

УДК 519.8

В.Ю. ЧУЕВ, кандидат
технических наук, доцент
И.В. ДУБОГРАЙ
Е.Б. МАРКЕЛОВ, кандидат
технических наук

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ТАКТИКИ ОТРАЖЕНИЯ АТАКИ РАЗНОТИПНЫХ БОЕВЫХ ЕДИНИЦ

В статье на основе теории непрерывных марковских процессов описана модель отражения боевой единицей атаки двух разнотипных боевых единиц противника при вступлении в бой одной из них с запаздыванием. Получены расчётные формулы для вычисления текущих и окончательных состояний при различной тактике ведения боя обороняющейся единицей. Разработанная модель двухстороннего боя может быть использована для оценки боевой эффективности многоцелевых комплексов вооружения.

Ключевые слова: непрерывный марковский процесс; боевая единица; эффективная скорострельность; тактика ведения боя.

При создании новых образцов технических систем возникает, как правило, необходимость разработки математической модели их функционирования с целью оценки работоспособности [1]. Основой оценки проектируемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, так как они в конечном итоге определяют степень приспособленности данного образца к решению конкретных боевых задач [2; 3]. В качестве основы такой оценки необходимо использование моделей двухсторонних боевых действий, так как они позволяют более достоверно учесть большее количество факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учёта ответного огня [4; 5]. А поскольку бой является стохастическим процессом, в качестве такой оценки предпочтительно использование вероятностных моделей боевых действий, так как они позволяют описать процесс протекания боя со значительно большей степенью точности и полноты, чем детерминированные модели (модели динамики средних) [6].

Возможным способом построения вероятностных моделей двухсторонних боевых действий является применение теории непрерывных марковских процессов [7; 8]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если в каждый момент времени вероятности всех состояний системы в будущем зависят только от их состояний в настоящий момент времени и не зависят от того, каким образом система пришла в эти состояния [9].

Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [2]. Используется также приём, заключающийся в переходе от потока выстрелов к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовём успешным, если он поражает боевую единицу противника [3].

Описание процесса боевых действий. Основные математические зависимости и формулы. Рассмотрим следующую ситуацию. Боевая единица X отражает атаку двух разнотипных единиц стороны Y , причём первая единица менее уязвима и более опасна (в дальнейшем будем называть её первой единицей Y). Ранее [10] был рассмотрен бой, когда все три единицы открывают огонь по противнику одновременно. Рассмотрим теперь ситуацию, когда одна из боевых единиц Y начинает боевые действия одновременно с единицей X , а другая открывает огонь через время t_c после начала боя. Возникает вопрос, какую из единиц Y единица X должна поражать в первую очередь.

Введём следующие обозначения:

p_{x1}, p_{x2} – вероятности поражения первой и второй единиц Y одним выстрелом единицы X ;

p_{y1}, p_{y2} – вероятности поражения единицы X одним выстрелом первой и второй единиц Y соответственно;

$\lambda_{x1}, \lambda_{x2}$ – практические скорострельности единицы X при стрельбе по первой и второй единицам Y ;

$\lambda_{y1}, \lambda_{y2}$ – практические скорострельности первой и второй единиц Y ;

величины $v_1 = p_{x1}\lambda_{x1}$, $v_2 = p_{x2}\lambda_{x2}$, $u_1 = p_{y1}\lambda_{y1}$ и $u_2 = p_{y2}\lambda_{y2}$ назовём эффективными скорострельностями боевых единиц сторон, полагая их в течение боя постоянными.

При этом $v_1 < v_2$, $u_1 > u_2$.

Протекание боя будет характеризоваться системой (i, j, k) , где i характеризует состояние единицы X ; j, k характеризуют состояния первой и второй единиц Y соответственно. Значения i, j, k , равные 1, соответствуют тому, что данная единица продолжает бой, а значения i, j, k , равные 0 – тому, что данная боевая единица уничтожена (поражена). Состояние $(0, 0, 0)$ не является состоянием системы, так как вероятность одновременного поражения двух и более единиц является бесконечно малой величиной.

Если первая единица Y открывает огонь по противнику одновременно с единицей X и при этом единица X в первую очередь ведёт огонь по ней, то до вступления в бой второй единицы Y ($t \in [0; t_c]$) этот бой опишется системой следующих уравнений:

$$\begin{aligned} F'_{100}(t) &= v_2 F_{101}(t), \\ F'_{101}(t) &= -F_{101}(t) + v_1 F_{111}(t), \\ F'_{011}(t) &= u_1 F_{111}(t), \\ F'_{111}(t) &= -(v_1 + u_1) F_{111}(t), \\ F'_{001}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$F_{111}(0) = 1; F_{ijk}(0) = 0 \text{ при } i + j + k < 3, \quad (2)$$

где $F_{ijk}(t)$ – вероятности того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j, k) ;

$F'_{ijk}(t)$ – их производные по времени.

В момент времени t_c открытия огня второй единицей стороны Y получаем:

$$\begin{aligned} F_{100}(t_c) &= \frac{v_1}{v_1 + u_1} - \frac{v_1}{v_1 - v_2 + u_1} \cdot e^{-v_2 t_c} + \frac{v_1 v_2}{(v_1 + u_1)(v_1 - v_2 + u_1)} \cdot e^{-(v_1 + u_1)t_c} = c_0, \\ F_{101}(t_c) &= \frac{v_1}{v_1 - v_2 + u_1} \cdot (e^{-v_2 t_c} - e^{-(v_1 + u_1)t_c}) = c_1, \\ F_{011}(t_c) &= \frac{u_1}{v_1 + u_1} \cdot (1 - e^{-(v_1 + u_1)t_c}), \\ F_{111}(t_c) &= e^{-(v_1 + u_1)t_c} = c_2, \\ F_{001}(t_c) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений:

$$\begin{aligned} F'_{100}(t) &= v_2 F_{101}(t), \\ F'_{001}(t) &= u_2 F_{101}(t), \\ F'_{011}(t) &= -(u_1 + u_2) F_{111}(t), \\ F'_{101}(t) &= -(v_2 + u_2) F_{101}(t) + v_1 F_{111}(t), \\ F'_{111}(t) &= -(v_1 + u_1 + u_2) F_{111}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями (3).

Вероятности окончательных состояний системы (то есть к концу боя) $F_{ijk}(\infty)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{100}(\infty) &= \frac{v_1}{v_1 + u_1} - \frac{v_1 \cdot u_2}{(v_1 - v_2 + u_1) \cdot (v_2 + u_2)} \cdot e^{-v_2 t_c} + \frac{v_1 v_2 u_2}{(v_1 + u_1)(v_1 - v_2 + u_1)(v_1 + u_1 + u_2)} \cdot e^{-(v_1 + u_1) t_c}, \\ F_{001}(\infty) &= \frac{v_1 \cdot u_2}{(v_1 - v_2 + u_1) \cdot (v_2 + u_2)} \cdot e^{-v_2 t_c} - \frac{v_1 u_2}{(v_1 - v_2 + u_1)(v_1 + u_1 + u_2)} \cdot e^{-(v_1 + u_1) t_c}, \\ F_{011}(\infty) &= \frac{u_1}{v_1 + u_1} + \frac{v_1 u_2}{(v_1 + u_1)(v_1 + u_1 + u_2)} \cdot e^{-(v_1 + u_1) t_c}, \\ F_{101}(\infty) &= F_{111}(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что в данном случае состояния $(1, 1, 0)$ и $(0, 1, 0)$ не являются состояниями рассматриваемой системы, так как единица X начинает вести огонь по второй единице Y после уничтожения первой.

Если в данной ситуации (вторая единица стороны Y вступает в бой позже) единица X в первую очередь ведёт огонь по второй единице стороны Y , то до её вступления в бой ($t \in [0; t_c]$) процесс боевых действий описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} G'_{100}(t) &= v_1 G_{110}(t), \\ G'_{010}(t) &= u_1 G_{110}(t), \\ G'_{011}(t) &= u_1 G_{111}(t), \\ G'_{110}(t) &= -(v_1 + u_1) G_{110}(t) + v_2 G_{111}(t), \\ G'_{111}(t) &= -(v_2 + u_1) G_{111}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

с начальными условиями:

$$G_{111}(0) = 1; G_{ijk}(0) = 0 \text{ при } i + j + k < 3, \quad (7)$$

где $G_{ijk}(t)$ – вероятности того, что в момент времени t система находится в состоянии (i, j, k) ,

$G'_{ijk}(t)$ – их производные по времени.

В момент времени t_c открытия огня второй единицей Y получаем:

$$\begin{aligned}
 G_{100}(t_c) &= \frac{v_1 v_2}{(v_1 + u_1)(v_2 + u_1)} - \frac{v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_1 + u_1)} \cdot e^{-(v_1 + u_1)t_c} + \frac{v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + u_1)} \cdot e^{-(v_2 + u_1)t_c} = d_0, \\
 G_{010}(t_c) &= \frac{u_1}{v_1} F_{100}(t_c), \\
 G_{011}(t_c) &= \frac{u_1}{v_2 + u_1} \cdot (1 - e^{-(v_2 + u_1)t_c}), \\
 G_{110}(t_c) &= \frac{v_2}{v_2 - v_1} \cdot (e^{-(v_1 + u_1)t_c} - e^{-(v_2 + u_1)t_c}), \\
 G_{111}(t_c) &= e^{-(v_2 + u_1)t_c}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 G'_{010}(t) &= u_1 G_{110}(t), \\
 G'_{100}(t) &= v_1 G_{110}(t), \\
 G'_{011}(t) &= (u_1 + u_2) G_{111}(t), \\
 G'_{110}(t) &= -(v_1 + u_1) G_{110}(t) + v_2 G_{111}(t), \\
 G'_{111}(t) &= -(v_2 + u_1 + u_2) G_{111}(t)
 \end{aligned} \tag{9}$$

с начальными условиями (6).

Вероятности окончательных состояний (то есть к концу боя) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G_{100}(\infty) &= \frac{v_1 v_2}{(v_1 + u_1)(v_2 + u_1)} - \frac{v_1 v_2 u_2}{(v_1 + u_1)(v_2 + u_1)(v_2 + u_1 + u_2)} \cdot e^{-(v_2 + u_1)t_c}, \\
 G_{010}(\infty) &= \frac{u_1}{v_1} G_{100}(\infty), \\
 G_{011}(\infty) &= \frac{u_1}{v_2 + u_1} + \frac{v_2 u_2}{(v_2 + u_1)(v_2 + u_1 + u_2)} \cdot e^{-(v_2 + u_1)t_c}, \\
 G_{110}(\infty) &= G_{111}(\infty) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В данном случае не являются состояниями системы состояния (1,0,1) и (0,0,1).

В качестве оптимальной тактики ведения боя единицей X примем максимум вероятности её победы, которая равна $P_{ox} = F_{100}(\infty)$ или $P_{ox} = G_{100}(\infty)$.

Как показали результаты расчётов, единице X выгодно в первую очередь вести обстрел второй единицы Y , если она намного уязвимей первой единицы ($v_2 > 100v_1$) и при этом $u_2 > 0,5u_1$, что в реальных боевых условиях практически не бывает. Поэтому основной интерес представляет случай, когда первая единица Y начинает боевые действия спустя время t_c после начала боя.

Если при этом единица X начинает боевые действия с ведения огня по первой единице Y , то до вступления в бой её второй единицы ($t \in [0; t_c]$) протекание боя опишется системой уравнений:

$$\begin{aligned} F'_{100}(t) &= v_2 F_{101}(t), \\ F'_{001}(t) &= u_2 F_{101}(t), \\ F'_{011}(t) &= u_2 F_{111}(t), \\ F'_{101}(t) &= -(v_2 + u_2) F_{101}(t) + v_1 F_{111}(t), \\ F'_{111}(t) &= -(v_1 + u_2) F_{111}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c получаем:

$$\begin{aligned} F_{100}(t_c) &= \frac{v_1 v_2}{(v_1 + u_2)(v_2 + u_2)} + \frac{v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_2 + u_2)} e^{-(v_2 + u_2)t_c} - \frac{v_1 v_2}{(v_2 - v_1)(v_1 + u_2)} e^{-(v_1 + u_2)t_c}, \\ F_{001}(t_c) &= \frac{u_2}{v_2} F_{100}(t_c), \\ F_{011}(t_c) &= \frac{u_2}{v_1 + u_2} (1 - e^{-(v_1 + u_2)t_c}), \\ F_{101}(t_c) &= \frac{v_1}{v_2 - v_1} (e^{-(v_1 + u_2)t_c} - e^{-(v_2 + u_2)t_c}), \\ F_{111}(t_c) &= e^{-(v_1 + u_2)t_c}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений (4) с начальными условиями (12).

Вероятности окончательных состояний $F_{ijk}(\infty)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{100}(\infty) &= \frac{v_1 v_2}{(v_1 + u_2)(v_2 + u_2)} - \frac{v_1 v_2 u_1}{(v_1 + u_2)(v_2 + u_2)(v_1 + u_1 + u_2)} e^{-(v_1 + u_2)t_c}, \\ F_{001}(\infty) &= \frac{u_2}{v_2} F_{100}(\infty), \\ F_{011}(\infty) &= \frac{u_2}{v_1 + u_2} + \frac{v_1 u_1}{(v_1 + u_1 + u_2)} e^{-(v_1 + u_2)t_c}. \end{aligned} \quad (13)$$

Состояния (1,1,0) и (0,1,0) в данном случае состояниями системы не являются.

Если же вторая единица Y приступает к боевым действиям одновременно с единицей X , а первая единица Y открывает огонь по противнику спустя время t_c после начала боя, при этом единица X в первую очередь ведёт огонь по второй единице Y , то до вступления в бой первой единицы Y ($t \in [0; t_c]$) он опишется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 G'_{100}(t) &= v_1 G_{110}(t), \\
 G'_{011}(t) &= u_2 G_{111}(t), \\
 G'_{110}(t) &= -v_1 G_{110}(t) + v_2 G_{111}(t), \\
 G'_{111}(t) &= -(v_2 + u_2) G_{111}(t), \\
 G'_{010}(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

с начальными условиями (7).

В момент времени t_c вступления в бой первой единицы Y получаем:

$$\begin{aligned}
 G_{100}(t_c) &= \frac{v_2}{v_2+u_2} - \frac{v_2}{v_2-v_1+u_2} e^{-v_1 t_c} + \frac{v_1 v_2}{(v_2-v_1+u_2)(v_2+u_2)} e^{-(v_2+u_2)t_c}, \\
 G_{010}(t_c) &= 0, \\
 G_{011}(t_c) &= \frac{v_2}{v_2+u_2} (1 - e^{-(v_2+u_2)t_c}), \\
 G_{110}(t_c) &= \frac{v_2}{v_2-v_1+u_2} (e^{-v_1 t_c} - e^{-(v_2+u_2)t_c}), \\
 G_{111}(t_c) &= e^{-(v_2+u_2)t_c}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений (9) с начальными условиями (15).

Вероятности окончательных состояний вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_{100}(\infty) &= \frac{v_2}{v_2+u_2} - \frac{v_2 u_1}{(v_2-v_1+u_2)(v_1+u_1)} e^{-v_1 t_c} + \frac{v_1 v_2 u_1}{(v_2-v_1+u_2)(v_2+u_2)(v_2+u_1+u_2)} e^{-(v_2+u_2)t_c}, \\
 G_{010}(\infty) &= \frac{v_2 u_1}{(v_2-v_1+u_2)(v_1+u_1)} e^{-v_1 t_c} - \frac{v_2 u_1}{(v_2-v_1+u_2)(v_2+u_1+u_2)} e^{-(v_2+u_2)t_c}, \\
 G_{011}(\infty) &= \frac{u_2}{v_2+u_2} + \frac{v_2 u_1}{(v_2+u_2)(v_2+u_1+u_2)} e^{-(v_2+u_2)t_c}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Состояния (1,0,1) и (0,0,1) состояниями системы также не являются.

Для выяснения оптимальной тактики единицы X вычислим разность:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= F_{100}(\infty) - G_{100}(\infty) = \\
 &= \frac{-v_2 u_2}{(v_1+u_2)(v_2+u_2)} + \frac{v_2 u_1}{(v_1+u_1)(v_2-v_1+u_2)} e^{-v_1 t_c} - \frac{v_1 v_2 u_1}{(v_1+u_2)(v_2+u_2)(v_1+u_1+u_2)} e^{-(v_1+u_2)t_c} - \\
 &\quad - \frac{v_1 v_2 u_1}{(v_2-v_1+u_2)(v_2+u_2)(v_2+u_1+u_2)} e^{-(v_2+u_2)t_c}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Введём обозначения: $a = \frac{v_1}{u_1}$; $b = \frac{v_2}{u_1}$; $c = \frac{u_2}{u_1}$; $d = u_1 t_c$.

Величину d назовём приведённым временем запаздывания.

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= F_{100}(\infty) - G_{100}(\infty) = \\
 &= \frac{-bc}{(a+c)(b+c)} + \frac{b}{(a+1)(b-a+c)} e^{-ad} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)(a+c+1)} e^{-(a+c)d} - \frac{ab}{(b-a+c)(b+c)(b+c+1)} e^{-(b+c)d},
 \end{aligned} \tag{18}$$

при этом $b > 0$, $a \in (0, b)$, $c \in (0, 1)$, $d > 0$.

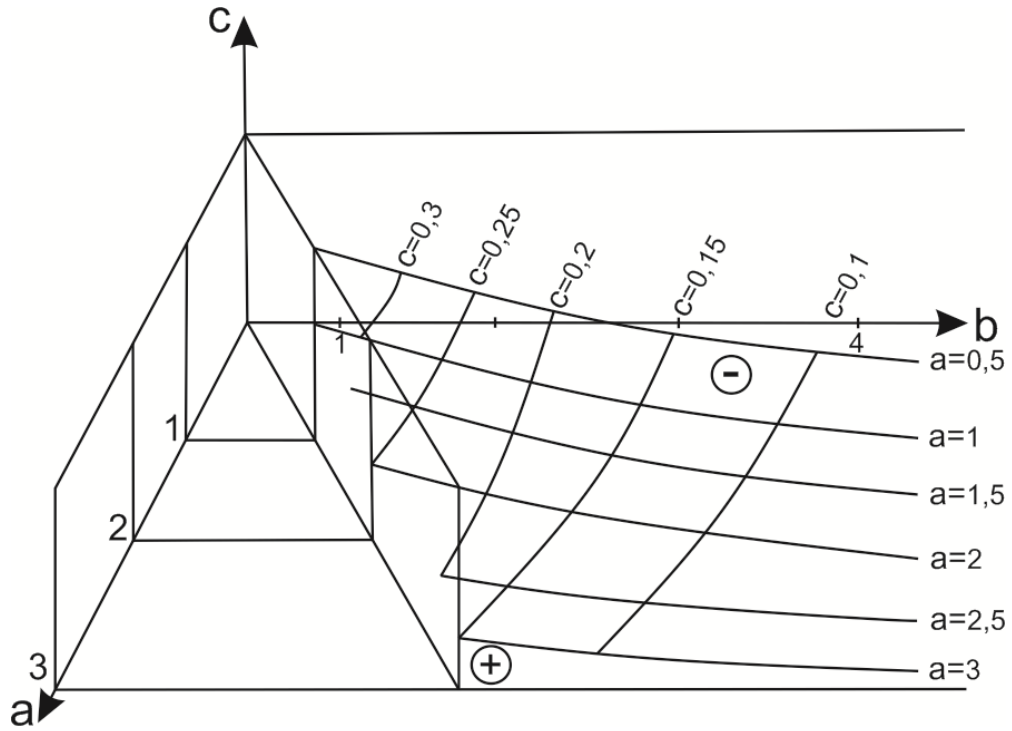


Рисунок 1 – Области выгоды различных тактик ведения боя единицей X при $d=1$

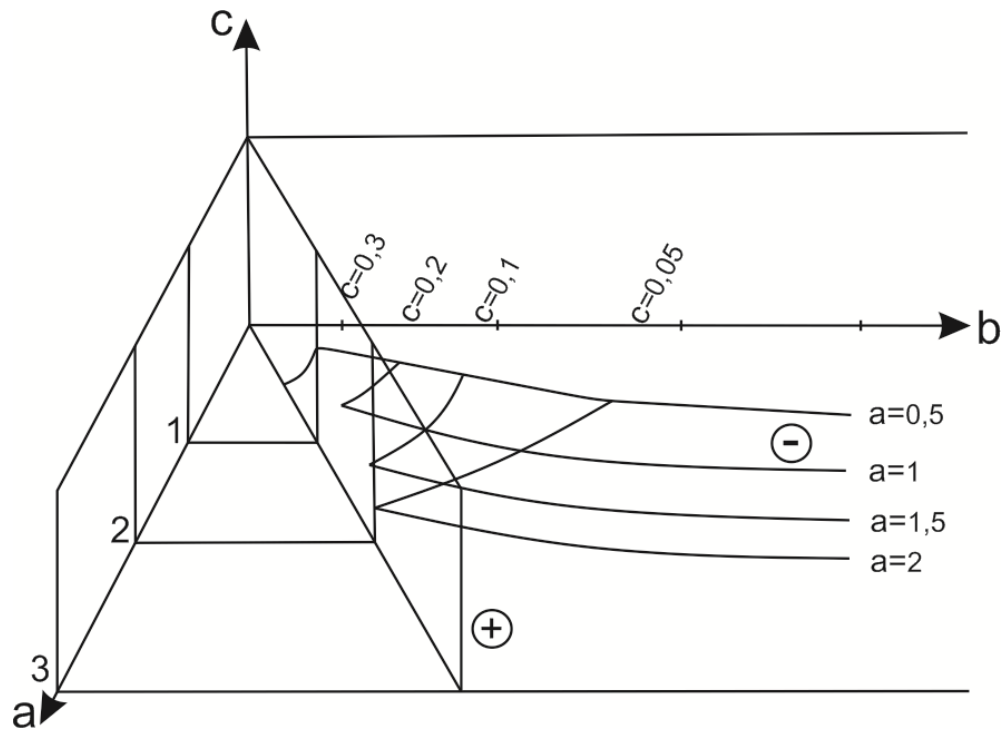


Рисунок 2 – Области выгоды различных тактик ведения боя единицей X при $d=2$

Анализ результатов расчётов. На основе формул (1) – (18) проведены расчёты основных показателей боя. Области выгоды различных тактик ведения огня единицей X представлены на рисунках 1 и 2. Рисунок 1 соответствует значению приведённого времени запаздывания $d=1$. Рисунок 2 – значению $d=2$. Знаком (+) на рисунках отмечена область, в которой единице X следует в первую очередь вести огонь по первой единице Y (менее уязвимой и более опасной). Как видно из рисунков, эта область уменьшается при увеличении времени запаздывания t_c . Область, в которой единице X следует в первую очередь вести огонь по второй единице Y , отмечена на рисунках знаком (-).

Результаты расчётов показали, что правильный выбор тактики ведения боя единицей X может существенно увеличить вероятность её победы. Так при $v_1=0,05$; $v_2=0,06$; $u_1=0,04$; $u_2=0,008$; $t_c=12,5$ (при этом $a=1,25$; $b=1,5$; $c=0,2$; $d=0,5$) получаем $F_{100(\infty)}=0,610$; $G_{100(\infty)}=0,478$; $\Delta=0,132$. А при $v_1=0,03$; $v_2=0,0325$; $u_1=0,025$; $u_2=0,005$; $t_c=10$ (при этом $a=1,2$; $b=1,3$; $c=0,2$; $d=0,25$) получаем $F_{100(\infty)}=0,525$; $G_{100(\infty)}=0,361$; $\Delta=0,164$. То есть в этих ситуациях единице X необходимо в первую очередь вести огонь по первой единице противника. Правильный выбор единицей X тактики ведения боя может более чем на 15% увеличить вероятность её победы.

Но при $v_1=0,03$; $v_2=0,14$; $u_1=0,02$; $u_2=0,018$; $t_c=12,5$ (при этом $a=1,5$; $b=7$; $c=0,9$; $d=0,25$) имеем $F_{100(\infty)}=0,465$; $G_{100(\infty)}=0,589$; $\Delta=-0,144$. А при $v_1=0,02$; $v_2=0,09$; $u_1=0,02$; $u_2=0,019$; $t_c=25$ (при этом $a=1$; $b=4,5$; $c=0,95$; $d=0,25$) получаем $F_{100(\infty)}=0,369$; $G_{100(\infty)}=0,521$; $\Delta=-0,148$. То есть в этих случаях единице стороны X целесообразно начинать обстрел со второй единицы стороны Y и в этих случаях оптимальный выбор единицей X тактики ведения боя значительно увеличивает вероятность её победы.

Выводы:

1) На основе теории непрерывных марковских процессов разработаны модели отражения одной боевой единицей X атаки двух разнотипных единиц противника при вступлении в бой одной из них с запаздыванием.

2) Показаны области выгоды применения различных тактик ведения боя единицей X , которые изменяются с увеличением времени запаздывания.

3) Установлено, что выбор единицей X правильной тактики ведения боя может значительно увеличить вероятность её победы.

4) Разработанная модель двухстороннего боя может быть использована для оценки боевой эффективности многоцелевых комплексов вооружения.

Список использованных источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. №1. С. 5-17.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы и методология. М.: УРСС, 2007. 208 с.
3. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. М.: Воениздат, 1970. 270 с.
4. Ткаченко П.Н. Математические модели боевых действий. М.: Советское радио, 1969. 240 с.
5. Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. New York: McGraw-Hill, 2005. 998 p.
6. Jaiswal N.K. Military Operations Research: Quantitative Decision Making. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. 388 p.
7. Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Марковские модели боя. М.: Министерство обороны СССР, 1985. 85 с.
8. Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок. // Математическое моделирование и численные методы. 2016. №1. С. 89-104.
9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: КноРус, 2015. 448 с.
10. Чуев В.Ю., Дубограй И.В., Анисова Т.Л. Вероятностная модель атаки разнотипных средств // Математическое моделирование и численные методы. 2018. №1. С. 90-97.