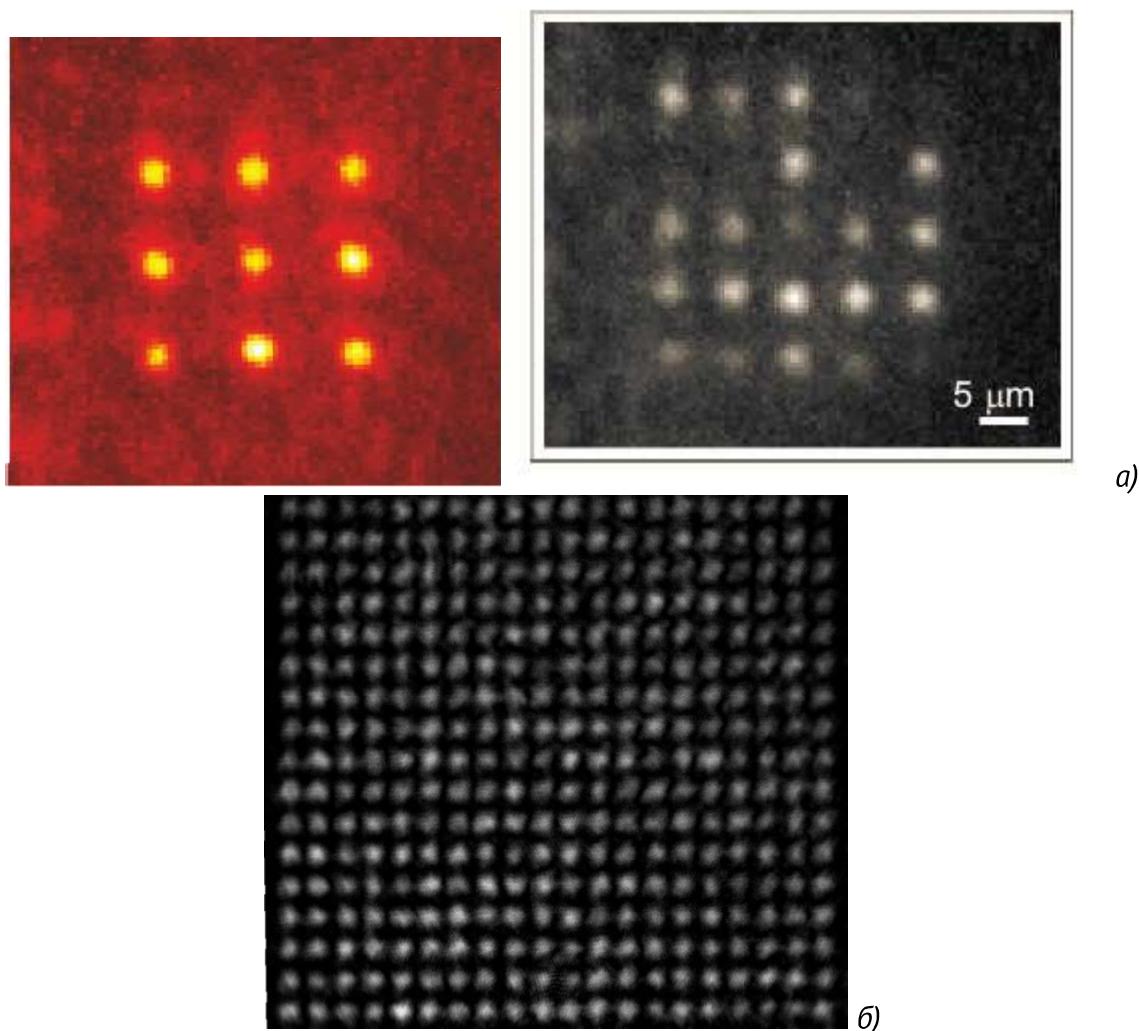


Рисунок 12 – а) Изображение массива 9 (слева) и 25 (справа) атомов рубидия, захваченных в оптическую ловушку; б) маска, формирующая массив из 400 атомов

Ключевым моментом является реализация транспорта атомов внутри регистра без нагрева (без изменения колебательного состояния). Транспорт атомов нужен как для реализации столкновительных вентиляй, так и просто для создания однородного массива, т. к. изначально вероятность заполнения каждого узла в условиях столкновительной блокады примерно равна 0,5, и хоть и может быть увеличена, никогда не достигнет 1. Такие перемещения могут быть организованы с помощью дополнительного пинцета, управляемого двухосевым акустооптическим де-

флектором или же путем модификации самих голограмм. На данный момент оптимальным представляется сборка однородного массива атомов с единичным заполнением путем модификации голограмм. В таком случае реализация вентиляй между соседними атомами потребует использования дополнительного адресующего пинцета.

Выводы

В статье рассмотрены основные направления исследований, проводимых в Центре квантовых технологий физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, относящиеся к квантовым вычислениям/моделированию и квантовым коммуникациям. Представлены полученные результаты, в частности:

- разработка и создание автоматизированных (без участия оператора) и регенеративных систем квантовой связи на основе волоконно-оптических линий связи и атмосферных каналов с наивысшей степенью защищенности;
- создание системы мультиплексирования для квантовых каналов связи;
- изучение физических процессов в сложных квантовых системах;
- разработка компонентной базы для квантовых компьютеров.

Список использованных источников

1. Feynman R. Simulating Physics with Computers // Int.J.Theor.Phys. 21, 467 (1982).
2. Lloyd S. Universal Quantum Simulators // Science, 273(5278), 1073 (1996).
3. Lanyon B.P., Whitfield J.D., Gillett G.G., Goggin M.E., Almeida M.P., Kassal I., Biamonte J.D., Mohseni M., Powell B.J., Barbieri M., Aspuru-Guzik A., White A.G. Towards quantum chemistry on a quantum computer // Nat. Chem. 2, 106 (2010).
4. Jiangfeng Du, Nanyang Xu, Xinhua Peng, Pengfei Wang, Sanfeng Wu, Dawei Lu. NMR Implementation of a Molecular Hydrogen Quantum Simulation with Adiabatic State Preparation // Phys. Rev. Lett. 104, 030502 (2010).
5. Bloch I., Dalibard J., Nascimbene S. Quantum simulations with ultracold quantum gases // Nature Phys. 8, 267–276 (2012).
6. Lanyon B.P., Hempel C., Nigg D., Müller M., Gerritsma R., Zähringer F., Schindler P., Barreiro J.T., Rambach M., Kirchmair G., Hennrich M., Zoller P., Blatt R., Roos C.F. Universal digital quantum simulation with trapped ions // Science, 334(6052), 57 (2011).
7. Kandala A., Mezzacapo A., Temme K., Takita M., Brink M., Chow J.M., Gambetta J.M. Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets // Nat. Lett. 549, 242 (2017).
8. DiVincenzo D.P. Quantum Computation // Science, 270(5234), 255 (1995).
9. DiVincenzo D.P., Bacon D., Kempe J., Burkard G., Whaley K.B. Universal quantum computation with the exchange interaction // Nature 408, 339 (2000).
10. Briegel H.J., Browne D.E., Dür W., Raussendorf R., Van den Nest M. Measurement-based quantum computation // Nat. Phys. 5, 19–26 (2009).
11. O'Brien J.L., Pryde G.J., White A.G., Ralph T.C., Branning D. Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate // Nature 426, 264 (2003).
12. Martin-Lopez E., Laing A., Lawson T., Alvarez R., Zhou Xiao-Qi, O'Brien J.L. Experimental realisation of Shor's quantum factoring algorithm using qubit recycling // Nat. Photon. 6, 773 (2012).
13. Harris N.C., Bunandar D., Pant M., Steinbrecher G.R., Mower J., Prabhu M., Baehr-Jones T., Hochberg M., Englund D. Large-scale quantum photonic circuits in silicon // Nanophotonics 5(3), 456 (2016).

14. Ballance C.J., Harty T.P., Linke N.M., Sepiol M.A., Lucas D.M. High-Fidelity Quantum Logic Gates Using Trapped-Ion Hyperfine Qubits // Phys. Rev. Lett. 117, 060504 (2016).
15. Debnath S., Linke N.M., Figgatt C., Landsman K.A., Wright K., Monroe C. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits // Nature 536, 63 (2016).
16. Hanneke D., Home J.P., Jost J.D., Amini J.M., Leibfried D., Wineland D.J. Realization of a programmable two-qubit quantum processor // Nat. Phys. 6, 13 (2010).
17. Mariantoni M., Wang H., Yamamoto T., Neeley M., Bialczak R.C., Chen Y., Lenander M., Lucero E., O'Connell A.D., Sank D., Weides M., Wenner J., Yin Y., Zhao J., Korotkov A.N., Cleland A.N., Martinis J.M. Implementing the quantum von Neumann architecture with superconducting circuits // Science 334(6052), 61 (2011).
18. Xing Rong, Jianpei Geng, Fazhan Shi, Ying Liu, Kebiao Xu, Wenchao Ma, Fei Kong, Zhen Jiang, Yang Wu, Jiangfeng Du. Experimental fault-tolerant universal quantum gates with solid-state spins under ambient conditions // Nature Commun. 6, 8748 (2015).
19. Молотков С.Н. Релятивистская квантовая криптография на «остановленных» фотонах // Письма в ЖЭТФ, т. 76, выпуск 1, 79 (2002).
20. Молотков С.Н. Релятивистская квантовая криптография для открытого пространства без синхронизации часов на приемной и передающей стороне // Письма в ЖЭТФ, т. 94, выпуск 6, 504 (2011).
21. Молотков С.Н. О стойкости релятивистской квантовой криптографии в открытом пространстве при конечных ресурсах // Письма в ЖЭТФ, т. 96, выпуск 5, 374 (2012).
22. Radchenko I.V., Kravtsov K.S., Molotkov S.N., Kulik S. Relativistic quantum cryptography. Relativistic quantum cryptography // Laser Phys. Lett., 11, 065203 (2014).
23. Kravtsov K., Radchenko I., Kulik S., Molotkov S. Relativistic quantum key distribution system with one-way quantum communication // Scientific Reports volume 8, 6102 (2018).
24. Řeháček J., Hradil Z., Knill E., Lvovsky A.I. Diluted maximum-likelihood algorithm for quantum tomography // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 75 – P. 042108.
25. Shang J., Zhang Z., Hui Khoon Ng. Superfast maximum-likelihood reconstruction for quantum tomography // Phys. Rev. A. – 2017. – Vol. 95 – P. 062336.
26. Struchalin G.I., Pogorelov I.A., Straupe S.S. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states // Phys. Rev. A. – 2016. – Vol. 93, no. 1. – P. 012103.
27. Gill R.D., Massar S. State estimation for large ensembles // Phys. Rev. A. – 2000. – Vol. 61. – P. 042312.
28. Mahler D.H., Rozema L.A., Darabi A. Adaptive Quantum State Tomography Improves Accuracy Quadratically // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 18. – P. 183601
29. Богданов Ю.И. Унифицированный метод статистического восстановления квантовых состояний, основанный на процедуре очищения // ЖЭТФ. – 2009. – Т. 135. – С. 1068.
30. Kovlakov E.V., Bobrov I.B., Straupe S.S., Kulik S.P. Spatial Bell-State Generation without Transverse Mode Subspace Postselection // Phys. Rev. Lett. – 2017. – Jan. – Vol. 118. – P. 030503.
31. Bolduc E., Bent N., Santamato E. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram // Opt. Lett. – 2013. – Sep. – Vol. 38, no. 18. – P. 3546-3549.
32. Walborn S.P., Pimentel A.H. Generalized Hermite-Gauss decomposition of the two-photon state produced by spontaneous parametric down conversion // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2012. – Vol. 45, no. 16. – P. 165502.
33. Barredo D., de Léséleuc S., Lienhard V., Lahayet T., Browaeys A. An atom-by-atom assembler of defect-free arbitrary two-dimensional atomic arrays // Science 354(6315), 1021 (2016).

34. Endres M., Bernien H., Keesling A., Levine H., Anschuetz E.R., Krajenbrink A., Senko C., Vuletic V., Greiner M., Lukin M.D. Atom-by-atom assembly of defect-free one-dimensional cold atom arrays // *Science* 354(6315), 1024 (2016).
35. Saffman M.J. Quantum computing with atomic qubits and Rydberg interactions: progress and challenges // *Phys. B* 49, 202001 (2016).
36. Labuhn H., Barredo D., Ravets S., de Léséleuc S., Macrì T., Lahaye T., Browaeys A. Tunable two-dimensional arrays of single Rydberg atoms for realizing quantum Ising models // *Nature* 534, 667 (2016).
37. Bernien H., Schwartz S., Keesling A., Levine H., Omran A., Pichler H., Soonwon Choi, Zibrov A.S., Endres M., Greiner M., Vuletić V., Lukin M.D. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator // *Nature* 551, 579-584 (2017).
38. Fushman I., Englund D., Faraon A., Stoltz N., Petroff P., Vučković J. Controlled Phase Shifts with a Single Quantum Dot // *Science* 320(5877), 769 (2008).
39. Peyronel T., Firstenberg O., Qi-Yu Liang, Hofferberth S., Gorshkov A.V., Pohl T., Lukin M.D., Vuletić V. Quantum nonlinear optics with single photons enabled by strongly interacting atoms // *Nature* 488, 57 (2012).
40. Gullans M., Chang D.E., Koppens F.H.L., García de Abajo F.J., Lukin M.D. Single-Photon Non-linear Optics with Graphene Plasmons // *Phys. Rev. Lett.* 111, 247401 (2013).
41. Gimeno-Segovia M., Shadbolt P., Browne D.E., Rudolph T. From Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger States to Ballistic Universal Quantum Computation // *Phys Rev. Lett.* 115, 020502 (2014).
42. Li Y., Humphreys P.C., Mendoza G.J., Benjamin S.C. Resource Costs for Fault-Tolerant Linear Optical Quantum Computing // *Phys. Rev. X* 5, 041007 (2015).
43. Abrams D.S., Lloyd S. Quantum Algorithm Providing Exponential Speed Increase for Finding Eigenvalues and Eigenvectors // *Phys. Rev. Lett.* 83, 5162 (1999).
44. Peruzzo A., McClean J., Shadbolt P., Man-Hong Yung, Xiao-Qi Zhou, Love P.J., Aspuru-Guzik A., O'Brien J.L. A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor // *Nat. Comm.* 5, 4213 (2014).
45. Xiao-song Ma, Dakić B., Naylor W., Zeilinger A., Walther P. Quantum simulation of the wavefunction to probe frustrated Heisenberg spin systems // *Nature Physics.* 7, 399 (2011).
46. Xiao-song Ma, Dakić B., Kropatschek S., Naylor W., Yang-hao Chan, Zhe-xuan Gong, Lu-ming Duan, Zeilinger A., Walther P. Towards photonic quantum simulation of ground states of frustrated Heisenberg spin systems // *Nat. Photon.* 7, 399 (2011).
47. Barz S., Dakić B., Lipp Y.O., Verstraete F., Whitfield J.D., Walther P. Linear-Optical Generation of Eigenstates of the Two-Site XY Model // *Physical Review X*, 5, ARTN 021010 (2015).
48. Marandi A., Zhe Wang, Takata K., Byer R.L., Yamamoto Y. Network of time-multiplexed optical parametric oscillators as a coherent Ising machine // *Nat. Photon.* 8, 937-942 (2014).
49. Aaronson S., Arkhipov A. The Computational Complexity of Linear Optics // *arXiv:1011.3245v1* (2010).
50. Tillmann M., Dakić B., Heilmann R., Nolte S., Szameit A., Walther P. Experimental Boson Sampling // *Nat. Photon.* 7, 540 (2013).
51. Crespi A., Osellame R., Ramponi R., Brod D.J., Galvão E.F., Spagnolo N., Vitelli C., Maiorino E., Mataloni P., Sciarrino F. Integrated multimode interferometers with arbitrary designs for photonic boson sampling // *Nat. Photon.* 7, 545 (2013).

52. Spring J.B., Metcalf B.J., Humphreys P.C., Kolthammer W.S., Jin X.M., Barbieri M., Datta A., Thomas-Peter N., Langford N.K., Kundys D., Gates J.C., Smith B.J., Smith P.G., Walmsley I.A. Boson sampling on a photonic chip // *Science* 339(6121), 798 (2013).
53. Broome M.A., Fedrizzi A., Rahimi-Keshari S., Dove J., Aaronson S., Ralph T.C., White A.G., Photonic boson sampling in a tunable circuit // *Science* 339(6121), 794 (2013).
54. Spagnolo N., Vitelli C., Bentivegna M., Brod D.J., Crespi A., Flamini F., Giacomini S., Milani G., Ramponi R., Mataloni P., Osellame R., Galvao E.F., Sciarrino F. Efficient experimental validation of photonic boson sampling against the uniform distribution // *Nat. Photon.* 8, 615 (2014).
55. Dyakonov I.V., Saygin M.Yu., Kondratyev I.V., Kalinkin A.A., Straupe S.S., Kulik S.P. Laser-written polarizing directional coupler with reduced interaction length // *Optics Letters*, Vol 42, № 20, 4231-4234 (2017).
56. Minnegaliev M.M., Dyakonov I.V., Gerasimov K.I., Kalinkin A.A., Kulik S.P., Moiseev S.A., Saygin M.Yu., Urmacheev R.V. Observation and investigation of narrow optical transitions of $^{167}\text{Er}^{3+}$ ions in femtosecond laser printed waveguides in 7LiYF_4 crystal // *Laser Physics Letters*, 15, 045207 (6pp) (2018).
57. Skryabin N., Kalinkin A., Dyakonov I., Kulik S. Femtosecond laser written depressed-cladding waveguide 1×2 , 2×2 and 3×3 directional couplers in $\text{Tm}^{3+}\text{:YAG}$ crystal // *Micromachines D: Materials and Processing*. 11, 1, 1-12, (2020).