УДК 358.1

В.С. ЛУГАВОВ, кандидат физико-математических наук, доцент
В.Д. ЛУГАВОВА, доцент

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОРАЖЕНИЯ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

В работе рассматривается применение средств поражения по рассредоточенной групповой цели, представляющей совокупность элементарных (одиночных, малоразмерных) целей. Предполагается, что средства поражения применяются без перенацеливания, независимо, в одинаковых условиях, а среднее необходимое число попаданий в каждую элементарную цель равно единице. Примем в качестве оценки эффективности применения средств поражения математическое ожидание числа пораженных элементарных целей. В статье найдено распределение средств поражения по групповой цели, при котором это математическое ожидание достигает максимума, а также исследованы асимптотические свойства среднего ущерба, наносимого групповой цели, при этом распределении.

Ключевые слова: *элементарная цель; рассредоточенная групповая цель; эффективность поражения групповой цели.*

Вопросы оптимального распределения средств поражения, рассмотренные в работах [1 -4], остаются по-прежнему актуальными[1].

Рассмотрим применение N средств поражения (СП) по рассредоточенной групповой цели, представляющей собой совокупность $N_ц$ элементарных (одиночных, малоразмерных) целей. Будем предполагать, что СП применяются без перенацеливания, независимо, в одинаковых условиях, а среднее необходимое число попаданий в каждую элементарную цель равно единице. Обозначим через $\omega (0 < \omega < 1)$ – вероятность поражения одной элементарной цели при применении по ней одного СП. Эффективность поражения групповой цели в значительной степени определяется распределением средств поражения по элементарным целям, входящим в состав групповой. В качестве оценки эффективности применения СП примем математическое ожидание числа пораженных элементарных целей в составе групповой цели.

Занумеруем все элементарные цели и k-й элементарной цели $\left(k = 1,2, \dots, N_ц\right)$ поставим в соответствие случайную величину $X_k(n)$, $n = 0,1, \dots$ принимающую значение 1, если при применении n СП по k-й цели она окажется пораженной, и 0, если она окажется непораженной $(X_k(0) = 0)$. Тогда суммарное число пораженных целей X будет равно:

$$X = \sum_{k=1}^{N_ц} X_k(n_k),$$

где $\sum_{k=1}^{N_ц} n_k = N$ и, следовательно, при этом выполнено:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{N_ц} P(X_k(n_k) = 1). \tag{1}$$

Число $M(X)$ зависит от распределения СП по элементарным целям, т.е. от набора $\left(n_1, n_2, \dots, n_{N_ц}\right)$, причем от перестановки любых чисел в наборе математическое ожидание $M(X)$ не изменится, т.к. все элементарные цели однотипны.

Для нахождения оптимального распределения СП по целям (т.е. такого распределения, при котором $M(X)$ достигает максимума) рассмотрим произвольный набор $\left(n_1, n_2, \dots, n_{N_ц}\right)$ $\left(\sum_{k=1}^{N_ц} n_k = N\right)$, описывающий распределение СП по целям и соответствующее ему математическое ожидание (1) числа пораженных целей. Рассмотрим сумму двух произвольных слагаемых $P(X_i(n_i) = 1) + P\left(X_j(n_j) = 1\right)$, входящих в (1). Обозначим эту сумму через $R(n_i, n_j)$.

Пусть $n_i + n_j = n \geq 1$, тогда $R(n_i, n_j) = R(n_i, n - n_i) = 2 - (1 - \omega)^{n_i} - (1 - \omega)^{n - n_i}$.

[1] *См.*: Запорожец В.И. Боевая эффективность средств поражения и боеприпасов: тексты лекций. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2006. – 159 с.; *см.* также [5].

Найдем, при каком значении n_i $(0 \le n_i \le n)$ функция $R(n_i, n - n_i)$ достигает максимума. Введем вспомогательную функцию $R(x) = 2 - (1-\omega)^x - (1-\omega)^{n-x}$, определенную при $0 \le x \le n$, и вычислим ее производную:

$$\frac{dR}{dx} = -(1-\omega)^x \ln(1-\omega) + (1-\omega)^{n-x} \ln(1-\omega) = \ln(1-\omega)\left((1-\omega)^{n-x} - (1-\omega)^x\right).$$

Нетрудно видеть, что $\frac{dR}{dx} = 0$ при $x = \frac{n}{2}$, а также $\frac{dR}{dx} > 0$ при $x < \frac{n}{2}$ и $\frac{dR}{dx} < 0$ при $\frac{n}{2} < x \le n$. Таким образом, $x = \frac{n}{2}$ – точка максимума функции $R(x)$ при $0 \le x \le n$ (а также $x = 0$, $x = n$ – точки минимума функции $R(x)$ при $0 \le x \le n$). Отсюда вытекает, что если n – четное число, то функция целочисленных аргументов $R(n_i, n - n_i)$ достигает максимума при $n_i = \frac{n}{2}$; если же n – нечетное число, то $R(n_i, n - n_i)$ достигает максимума в точках $n_i = \frac{n-1}{2}$, $n_i = \frac{n+1}{2}$, поскольку выполняется $R\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = R\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$. Таким образом, функция $R\left(n_i, n_j\right)$, $n_i + n_j = n \ge 1$ достигает максимума при условии $\left|n_i - n_j\right| \le 1$, а, следовательно, набор $\left(n_1, n_2, \dots, n_{N_ц}\right)$, где $\sum_{k=1}^{N_ц} n_k = N$, является оптимальным, если для любых двух чисел n_i, n_j из этого набора выполнено неравенство $\left|n_i - n_j\right| \le 1$. Отсюда несложно получить искомый оптимальный набор.

Действительно, для произвольного числа α рассмотрим представление $\alpha = \{\alpha\} + [\alpha]$, где $[\alpha]$, $\{\alpha\}$ – соответственно целая и дробная части числа α. Тогда из равенства $\frac{N}{N_ц} = \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} + \left[\frac{N}{N_ц}\right]$ получим:

$$N = N_ц \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} + N_ц \left[\frac{N}{N_ц}\right] = N_ц \left\{\frac{N}{N_ц}\right\}\left(\left[\frac{N}{N_ц}\right] + 1\right) + \left(N_ц - N_ц \left\{\frac{N}{N_ц}\right\}\right)\left[\frac{N}{N_ц}\right].$$

Отсюда получаем, что, с точностью до перестановок, оптимальный набор $\left(n_1, n_2, \dots, n_{N_ц}\right)$ удовлетворяет соотношениям:

$$n_1 = n_2 = \dots = n_{N_ц\left\{\frac{N}{N_ц}\right\}} = \left[\frac{N}{N_ц}\right] + 1; \quad n_{N_ц\left\{\frac{N}{N_ц}\right\}+1} = n_{N_ц\left\{\frac{N}{N_ц}\right\}+2} = \dots = n_{N_ц} = \left[\frac{N}{N_ц}\right].$$

В этом случае в силу (1) имеем:

$$M(X) = \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} N_ц \left(1 - (1-\omega)^{\left[\frac{N}{N_ц}\right]+1}\right) + \left(N_ц - \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} N_ц\right)\left(1 - (1-\omega)^{\left[\frac{N}{N_ц}\right]}\right).$$

Отсюда, после несложных преобразований, получим:

$$M(X) = N_ц \left(1 - (1-\omega)^{\left[\frac{N}{N_ц}\right]}\left(1 - \omega \left\{\frac{N}{N_ц}\right\}\right)\right). \tag{2}$$

Таким образом, математическое ожидание числа пораженных элементарных целей, соответствующее оптимальному распределению СП, определяется равенством (2). Из (2), в частности, вытекает, что средний относительный ущерб, наносимый групповой цели при оптимальном распределения СП по целям, равен:

$$U_{опт} = \frac{M(X)}{N_ц} = \left(1 - (1-\omega)^{\left[\frac{N}{N_ц}\right]}\left(1 - \omega \left\{\frac{N}{N_ц}\right\}\right)\right). \tag{3}$$

Замечание. Последняя формула уточняет формулу (4) работы [5], дающую представление максимального среднего ущерба групповой цели, и совпадает с последней при $\left\{\frac{N}{N_ц}\right\} = 0$. Различие между средними относительными ущербами групповой цели, найденными по формуле (3) настоящей работы и по формуле (4) работы [5], довольно ощутимо при $N < N_ц$ и значениях ω, близких к 1. Так, при $\frac{N}{N_ц} = 0{,}4$ и $\omega = 0{,}9$ средний относительный ущерб, вычисленный по формуле (3), равен $0{,}36$, а по второй формуле $\approx 0{,}6$.

При рассмотрении функции $R(x)$ нами также было установлено, что $R(x)$ достигает минимума при $x = 0$, $x = n$. Таким образом, функция $R(n_i, n - n_i)$ достигает минимума в точках $n_i = 0$, $n_i = n$, при этом $R(0, n) = R(n, 0)$. Поэтому распределению СП по целям, при котором $M(X)$ достигает минимума, отвечает с точностью до перестановок набор $(N, 0, \dots, 0)$. Для этого набора $M(X) = 1 - (1 - \omega)^N$. Средний относительный ущерб, наносимый групповой цели, при указанном распределения СП по целям равен:

$$\frac{M(X)}{N_ц} = \frac{1-(1-\omega)^N}{N_ц} \tag{4}$$

и является минимальным. Этот результат уточняет результат работы [5], согласно которому минимальное значение среднего ущерба достигается при случайном равномерном целераспределении.

Исследуем асимптотические свойства $U_{опт} = \frac{M(X)}{N_ц}$ при $\frac{N}{N_ц} \to \alpha$, $N_ц \to \infty$.

Пусть $\{\alpha\} > 0$, тогда $\left[\frac{N}{N_ц}\right] \to [\alpha]$, $\left\{\frac{N}{N_ц}\right\} \to \{\alpha\}$. Из формулы (2) в этом случае получаем, что:

$$\lim_{\frac{N}{N_ц} \to \alpha} \frac{M(X)}{N_ц} = 1 - (1-\omega)^{[\alpha]}(1 - \omega\{\alpha\}). \tag{5}$$

Пусть α – целое положительное число, так что $\{\alpha\} = 0$. Рассмотрим два случая:

$$\left[\frac{N}{N_ц}\right] \to \alpha, \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} \to 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{N}{N_ц}\right] \to \alpha - 1, \left\{\frac{N}{N_ц}\right\} \to 1.$$

В обоих случаях формула (5) остается справедливой, а, следовательно, остается справедливой и при произвольном стремлении $\frac{N}{N_ц}$ к α. В случае $\alpha = 0$ формула (5) легко проверяется. Таким образом, формула (5) оказывается справедливой при любых значениях $\alpha \geq 0$.

Обозначим правую часть равенства (5) через $F(\omega, \alpha)$. При фиксированном ω функция $F(\omega, \alpha)$ представляет непрерывную, кусочно-линейную функцию, асимптотически стремящуюся к единице (при $\alpha \to \infty$). На каждом участке $(k, k+1)$ (k – целое неотрицательное число) функция $F(\omega, \alpha)$ линейна и тангенс ее угла наклона равен $\omega(1-\omega)^k$, наибольшая скорость роста этой функции равна ω и достигается на участке $(0,1)$.

Построим график функции $F(\omega, \alpha) = 1 - (1-\omega)^{[\alpha]}(1 - \omega\{\alpha\})$ (см. рисунок 1) для различных значений ω (например, $\omega = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$).

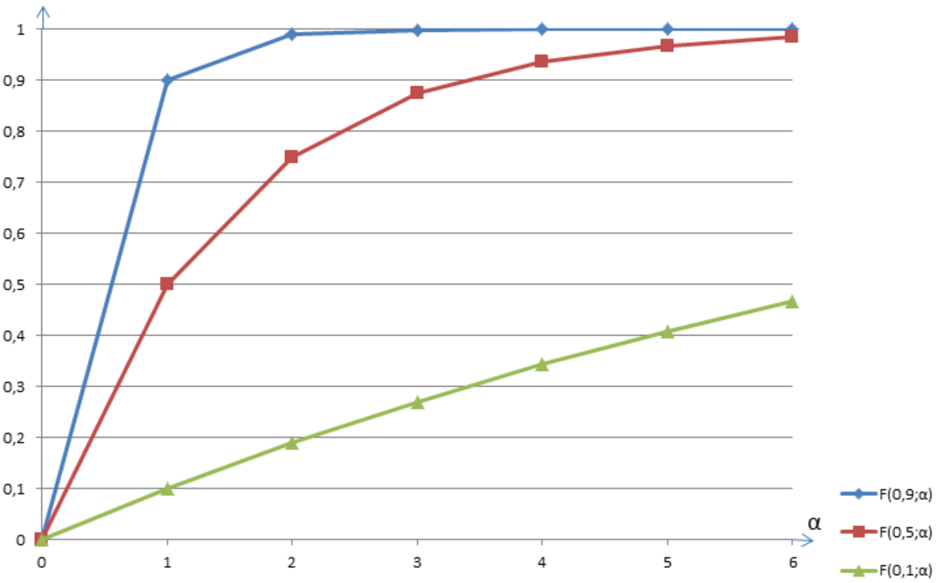

Рисунок 1 – Графики функций $F(\omega, \alpha)$

Список использованных источников

1. Колмогоров А.Н. Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1945. Т.12. – С. 7-25.
2. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
3. Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М.: Советское радио, 1968. – 464 с.
4. Мильграм Ю.Г., Попов И.С. Боевая эффективность авиационной техники и исследование операций. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1970. – 500 с.
5. Буравлев А.И. Об оценке влияния системы управления огнем на эффективность поражения целей // Вооружение и экономика. 2012. №1(17). – С. 25-29.