

УДК 519.2

А.И. БУРАВЛЕВ, доктор технических наук, профессор

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ БОЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В статье рассматривается возможность применения полумарковских процессов для моделирования боевых систем. Показано, что полумарковские процессы обладают широкой возможностью моделирования реальных систем в зависимости от уровня их информационного обеспечения. Приводится пример, иллюстрирующий возможности применения полумарковских моделей в зависимости от полноты их информационного обеспечения.

**Ключевые слова:** полумарковский процесс; переходные функции полумарковского процесса; вероятности состояния процесса; параметры информационного обеспечения полумарковского процесса.

Моделирование боевых систем (БС) является основным инструментом их исследований и оценки эффективности применения [1; 2]. Выбор той или иной модели во многом зависит от уровня информационного обеспечения исследований, квалификации специалистов, программно-технического обеспечения. Несмотря на интенсивное развитие современной компьютерной базы военно-научных исследований, использование аналитических моделей остается по-прежнему актуальным для принятия оперативных решений в условиях неполной информации о характеристиках системы и условиях ее применения. Аналитические модели обладают прогностическим свойством, т.е. позволяют выявить тенденции и осуществить прогноз на некоторый будущий интервал времени. В данной статье автор обращает внимание исследователей на возможности применения полумарковских моделей для моделирования боевых систем с учетом уровня информационного обеспечения исследований.

Процесс боевого функционирования современных БС представляет собой повторяющуюся последовательность смены определенных состояний системы, таких как (рисунок 1):

- занятие боевой позиции (выдвижение в район боевого применения, развертывание комплекса, его топогеодезическая привязка, маскировка и др.) –  $S_0$ ;
- подготовка к стрельбе (заряжание оружия, обнаружение и выбор цели, прицеливание) –  $S_1$ ;
- боевая стрельба и затем смена боевой позиции –  $S_2$ .

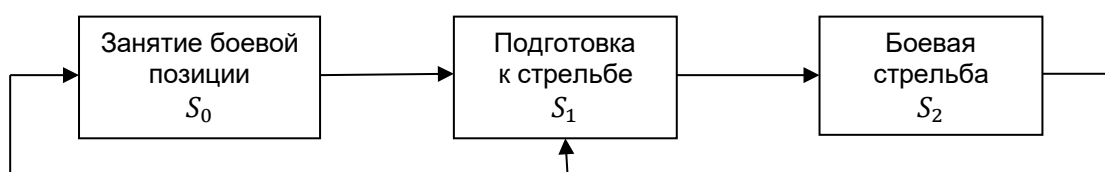


Рисунок 1 – Схема изменения состояний системы в процессе боевого функционирования

В зависимости от уровня описания системы число состояний и переходов системы может быть увеличено.

Время пребывания системы в каждом состоянии в общем случае является случайным, а продолжительность цикла боевого функционирования  $T_{ц}$  – суммой случайных длительностей пребывания системы в этих состояниях:

$$T_{ц} = T_{п} + T_{пс} + T_{с},$$

где  $T_{п}$  – время занятия боевой позиции;  
 $T_{пс}$  – время подготовки к стрельбе;  
 $T_{с}$  – продолжительность боевой стрельбы.

Для моделирования процесса функционирования БС наиболее адекватным является полумарковская модель, описывающая дискретно-непрерывный случайный процесс [1; 3]. В этой модели изменение времени пребывания системы в каком-либо состоянии является случайным с некоторым законом распределения, а переходы из одного состояния в другие осуществляется мгновенно с определенными вероятностями.

Полумарковский процесс (ПМП) изображается графом  $G = (S, V, P)$ , где множество узлов  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  определяют состояния процесса; множество дуг  $V = \{V_{ij}\}$  – направления переходов процесса из одного состояния в другие состояния, где  $V_{ij} = 1$ , если переход  $S_i \rightarrow S_j$  возможен, и  $V_{ij} = 0$ , если данный переход невозможен. Переходы в различные состояния задаются матрицей вероятностей переходов  $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ , где  $\pi_{ij}(t) = P(V_{ij} = 1 | \theta_i < t)$  – условная вероятность перехода  $S_i \rightarrow S_j$  за время  $t$ ;  $\theta_i$  – случайное время пребывания процесса в состоянии  $S_i$  с известным законом распределения  $F_i(t) = P(\theta_i < t)$ . Вероятности переходов удовлетворяют условию нормировки:

$$\forall i, \sum_{j=1}^m \pi_{ij}(t) = 1.$$

Произведение  $\pi_{ij} F_i(t) = Q_{ij}(t)$  является переходной функцией ПМП. Переходная функция  $Q_{ij}(t)$  удовлетворяет следующим условиям [2]:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0, Q_{ij}(0) &= 0; \\ \text{при } t \rightarrow \infty, Q_{ij}(\infty) &= \pi_{ij}; \\ \sum_{j=1}^m Q_{ij}(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Если  $\pi_{ij} = 1$ , т.е. переход  $S_i \rightarrow S_j$  является единственно возможным, то  $Q_{ij}(t) = F_i(t)$  и полумарковский процесс превращается в непрерывный по времени марковский процесс.

Матрица переходных вероятностей  $Q(t) = \{Q_{ij}(t)\}_{m \times m}$  вместе с начальными условиями  $P(t_0) = \{p_j(t_0)\}_{m \times 1}$  однозначно описывает динамику полумарковского процесса:

$$P(t, t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} P(\tau) dQ(\tau),$$

где  $\Delta t$  – конечный интервал времени наблюдения.

Изменением вероятностей переходов  $\pi_{ij}(t)$  и функций распределения  $F_i(t)$  можно управлять полумарковским процессом.

Для боевой системы, схема функционирования которой показана на рисунке 1, граф ПМП имеет вид:

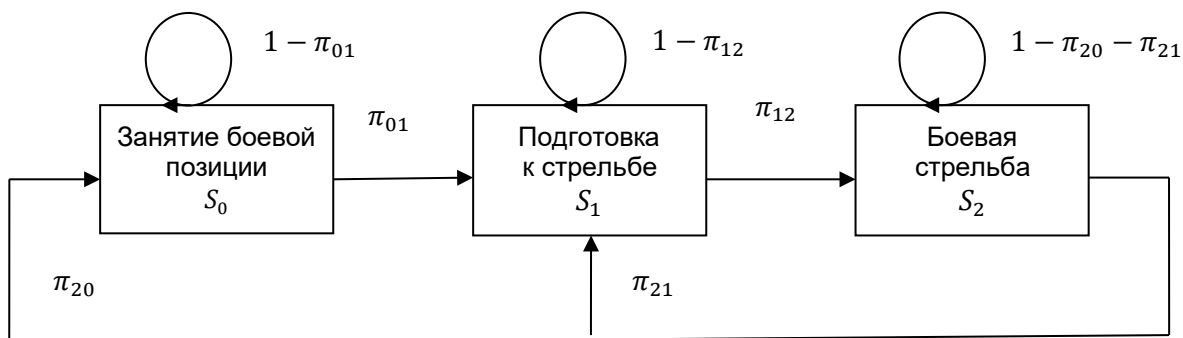


Рисунок 2 – Граф полумарковского процесса функционирования боевой системы

В зависимости от наличия исходной информации о параметрах ПМП можно получить различные варианты моделей функционирования БС.

Рассмотрим вариант, когда исследователю известны только средние длительности  $\bar{T}_n, \bar{T}_{nc}, \bar{T}_c$  нахождения БС в рассматриваемых состояниях и вероятности переходов  $\pi_{01}, \pi_{12}, \pi_{20}, \pi_{21}$ , соответствующие этим длительностям. В этом случае динамику ПМП можно описать последовательностью моментов смены состояний процесса:

$$t_n = t_{n-1} + \bar{T}_i(\max_j(\pi_{ij})); n = 1, 2, \dots; t_0 = 0; \tag{1}$$

$$S(t_n) \in \{S_0, S_1, S_2\}.$$

Выражение  $\bar{T}_i(\max_j(\pi_{ij}))$  означает, что время  $\bar{T}_i$  равно длительности состояния, в которое система переходит с максимальной вероятностью  $\pi_{ij}$  в рассматриваемый момент времени.

Уравнения динамики вероятностей возможных состояний БС принимают следующий вид:

$$P_0(t_n) = (1 - Q_{01})P_0(t_{n-1}) + Q_{20}P_2(t_{n-1}); P_0(0) = 1;$$

$$P_1(t_n) = Q_{01}P_0(t_{n-1}) + (1 - Q_{12})P_1(t_{n-1}) + Q_{21}P_2(t_{n-1}); P_1(0) = 0;$$

$$P_2(t_n) = Q_{12}P_1(t_{n-1}) + (1 - Q_{20} - Q_{21})P_2(t_{n-1}); P_2(0) = 0;$$

$$P_0(t_n) + P_1(t_n) + P_2(t_n) = 1; n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где вероятности переходов  $Q_{ij}$  представляют собой ступенчатые функции:

$$Q_{ij}(t) = \pi_{ij}1(t - t_n) = \begin{cases} 0, & t < t_n \\ \pi_{ij}, & t \geq t_n \end{cases} \tag{3}$$

С помощью уравнений (1), (2) рассчитываются вероятности состояний системы в моменты переходов  $t_n$ .

На рисунке 3 показан график изменения вероятностей состояний для следующих исходных данных:  $\pi_{01} = 1; \pi_{12} = 1; \pi_{20} = 0,6; \pi_{21} = 0,2; \bar{T}_n = 20$  мин;  $\bar{T}_{nc} = 10$  мин;  $\bar{T}_c = 10$  мин.

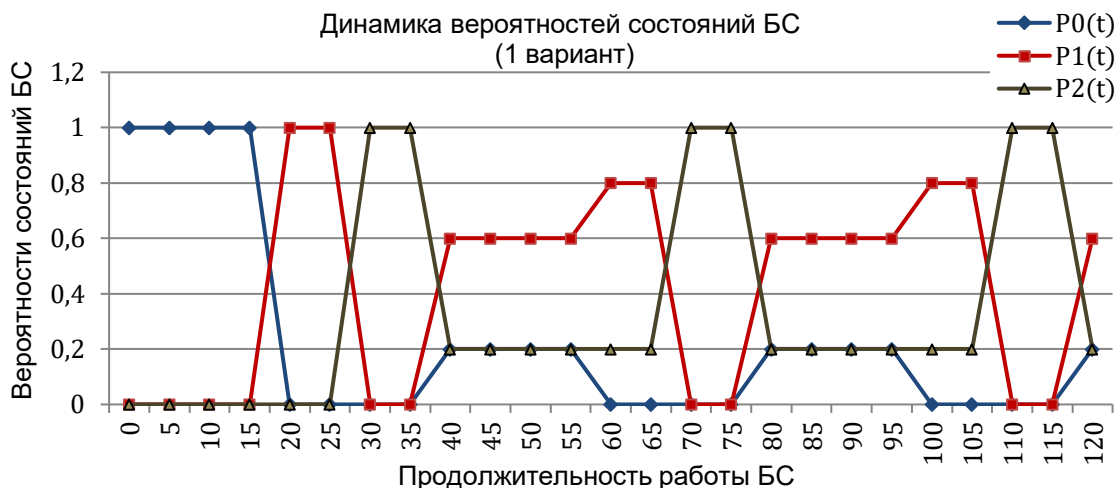


Рисунок 3 – Динамика вероятностей состояний БС в процессе функционирования (1 вариант)

Рассмотренная модель, по сути, является имитационной моделью БС с аналитической оценкой вероятностей ее возможных состояний.

Для эргодического процесса с не изменяющимися во времени параметрами можно произвести осреднение вероятностей состояний по времени реализации процесса [4]. В этом случае динамика процесса станет более гладкой и в ней можно увидеть определенные статистически устойчивые тенденции. Осреднение вероятностей состояний производится по формуле:

$$\bar{P}(t_n) = \frac{\sum_{k=0}^n P(t_k)}{t_n} \tag{4}$$

График осредненного процесса показан на рисунке 4.

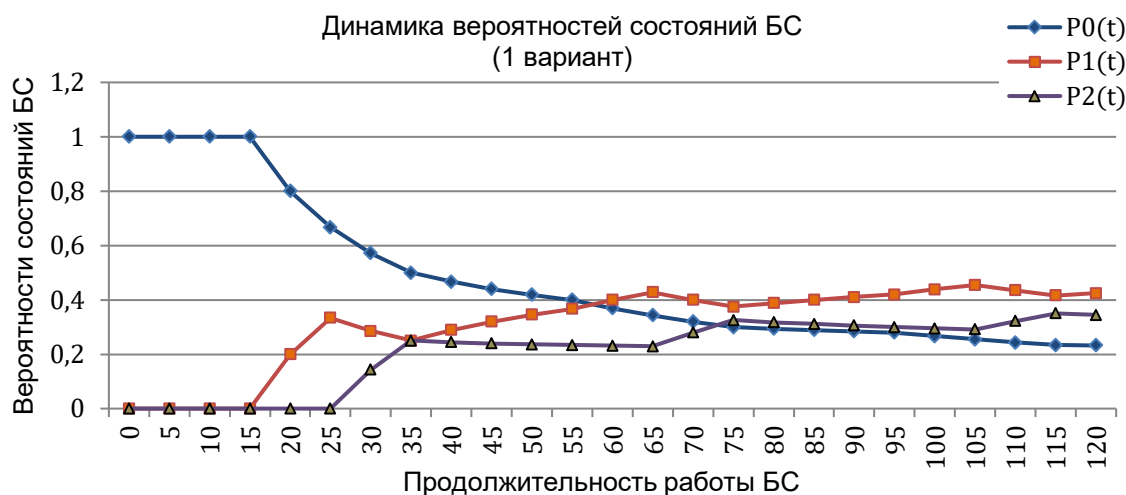


Рисунок 4 – Динамика средних вероятностей состояний БС в процессе функционирования (1 вариант)

Из данного рисунка видно, что при многократном повторении цикла работы БС процесс функционирования приобретает стационарный характер с определенными вероятностями состояний.

Следующий вариант моделирования состоит в линейной аппроксимации переходных вероятностей  $Q_{ij}(t)$  на интервалах между переходами  $(t_{n-1}, t_n)$ :

$$Q_{ij}(t) = \pi_{ij}F_i(t) = \pi_{ij} \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{\bar{T}}, & t_{n-1} \leq t < t_n; \\ 1 & t \geq t_n \end{cases}, \quad (5)$$

Линейная функция распределения  $F_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{\bar{T}}, & t_{n-1} \leq t < t_n; \\ 1 & t \geq t_n \end{cases}$  возникает при равномерном распределении моментов перехода системы в другие разрешенные состояния на интервале наблюдения  $(t_{n-1}, t_n)$ . Равномерное распределение используется в случае, когда у исследователя отсутствуют знания о возможном распределении времени переходов системы и в этом случае он вынужден использовать известный принцип «недостаточного основания» Лапласа [1; 5]. Равномерное распределение времени наступления событий на конечном интервале обладает максимальной неопределенностью (энтропией) [6].

На рисунке 5 показаны графики изменения вероятностей состояний для данной модели при тех же исходных данных.

Для данной модели возможно также осреднение вероятностей состояний БС по времени моделирования. На рисунке 6 показаны графики изменения средних вероятностей состояний БС в процессе моделирования, из которых видна устойчивая тенденция к установлению стационарного распределения вероятностей состояний системы при неограниченном увеличении времени функционирования.

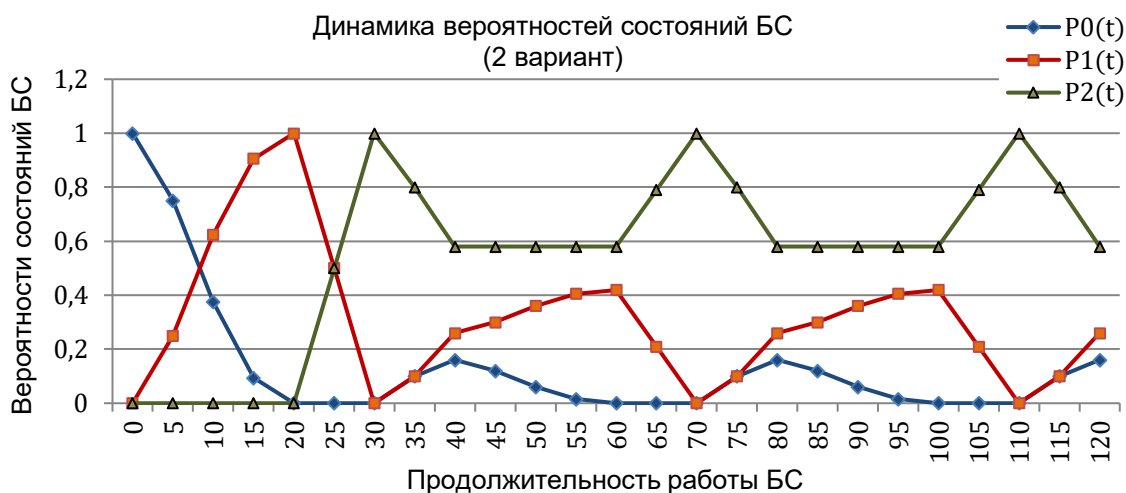


Рисунок 5 – Динамика вероятностей состояний БС в процессе функционирования (2 вариант)

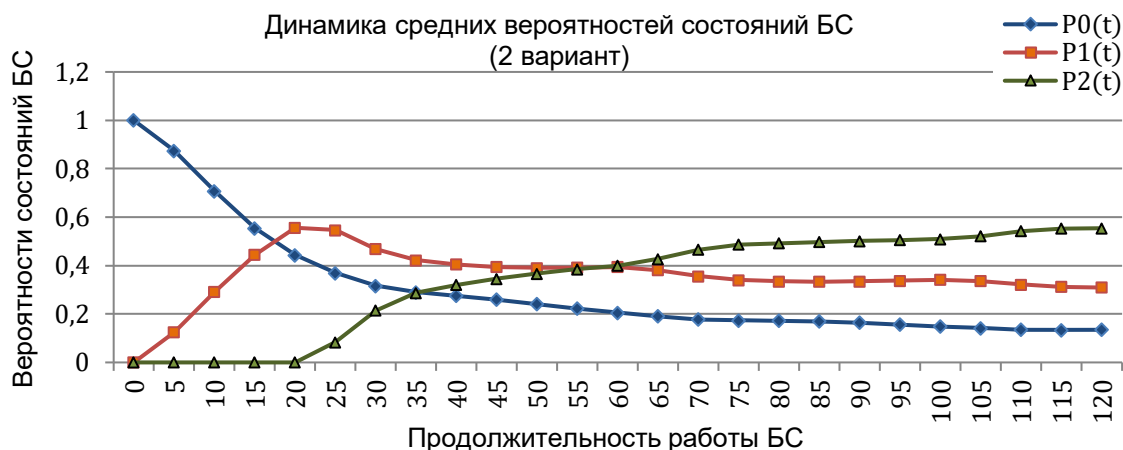


Рисунок 6 – Динамика средних вероятностей БС в процессе функционирования (2 вариант)

Если изменение состояний системы происходит случайно и непрерывно во времени, то в качестве функции распределения времени пребывания системы в каждом состоянии  $S_i$  целесообразно принять экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda_i = \frac{1}{T_i}$ , имеющее также максимальную энтропию [6]:

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}. \tag{6}$$

В этом случае получаем непрерывную марковскую модель функционирования БС. Разностная система уравнений динамики БС имеет вид:

$$\begin{aligned} P_0(t_n) &= P_0(t_{n-1}) - \pi_{01}\lambda_0\Delta t P_0(t_{n-1}) + \pi_{20}\lambda_2\Delta t P_2(t_{n-1}); P_0(0) = 1; \\ P_1(t_n) &= P_1(t_{n-1}) + \pi_{01}\lambda_0\Delta t P_0(t_{n-1}) + \pi_{21}\lambda_2\Delta t P_2(t_{n-1}); P_1(0) = 0; \\ P_2(t_n) &= P_2(t_{n-1}) - \pi_{20}\lambda_2\Delta t P_2(t_{n-1}) - \pi_{21}\lambda_2\Delta t P_2(t_{n-1}); P_2(0) = 0; n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\Delta t$  – шаг разностной схемы.

На рисунке 7 приведены графики изменения вероятностей состояний БС для шага  $\Delta t = 5$  мин.

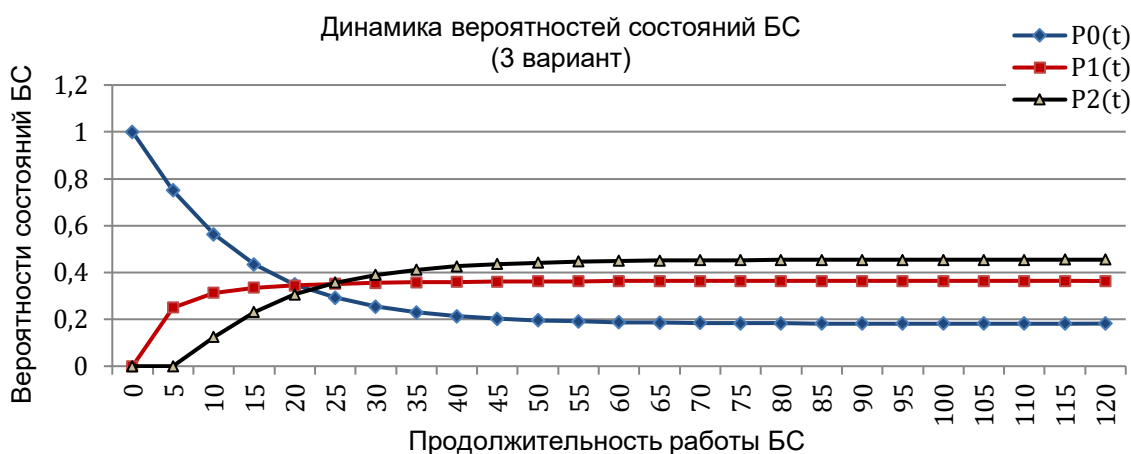


Рисунок 7 – Динамика вероятностей БС в процесс функционирования (3 вариант)

Сравнивая приведенные графики для осредненных по времени вероятностей состояний БС, нетрудно заметить их сходство, что отражает вполне определенную закономерность динамики моделируемого процесса независимо от вида используемой модели. Их различие обусловлено только уровнем информационного описания модели.

Если помимо средних значений времени нахождения системы в различных состояниях известны также средние квадратические отклонения (СКО) времени, то в качестве модельного распределения  $F_i(t)$  можно принять любые непрерывные распределения, соответствующие физическому смыслу протекающих в БС процессов, параметры которых однозначно определяются первыми двумя моментами – математическим ожиданием и СКО.

На практике часто используются распределения Эрланга  $n$ -го порядка, с параметрами  $\mu$ ,  $n$ , где  $\mu$  – интенсивность потока,  $n$  – порядок распределения. Плотность и функция распределения Эрланга  $n$ -го порядка имеют вид [6; 7]:

$$f_n(t) = \frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t}; F_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}, \quad (8)$$

с параметрами:

$$\mu = \frac{\bar{T}}{\sigma_T^2}; n = \frac{\bar{T}^2}{\sigma_T^2}, \quad (9)$$

рассчитываемыми по известным средним значениям  $\bar{T}$  и СКО  $\sigma_T$  длительностей пребывания процесса в заданных состояниях.

Распределение Эрланга получается в результате суммирования независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение длительности между событиями. В теории случайных процессов поток с экспоненциальным распределением времени появления событий называется простейшим пуассоновским потоком [5; 7]. Потоки, в которых время появления событий распределено по закону Эрланга, называются эрланговскими потоками [4; 5]. Таким образом, поток Эрланга  $n$ -го порядка – это поток, в котором время появления случайного события равно сумме длительностей  $n$  событий простейшего пуассоновского потока:

$$\theta_n = \sum_{k=1}^n T_k. \quad (10)$$

Плотность распределения случайной величины  $\theta_n$  является рекуррентной сверткой распределений:

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-\tau) f_1(\tau) d\tau; n > 1, \quad (11)$$

где  $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  – плотность экспоненциального распределения времени появления события в простейшем потоке с интенсивностью  $\lambda$ .

Эрланговский поток событий получается в результате «просеивания» (разрежения) исходного простейшего пуассоновского потока путем удаления из него определенного числа событий [5; 6]. В результате разрежения пуассоновского потока его интенсивность уменьшается. Найдем интенсивность потока Эрланга  $n$ -го порядка:

$$\mu_n(t) = \frac{f_n(t)}{1-F_n(t)} = \frac{\lambda \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}}{\sum_{k=1}^n \lambda \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}} = \lambda \alpha_n(t), \tag{12}$$

где  $\alpha_n(t) = \frac{\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}}{\sum_{k=1}^n \lambda \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}} \leq 1$  – коэффициент «просеивания», характеризующий интенсивность эрланговского потока относительно интенсивности пуассоновского потока.

На рисунках 8, 9 показаны графики функций распределения и относительной интенсивности  $\alpha_n(t)$  потоков Эрланга с порядком  $n = 1, 2, 3$ .

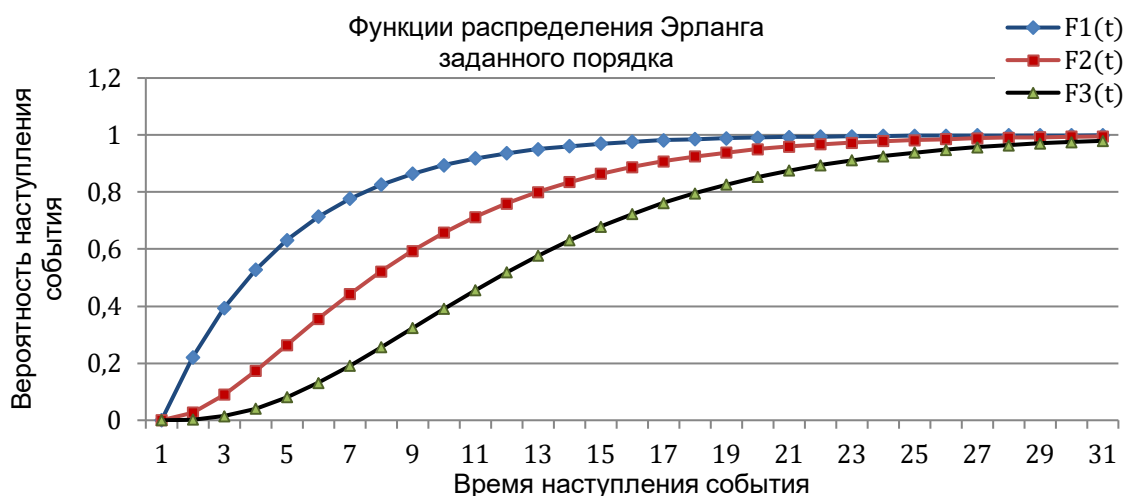


Рисунок 8 – Графики функций распределения Эрланга заданного порядка

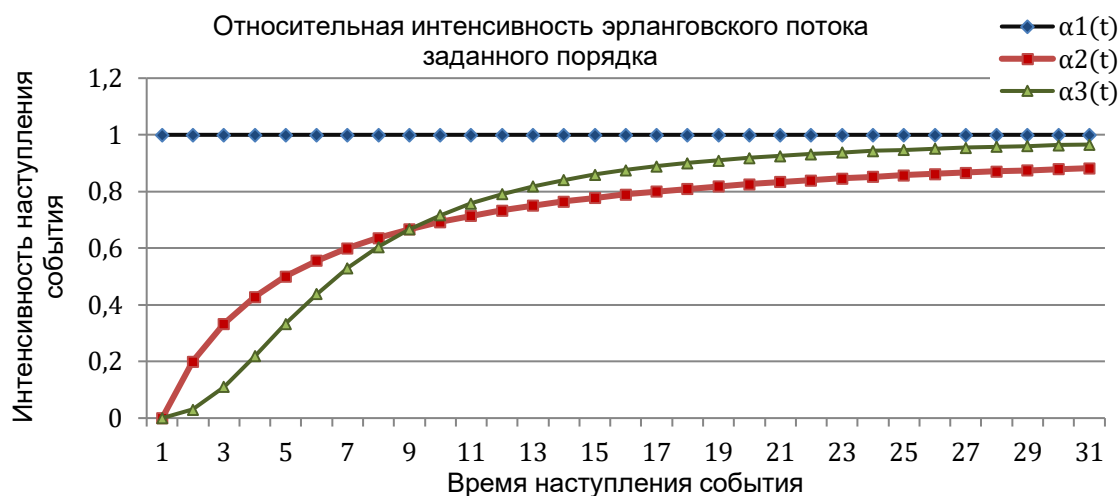


Рисунок 9 – Графики относительной интенсивности эрланговского потока заданного порядка



Для сохранения интенсивности эрланговского потока на уровне интенсивности  $\lambda$  исходного пуассоновского потока его нормируют путем изменения масштаба времени с помощью преобразования [6]:

$$\bar{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n T_k}{n}.$$

В этом случае среднее значение длительности  $\theta_n$  между событиями эрланговского потока составит  $\bar{\theta}_n = \bar{T} = \frac{1}{\lambda}$ , а СКО –  $\sigma_{\theta n} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{n}}$ .

В пределе при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{\theta n} \rightarrow 0$  эрланговский поток превращается в регулярный поток с постоянным периодом следования событий  $\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$ . Такой поток был рассмотрен выше в первом примере.

Использование распределений Эрланга (8) позволяет с достаточной точностью аппроксимировать неизвестные распределения длительностей полумарковского процесса по известным первым двум моментам.

При использовании распределений Эрланга система уравнений динамики состояний БС (7) остается неизменной, изменяются только интенсивности переходов. На рисунке 10 приведены графики изменения вероятностей состояний БС в процессе функционирования для случая, когда интенсивности переходов соответствуют распределению Эрланга 2-го порядка  $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}\alpha_2(t)$ , где  $\alpha_2(t)_i = \frac{\lambda_{ij}t}{1+\lambda_{ij}t}$ .

Из анализа графиков рисунка 10 видно, что общая закономерность динамики БС сохраняется, изменяются только ее параметры.

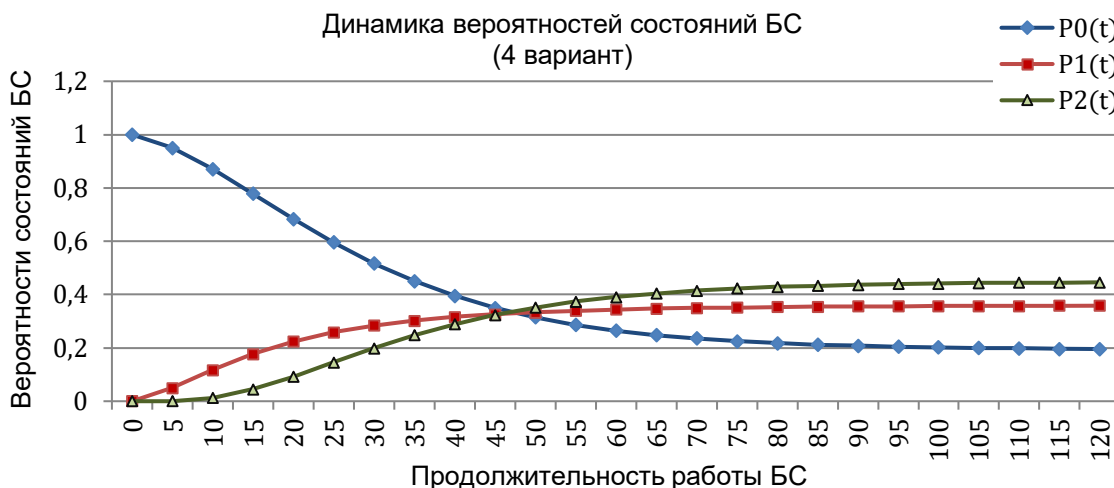


Рисунок 10 – Динамика вероятностей состояний БС (4 вариант)

Дальнейшим обобщением эрланговских потоков являются *гамма* – потоки, у которых время между событиями имеет гамма-распределение:

$$f_n(t) = \frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\mu t}, \quad (13)$$

где  $n > 0$  – положительное, но необязательно целое число;

$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$  – гамма-функция. Для целых чисел  $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Оценим меру различия моделей по величине СКО вероятностей состояний БС на заданном интервале моделирования  $t_M = 120$  ед. для рассмотренных выше примеров. За эталон примем непрерывную марковскую модель с экспоненциальным распределением времени функционирования системы. В качестве показателя качества модели используем СКО параметров моделируемой системы от эталонной модели за время моделирования:

$$\sigma_p(t_M) = \sqrt{\frac{\Delta P_0^2(t_M) + \Delta P_1^2(t_M) + \Delta P_2^2(t_M)}{3}}. \quad (14)$$

Значения СКО для каждой модели приведены в таблице 1.

Полученный результат вполне очевиден. Наиболее точной является модель Эрланга 2-го порядка, которая является сверткой двух марковских моделей. Из таблицы 1 также видно, что показатель  $\sigma_p(t_M)$  вполне адекватно характеризует точность модели.

В заключение отметим, что моделирование процесса функционирования с применением полумарковских процессов позволяет получать различный спектр моделей в зависимости от располагаемой исследователем информации о моделируемых процессах. Достоинством полумарковских моделей является их аналитический характер, а значит возможность прогнозирования их поведения на различных временных интервалах и коррекции их параметров с учетом получаемой информации.

Использование эрланговских потоков позволяет достаточно просто осуществлять коррекцию моделей для получения заданной точности вероятностных характеристик системы, учитывая рекуррентное свойство модели (11).

Применение полумарковских моделей для решения ряда прикладных задач показывают достаточно высокую их эффективность [8; 9].

Таблица 1 – Значения СКО тестируемых моделей

Тип модели	Имитационная модель	Линейная ПМП	Модель Эрланга 2-го порядка
Погрешность оценки			
$\Delta P_0(t)$	0,0501	-0,0463	0,014
$\Delta P_1(t)$	0,0604	-0,05358	-0,005
$\Delta P_2(t)$	-0,1105	0,0999	-0,008
СКО модели	0,078	0,071	0,01

### Список использованных источников

1. Буренок В.М., Буравлев А.И., Лавринов Г.А., Подольский А.Г., Пьянков А.А. Методы военно-научных исследований систем вооружения: военно-теоретический труд. М.: Граница, 2017. – 512 с.
2. Горчица Г.И., Ищук В.А. Проблемы моделирования в интересах обоснования военного строительства и планирования развития ВВТ // Известия РАН. 2013. №3(78). – С. 3-9.
3. Сильверстов А.Н. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. М.: Советское радио, 1980. – 272 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. – 384 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Наука, 1972. – 552 с.
6. Кузин В.Т. Основы кибернетики. Т.1: Математические основы кибернетики. М.: Энергия, 1974. – 504 с.
7. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд. М.: Наука, 1987. – 336 с.
8. Томашевский В.Н., Жданова Е.Г. Имитационное моделирование в среде GPSS. М.: Бестселлер, 2003. – 412 с.
9. Буравлев А.И., Еланцев Г.А. Вероятностные модели управления жизненным циклом вооружения и военной техники // Вооружение и экономика. 2021. №3(57). – С. 45-65.