УДК 519.87

А.И. Буравлев, доктор технических наук, профессор

О ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

В статье проводится анализ методических подходов к решению многокритериальных задач, использующих различные свертки частных критериев и специальные процедуры построения парето-оптимальных решений. Необходимость решения многокритериальных задач во многом зависит от искусства выбора целевой функции (критерия), отражающей цель решения задачи и связанных с ней фазовых переменных, влияющих на достижение данной цели. Именно включение фазовых переменных в число критериев и приводит к возникновению многокритериальных задач. Такой пример рассмотрен в данной статье, где показано, что адекватный и корректный выбор целевого критерия и соответствующих фазовых переменных исключает необходимость решения многокритериальной задачи.

Ключевые слова: целевая функция (критерий), фазовые переменные, многокритериальная задача, парето-оптимальное решение, мощность критерия.

В задачах принятия решений часто возникает ситуация, когда лицо, принимающее решение (ЛПР), вынуждено оперировать не одним, а несколькими критериями. При этом под критерием понимается правило (процедура, алгоритм) выбора некоторой альтернативы из множества возможных альтернатив [1; 2]. Данное правило формируется с использованием одной или нескольких целевых функций, которые отражают цель данного выбора. Целевые функции представляют собой, как правило, числовые функции, заданные на множестве признаков или параметров, отражающих определенные свойства и ценностные характеристики исходного множества альтернатив. При этом как параметры, так и целевые функции могут быть определены в разных шкалах измерения (номинальных, порядковых, метрических). В результате чего перед ЛПР возникает трудная задача сравнения альтернатив и выбора наиболее предпочтительной из них по нескольким критериям. В современной теории принятия решений разработаны эффективные методы решения подобных задач [3-6]. Вместе с тем, часто формальное применение этих методов приводит к неудовлетворительным решениям, несмотря на использование сложных процедур многокритериального выбора. Анализ такой задачи проводится в данной статье.

Прежде чем перейти к ее анализу, обратимся к точке зрения известного ученого и специалиста в области исследования операций Ю.Б. Гермейера относительно общих принципов формирования критериев в операциях. В своей книге [1] под операцией он понимает «совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели. …Пока не задана цель, не существует и операции. …Ход операции должен описываться некоторым количеством фазовых координат. Для достижения цели оперирующая сторона имеет в своем распоряжении некоторый запас активных средств (ресурсов), используя которые она может добиваться цели. Степень соответствия хода операции поставленной цели характеризуется значением функционала, именуемого критерием эффективности. Критерий эффективности, как и цель в операции, единственен…Незнание или недостаточно точное знание критерия эффективности есть прямое следствие недостаточно четкого понимания цели операции или недостаточной изученности ее протекания. Это незнание может лишить какого-то ни было смысла исследования операции и само ее проведение».

Из этих положений следует, что любое целенаправленное действие или операция характеризуется тремя ключевыми признаками: совокупностью фазовых координат или параметров, характеризующих состояние и ход операции; совокупностью активных средств (ресурсов), необходимых для осуществления операции; целевой функцией (критерия эффективности), связанной с параметрами операции и характеризующей степень соответствия поставленной цели. В ходе операции ЛПР осуществляет выбор тех или иных активных средств из множества ему доступных для достижения поставленной цели, т.е. осуществляет управление операцией.

Во многих последующих работах по исследованию операций и теории принятия решений приводятся задачи, в которых возможны несколько целей операции и, соответственно, критериев эффективности. Несмотря на то, что Ю.Б. Гермейер относит такие операции к не полностью определенным, тем не менее, их рассмотрение с позиции теории и практики актуально. В настоящее время существует два похода к решению многокритериальных задач. Первый из них использует различные свертки частных критериев (целевых функций) в некоторый обобщенный для рассматриваемой операции критерий [1; 2]. Второй подход использует построение в пространстве частных критериев подмножества парето-оптимальных или несравнимых между собой альтернатив с последующим заданием на нем некоторого нового критерия, в том числе и использованием свертки [3-7].

В цитируемой работе Ю.Б. Гермейера [1] приводится доказанная им теорема о полноте свертки системы частных критериев в обобщенный критерий путем их логического объединения, суммирования с весовыми коэффициентами и разбиения на достижимые и не достижимые критерии в данной операции. Такое представление может быть выполнено для равномерно непрерывных целевых функций, заданных на ограниченном параллелепипеде с любой заданной точностью. Как отмечает Ю.Б. Гермейер, многокритериальная задача часто возникает, когда исследователь в качестве целевых показателей операции включает фазовые координаты, а также активные средства (например, материальные ресурсы, время операции), что, конечно же, является некорректным. Ниже рассматривается пример многокритериальной задачи, в которой фазовые координаты процесса приняты в качестве целевой функции и критерия выбора [8].

Эта задача имеет следующую постановку. Известна успеваемость группы студентов из семи человек по четырем предметам. Эти данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Оценки студентов

Учебные предметы / Студенты	А	Б	В	Г	Сумма баллов
S_1	3	5	5	4	17
S_2	4	4	4	5	17
S_3	5	4	3	5	17
S_4	3	5	3	5	16
S_5	4	2	4	5	15
S_6	3	5	3	5	16
S_7	5	3	4	3	15

Требуется определить лучшего студента по успеваемости.

В работе [8] предлагается рассматривать оценки по предметам в качестве критериев, хотя они, по сути, являются фазовыми координатами процесса обучения студентов. Выбор лучшего студента предлагается осуществлять в результате попарного сравнения векторов оценок на основе следующего предпочтения (критерия сравнения): *если один из студентов имеет по каждому предмету удовлетворительные оценки не ниже, чем другой, и при этом хотя бы по одному предмету у него оценка выше, чем у другого, то следует считать, что его успеваемость выше*.

Математически этот критерий выбора можно записать следующим образом.

Пусть $X_i = \left\{x_i^{\text{А}},\ x_i^{\text{Б}},\ x_i^{\text{В}},\ x_i^{\text{Г}}\right\}$ – набор оценок студента S_i по предметам А, Б, В, Г. Тогда сформулированный выше критерий предпочтения имеет следующий вид:

$$\forall(x_i^{\text{А,Б,В,Г}} \geq x_j^{\text{А,Б,В,Г}})\&\exists(x_i^{\text{А,Б,В,.Г}} > x_j^{\text{А,Б,В,Г}}) \Rightarrow S_i \succ S_j. \quad (1)$$

Данное предпочтение является нестрогим и задает на множестве студентов частичный порядок [3]. В результате чего появляется некоторое подмножество студентов *несравнимых* между собой по векторным оценкам при данном предпочтении. Все студенты данного подмножества могут рассматриваться в качестве «доминирующих» по сравнению с остальными студентами.

В соответствии с таблицей 1 студент S_5 по рассматриваемому критерию выбора является худшим по успеваемости, так как по одному из предметов он имеет неудовлетворительную оценку. Студенты S_4, S_6 одинаковы по успеваемости и лучше студента S_5. Студенты S_1, S_2, S_3, S_7 образуют группу не сравнимых между собой и со студентами S_4, S_6 по успеваемости. Все они являются претендентами на «доминирующих» по отношению к студенту S_5.

С помощью предлагаемого критерия исходное множество студентов удается разбить только на два упорядоченных класса

$$\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_6, S_7\} \succ S_5,$$

причем первый класс является достаточно объемным, что не позволяет реально определить лучшего студента. Это связано, прежде всего, с неудачным выбором критерия. Оценки успеваемости студентов по предметам являются текущими показателями их успеваемости, но не критериями выбора лучшего студента по успеваемости в целом. Ведь при выборе лучшего по успеваемости студента нужно учитывать не только собственно оценки, но и наличие среди них двоек и троек, отражающих как общий уровень знаний студента, так и его прилежание.

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи. Будем рассматривать оценки, полученные студентами по предметам, в качестве фазовых координат процесса обучения. Зададим на множестве оценок успеваемости $X = \{2, 3, 4, 5\}$, представленных в порядковой шкале, целевую функцию $y = f(x)$ в виде суммы баллов студента, полученных по четырем предметам

$$y = f(x) = x^{\text{А}} + x^{\text{Б}} + x^{\text{В}} + x^{\text{Г}}. \qquad (2)$$

Поскольку эта целевая функция является линейной, а значит монотонной, то она является допустимым преобразованием порядковой шкалы оценок.

Лучшим будем считать студента, имеющего *максимальную* сумму баллов. Определение лучшего студента будем производить путем попарного сравнения значений целевой функции. Таким образом, в качестве *критерия* выбора лучшего студента имеем следующее правило:

$$\forall i \neq j, \;\; y_i > y_j \succ S_i \succ S_j; i, j = \overline{1{,}7}. \qquad (3)$$

Сумма баллов студентов приведена в последнем столбце таблицы 1.

По сумме баллов видно, что студенты S_1, S_2, S_3 имеют наивысшую сумму баллов и должны быть признаны лучшими; студенты S_4, S_6 имеют меньшую сумму баллов и уступают по успеваемости студентам S_1, S_2, S_3; студенты S_5, S_7 являются худшими по успеваемости. Таким образом, второй критерий позволяет исходное множество студентов упорядочить не на два, а на три класса, что говорит о его большей «дифференцирующей» способности.

Для оценки дифференцирующей способности или мощности критерия предлагается следующий подход. Любой критерий сравнения позволяет упорядочить исходное множество объектов частично или полностью. Если в исходной выборке имеется n объектов (альтернатив), то максимально возможное число способов их полного упорядочивания составляет $N_y = n!$. При упорядочивании множества предметов снимается неопределенность в отношениях между ними. Эту неопределенность можно оценить величиной энтропии Хартли $H = \lg N$[1].

После полного упорядочивания исходного множества объектов остается только один вариант $N^* = 1$ и энтропия упорядоченного множества будет равна нулю ($H^* = 0$). При частичном упорядочивании возникает некоторое число подмножеств, в которых объекты остаются неупорядоченными в силу их несравнимости между собой. Пусть число таких подмножеств составляет $L > 1$ и в каждом подмножестве имеется m_k, ($k = \overline{1, L}$) неупорядоченных объектов, при этом $\sum_{k=1}^{L} m_k = n$. Число способов, которыми можно частично упорядочить исходное множество, составит $N_y = m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k! < n!$. Рассмотрим показатель d, равный отношению количества информации, полученной при упорядочивании объектов, к величине начальной энтропии

$$d = \frac{H - H^*}{H} = 1 - \frac{H^*}{H}. \tag{4}$$

Для неупорядоченного множества объектов $d = 0$, при полном упорядочивании множества объектов $d = 1$, а при частичном упорядочивании $0 < d < 1$.

Используем данный показатель для оценки мощности рассмотренных выше критериев. Энтропия неупорядоченного множества студентов составляет $H_S = \lg 7!$. По первому критерию мы получаем частичное упорядочивание с энтропией $H_S^* = \lg(1! \times 6!) = lg6!$. Мощность этого критерия равна $d = 1 - \frac{\lg 6!}{\lg 7!} = 0{,}23$. Для второго критерия $H_S^* = \lg(3! \times 2! \times 2!)$ и мощ-

[1] Здесь для оценки энтропии используется логарифм с основанием 10 для упрощения расчетов в примере. Могут быть использованы и другие основания, например, 2, e.

ность критерия составляет $d = 1 - \frac{\lg(3!\times 2!\times 2!)}{\lg 7!} = 0{,}63$. Отсюда видно, что критерий выбора по максимуму числа полученных баллов является действительно более мощным.

Для усиления мощности модернизируем второй критерий, добавив к нему условие, что лучший студент не может иметь двоек или троек. Математически данный критерий имеет следующую запись

$$\forall \quad (y_i > y_j)\&(x_i^{\text{А,Б,В,Г}} \neq 2\&x_i^{\text{А,Б,В,Г}} \neq 3) \succ S_i \succ S_j. \qquad (5)$$

По этому критерию первая группа студентов S_1, S_2, S_3 разбивается на две подгруппы: студент S_2, не имеющий троек, и студенты S_1, S_3, имеющие одинаковый балл, но получившие тройки по одному предмету. Вторая группа студентов остается неизменной, а в третьей группе выделяется в худшую сторону студент S_5, получивший двойку по одному из предметов. В результате третий критерий позволяет выделить пять классов студентов, отличающихся друг от друга успеваемостью. Мощность этого критерия составляет

$$d = 1 - \frac{\lg(1!\times 2!\times 2!\times 1!\times 1!!)}{\lg 7!} = 0{,}84.$$

Приведенный пример свидетельствует о том насколько важно корректно определить параметры, целевую функцию и критерий выбора на множестве альтернатив в задаче принятия решений.

В заключение отметим, что в работе [8] за счет введения показателей важности учебных предметов и значений полученных по ним оценок достигнута частичная упорядоченность студентов, аналогично полученной нами по третьему критерию. Однако процедура такого упорядочивания значительно более трудоемкая, чем рассмотренная выше даже для такого простого примера.

Рассмотренный подход может быть без труда распространен на задачи программно-целевого планирования производства и закупки, например, продукции военного назначения (ПВН) для оснащения вооруженных сил с оптимизацией номенклатуры ПВН по критерию «эффект-затраты».

Список использованных источников

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. Вилкас Э.Й., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981.
4. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений: уч. пособие. М.: Наука, 1982.
5. Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Машиностроение, 1978.
6. Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. М.: Наука, 1989.
7. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
8. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.