*Буравлев А.И.*
*Доктор технических наук, профессор*

## Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сторон

*Предложен методический подход к агрегированию моделей боевых действий группировок, основанный на получении дифференциального уравнения для количественного соотношения сил, позволяющий в значительной степени сократить размерность исходной задачи и трудозатраты на моделирование для оперативной оценки боевых возможностей группировок.*

**Введение.** Моделирование военных действий является основным инструментом решения задач, связанных с военным строительством, планированием применения вооруженных сил, оценкой эффективности образцов вооружения и военной техники. Для этих целей применяются крупномасштабные информационно-моделирующие системы и комплексы «Спектр», «Арбат-НВ-Центр» и др., использующие метод имитационного моделирования процессов вооруженной борьбы. Вместе с тем, определенный интерес представляют аналитические модели типа Осипова-Ланчестера, позволяющие осуществлять качественный анализ процессов вооруженной борьбы, выявлять критические соотношения параметров противоборствующих сторон, определяющих конечный результат противоборства, с целью выработки оперативно-стратегических решений [1]. Развитию аналитических моделей Осипова-Ланчестера, или моделей динамики «средних», посвящен ряд работ, выполненных в последнее время [2, 3, 4].

В данной работе рассматривается агрегированная модель динамики противоборства, основанная на дифференциальном уравнении Риккати для количественного соотношения сил противоборствующих группировок.

### 1. Постановка задачи и ее решение для однородных группировок

Рассмотрим простейшую систему дифференциальных уравнений Ланчестера – Осипова для средних численностей противоборствующих однородных группировок без учета их восстановления:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda_2 m_2; \quad \frac{dm_2}{dt} = -\lambda_1 m_1; \qquad (1)$$
$$m_1(0) = N_1; \quad m_2(0) = N_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2$ – постоянные интенсивности поражающих действий сторон;

$N_1, N_2$ – начальные численности сторон.

Интегрирование данной системы позволяет найти текущие значения средних численностей противоборствующих сторон $m_1(t), m_2(t)$ и по ним рассчитать показатель $K(t) = \frac{m_1(t)}{m_2(t)}$, характеризующий количественное соотношение сил (КСС) сторон в ходе боевых действий. Данный показатель определяет оперативно-тактический результат противоборства сторон (победа или поражение) на текущий момент боевых действий. Так, например, соотношение $K(t) \geq 3$ характеризует полный разгром противостоящей группировки; при соотношении $K(t) \geq 2$ достигается невозможность ведения второй стороной наступательных действий; при соотношении $K(t) > 1$ обеспечивается численное превосходство первой стороны. Таким образом, показатель $K(t)$ однозначно характеризует как текущее состояние группировок, так и финальный результат боевых действий.

Поставим задачу найти дифференциальное уравнение, описывающее динамику количественного соотношения группировок $K(t)$ без непосредственного интегрирования исходной системы уравнений (1).

Продифференцируем показатель $K(t)$ по времени и подставим в полученное выражение уравнения (1):

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\frac{dm_1}{dt} m_2 - m_1 \frac{dm_2}{dt}}{m_2^2}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение Риккати I типа для показателя $K(t)$:

$$\frac{dK}{dt} = \lambda_1 K^2 - \lambda_2 ;\ K(0) = \frac{N_1}{N_2} . \qquad (2)$$

Заменой переменной $U = \frac{1}{K - \alpha}$, где $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, уравнение Риккати приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dU}{dt} = -2\bar{\lambda} U - \lambda_1 ;\ U(0) = \frac{1}{K(0) - \alpha} .$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$U(t) = \left( \frac{1}{K(0) - \alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right) \exp\left(-2\bar{\lambda} t\right) - \frac{1}{2\alpha} . \qquad (3)$$

Применяя обратное преобразование переменных, получаем выражение для показателя $K(t)$:

$$K(t) = \alpha + \frac{1}{U(t)} . \qquad (4)$$

Из выражений (3), (4) видно, что допустимым решением для исходной системы уравнений (1) будут только неотрицательные значения показателя $K(t)$. Из условия $K(t) \geq 0$ находим правую границу области существования решения уравнения Риккати (2):

$$t^* \leq -\frac{\ln \left| \frac{K(0) - \alpha}{K(0) + \alpha} \right|}{2\bar{\lambda}} . \qquad (5)$$

В зависимости от соотношения параметров модели $K(0)$ и $\alpha$ количественное соотношение сил $K(t)$ имеет различный характер зависимости во времени. При $K(0) > \alpha$ количественное соотношение сил $K(t)$ монотонно возрастает при $t \to t^*$. В точке $t \to t^*$ функция $K(t)$ претерпевает разрыв второго рода с изменением знака. Далее при возрастании $t$ функция $K(t)$ увеличивается и при $t \to \infty$ стремится к величине $K(\infty) = -\alpha$ (рисунок 1).

При $K(0) \leq \alpha$ функция $K(t)$ монотонно убывает, в точке $t = t^*$ обращается в нуль и далее при $t \to \infty$ стремится к стационарному значению $K(\infty) = -\alpha$ (рисунок 2).

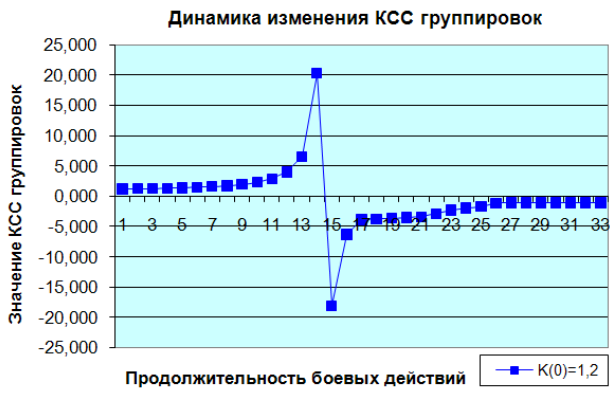


Рисунок 1

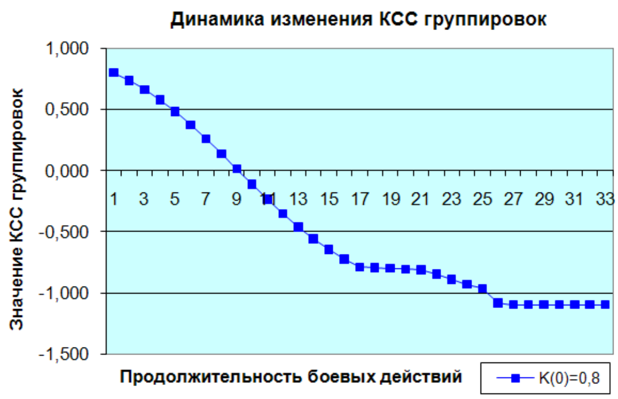


Рисунок 2

Временной интервал $[0, t^*)$ является областью допустимых решений уравнения Риккати для количественного соотношения численностей противоборствующих группировок.

Таким образом, с помощью уравнения для количественного соотношения сил сторон, мы осуществили агрегирование исходной системы дифференциальных уравнений для средних численностей сторон и тем самым сократили размерность исходной модели.

Возникает вопрос, возможно ли получение такого же агрегированного уравнения для неоднородных группировок? Ответ может быть положительным, если для неоднородных группировок ввести коэффициенты соизмеримости между различными боевыми средствами.

**2. Агрегированная модель противоборства для неоднородных группировок**

В работе [2] агрегирование модели Осипова-Ланчестера для неоднородных группировок осуществляется путем определения их обобщенных «эффективностных» потенциалов, представляющих собой скалярное произведение собственных векторов матриц интенсивностей и векторов численностей группировок. В этом случае «эффективностный» потенциал представляет собой средневзвешенную численность группировок сторон, где весовыми коэффициентами выступают нормированные соотношения интенсивностей поражающего действия неоднородных сил сторон. Чем больше интенсивность поражающего действия боевого средства, тем больший вес оно получает в «эффективностном» потенциале группировки. Однако нахождение собственных значений и векторов для матриц интенсивностей большой размерности сопряжено с определенными вычислительными трудностями. Этих трудностей можно избежать, если ввести коэффициенты соизмеримости разнородных сил группировок, учитывающие, в том числе, и соотношения между интенсивностями их поражающего действия.

Эти коэффициенты соизмеримости можно определить с помощью экспертов, либо оценить их по степени значимости (опасности) для противоборствующей стороны по соотношению средних интенсивностей поражающего действия.

Пусть для противоборствующих группировок известны матрицы интенсивностей поражающего воздействия $\left\|\lambda_{ij}^{(1)}\right\|_{n\times l}$, $\left\|\lambda_{ji}^{(2)}\right\|_{l\times n}$ их боевых средств и матрицы их целераспределения $\left\|\gamma_{ij}^{(1)}\right\|_{n\times l}$, $\left\|\gamma_{ji}^{(2)}\right\|_{l\times n}$. Для каждого боевого средства определим среднее значение интенсивности поражения объектов противоположной стороны с учетом целераспределения:

$$\bar{\lambda}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{l} \gamma_{ij}^{(1)} \lambda_{ij}^{(1)},\ (i=\overline{1,n});$$

$$\bar{\lambda}_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{(2)} \lambda_{ji}^{(2)},\ (j=\overline{1,l}).$$

Далее определим нормированные коэффициенты значимости боевых средств для каждой стороны $\beta_i^{(1)} \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^{(1)} = 1$; $\beta_j^{(2)} \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j^{(2)} = 1$, пропорционально отношению их средних интенсивностей:

$$\frac{\beta_i^{(1)}}{\beta_s^{(1)}} = \frac{\bar{\lambda}_i^{(1)}}{\bar{\lambda}_s^{(1)}};\ \frac{\beta_j^{(2)}}{\beta_k^{(2)}} = \frac{\bar{\lambda}_j^{(2)}}{\bar{\lambda}_k^{(2)}}.$$

Отсюда, с учетом нормировки, получаем значения коэффициентов:

$$\beta_i^{(1)} = \frac{\bar{\lambda}_i^{(1)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i^{(1)}};\ (i=\overline{1,n});$$

$$\beta_j^{(2)} = \frac{\bar{\lambda}_i^{(2)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i^{(2)}};\ (j=\overline{1,l}).$$

С помощью коэффициентов значимости можно определить коэффициенты соизмеримости различных боевых средств. Для этого выбирается «эталонный» образец с коэффициентом значимости $\beta_э$ и относительно этого образца рассчитываются коэффициенты соизмеримости остальных боевых средств $k_i = \dfrac{\beta_i}{\beta_э}$. Для эталонного образца $k_э = 1$. Если в составе оперирующей группировки имеется $n$ различных типов боевых средств с численностью $m_i$ $(i=\overline{1,n})$ каждого типа, то с помощью коэффициентов соизмеримости $k_i$ можно рассчитать численность, «приведенную» к однородной группировке, с учетом значимости ее боевых средств:

$$m = \sum_{i=1}^{n} k_i m_i.$$

Эту операцию приведения к однородной группировке используем для получения дифференциального уравнения для количественного соотношения неоднородных группировок. Рассмотрим систему уравнений динамики противоборства неоднородных группировок:

$$\begin{gathered}\frac{dm_i^{(1)}}{dt} = -\sum_{j=1}^{l} \Lambda_{ji}^{(2)} m_j^{(2)};\\ m_i^{(1)}(0) = N_i^{(1)},\ (i=\overline{1,n});\\ \frac{dm_j^{(2)}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{ij}^{(1)} m_i^{(1)};\end{gathered} \qquad (6)$$

$$m_j^{(2)}(0) = N_j^{(2)},\ (j = \overline{1,l}).$$

Здесь $\Lambda_{ij}^{(1)} = \gamma_{ij}^{(1)}\lambda_{ij}^{(1)}$; $\Lambda_{ji}^{(2)} = \gamma_{ji}^{(2)}\lambda_{ji}^{(2)}$ – интенсивности поражающих действий боевых средств сторон с учетом их вероятностного целераспределения $\gamma_{ij}^{(1)} \ge 0$; $\sum_{j=1}^{l}\gamma_{ij}^{(1)} = 1$; $\gamma_{ji}^{(2)} \ge 0$; $\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}^{(2)} = 1$; $N_i^{(1)}$, $N_j^{(2)}$ – начальные численности различных боевых средств сторон.

Систему уравнений (6) преобразуем в систему уравнений для приведенной численности сторон:

$$\frac{dm^{(1)}}{dt} = -\Lambda^{(2)}m^{(2)};\ m^{(1)}(0) = N^{(1)};$$
$$\frac{dm^{(2)}}{dt} = -\Lambda^{(1)}m^{(1)};\ m^{(2)}(0) = N^{(2)}, \qquad (7)$$

где $m^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}k_i^{(1)}m_i^{(1)}$; $m^{(2)} = \sum_{j=1}^{l}k_j^{(2)}m_j^{(2)}$ – приведенные текущие численности сторон;

$N^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}k_i^{(1)}N_i^{(1)}$ ; $N^{(2)} = \sum_{j=1}^{l}k_j^{(2)}N_j^{(1)}$ – приведенные начальные численности сторон;

$\Lambda^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}k_i^{(1)}\Lambda_i^{(2)}$; $\Lambda^{(2)} = \sum_{j=1}^{l}k_j^{(2)}\Lambda_j^{(1)}$ – приведенные обобщенные интенсивности поражения боевых средств сторон;

$\Lambda_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{l}\frac{\Lambda_{ji}^{(2)}\delta_j^{(2)}}{k_j^{(2)}}$; $\Lambda_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Lambda_{ij}^{(1)}\delta_i^{(1)}}{k_i^{(1)}}$ – приведенные интенсивности поражения конкретных типов боевых средств сторон;

$\delta_i^{(1)} = \frac{k_i^{(1)}m_i^{(1)}}{m^{(1)}}$; $\delta_j^{(2)} = \frac{k_j^{(2)}m_j^{(2)}}{m^{(2)}}$ – доли боевых средств определенного типа в составе приведенных группировок;

$k_i^{(1)}$, $k_j^{(2)}$ – коэффициенты соизмеримости боевых средств сторон.

Для системы уравнений (7) по аналогии с однородными группировками можно получить дифференциальное уравнение их количественного соотношения $K(t)$ и соответствующее аналитическое решение. Параметрами агрегированной модели выступают соотношение начальных численностей группировок $K(0) = \frac{N^{(1)}}{N^{(2)}}$ и соотношения приведенных интенсивностей поражающих воздействий $\alpha = \sqrt{\frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(1)}}}$; $\overline{\Lambda} = \sqrt{\Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)}}$.

**Пример.** Рассматриваются боевые действия сторон, состав и боевые возможности которых представлены в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

| **Номенклатура боевых средств** | **Сторона 1** | | | **Сторона 2** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Начальная численность** | **Значимость боевых средств** | **Коэфф. соизмеримости** | **Начальная численность** | **Значимость боевых средств** | **Коэфф. соизмеримости** |
| Тип 1 | 120 | 0,22 | 1 | 100 | 0,24 | 1 |
| Тип 2 | 30 | 0,36 | 1,60 | 20 | 0,31 | 1,30 |
| Тип 3 | 10 | 0,42 | 1,88 | 30 | 0,45 | 1,50 |

Таблица 2

| **Матрица интенсивностей поражения Стороны 1** | | | |
|---|---|---|---|
| | Тип 1 | Тип 2 | Тип 3 |
| Тип 1 | 0,01 | 0,015 | 0 |
| Тип 2 | 0,02 | 0,01 | 0,03 |
| Тип 3 | 0 | 0,02 | 0,025 |
| **Матрица целераспределения Стороны 1** | | | |
| | Тип 1 | Тип 2 | Тип 3 |
| Тип 1 | 0,5 | 0,5 | 0 |
| Тип 2 | 0,2 | 0,4 | 0,4 |
| Тип 3 | 0 | 0,3 | 0,7 |

Таблица 3

| **Матрица интенсивностей поражения Стороны 2** | | | |
|---|---|---|---|
| | Тип 1 | Тип 2 | Тип 3 |
| Тип 1 | 0,015 | 0,015 | 0 |
| Тип 2 | 0,025 | 0,01 | 0,02 |
| Тип 3 | 0 | 0,015 | 0,03 |
| **Матрица целераспределения Стороны 2** | | | |
| | Тип 1 | Тип 2 | Тип 3 |
| Тип 1 | 0,3 | 0,7 | 0 |
| Тип 2 | 0,3 | 0,2 | 0,5 |
| Тип 3 | 0 | 0,5 | 0,5 |

По данным таблиц 2, 3 для боевых средств каждой стороны рассчитаны коэффициент их значимости и обобщенные характеристики противоборствующих сторон:

$K(0)=1{,}09$; $\alpha=0{,}91$; $\overline{\Lambda}=0{,}08$.

Предельная продолжительность боевых действий составляет $t^{*}=14{,}9$ ед.

На рисунке 3 показан график зависимости КСС от времени, из которого видно, что при данных условиях Сторона 1 однозначно одерживает победу над противником.

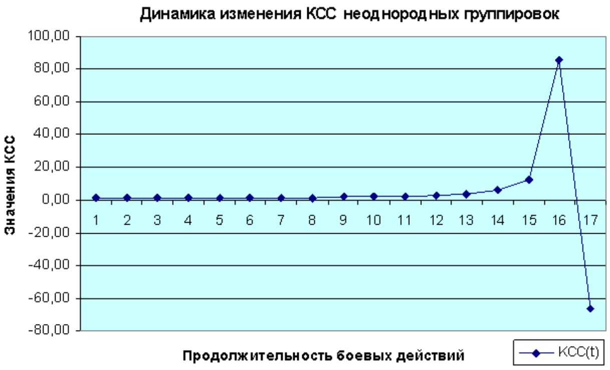


Рисунок 3

Рассмотренный подход к агрегированию моделей боевых действий группировок позволяет в значительной степени сократить размерность исходной задачи и трудозатраты на моделирование для оперативной оценки боевых возможностей группировок.

**Список использованных источников**

1 Ахметов Д.Е., Беломытцев А.В., Васкецов С.Л. О роли упрощенных оптимизационных моделей // Военная мысль, 2008, №1, с. 57-61.

2 Морозов Н.А. Теоретические основы качественного анализа больших военных систем. Монография.- М.: Министерство обороны, 2003.

3 Горевич Б.Н. Выработка способа противовоздушной обороны объекта на основе комплексного использования разнотипных математических моделей боевых действий // Военная мысль, 2008, №9, с. 60-66.

4 Буравлев А.И., Гордеев В.С. Модель динамики противоборства неоднородных группировок сил // Вооружение и экономика, 2009, № 5.