

Касаткин С.А.

Кандидат технических наук

Идентификация временных рядов курса валют методами нелинейной динамики

Обоснована методическая последовательность идентификации временных рядов курса валют методами нелинейной динамики. Проведено тестирование временного ряда курса валюты евро на нелинейность.

Обоснование методической последовательности идентификации временных рядов курса валют методами нелинейной динамики

Сложной экономической задачей, имеющей большое практическое значение, является идентификация временных рядов курса валют методами нелинейной динамики. Её решение сталкивается с рядом принципиальных проблем. Одна из них возникает вследствие того, что временные ряды являются отражением реальной экономической системы, математическая модель которой априорно неизвестна и при этом неизвестна размерность ее фазового пространства (количество переменных или независимых координат состояния системы).

Возникает неопределенность в выборе математического объекта, соответствующего исследуемому временному ряду. В течение длительного времени в силу этой неопределенности к анализу временных рядов подходили с позиций методов математической статистики, имеющих определенные ограничения, а именно:

- достоверность применяемых статистических методов задается исследователем с помощью доверительной вероятности перед началом обработки временного ряда;
- большинство статистических методов не позволяют учитывать некоторые закономерности, присущие временному ряду, и в условиях структурной неоднородности временного ряда оказываются просто неэффективными.

Поэтому почти единственной возможностью решения этой задачи является применение методов нелинейной динамики, суть которых:

- предложить новые подходы к исследованию временных рядов и новые показатели, используемые для их идентификации;

- концептуально обосновать практические методики, предложенные математической статистикой, и их дополнение;
- оценить временной ряд, понимание его структуры и степени сложности.

В настоящее время методы нелинейной динамики базируются на фундаментальной математической теории, в основе которой лежит теорема Такенса, которая подводит строгую математическую основу под идеи нелинейной авторегрессии и доказывает возможность восстановления фазового портрета аттрактора по временному ряду или по одной его координате. Под аттрактором понимают множество точек или подпространство в фазовом пространстве, к которому приближается фазовая траектория после затухания переходных процессов [1, 2].

Для этого исследуемый временной ряд X_n, \dots, X_{n-1} подвергается методу задержки координат, т.е. в фазовом пространстве строится последовательность реконструированных векторов, получаемых из элементов временного ряда

$$Y_n = (X_n, X_{n+\tau}, \dots, X_{n+(m-1)\tau}), \quad (1)$$

где: $n = 0, \dots, s-1$;

$$s = N - (m-1)\tau;$$

τ – задержка по времени между элементами временного ряда или лаг в m - мерном фазовом пространстве;

N – общее число элементов (точек) временного ряда.

Терминологическая неопределенность нелинейной динамики привела к тому, что даже ведущие в этой области знаний специалисты иногда используют один и тот же термин почти в противоположных смыслах. Поэтому в настоящем исследовании под



терминами нелинейной динамики будем понимать следующее [3].

Пространство, задаваемое для восстановления исходного аттрактора по временному ряду методом задержки координат, будем называть пространством вложения или лаговым пространством. Множество точек, моделирующее исходный аттрактор, – восстановленным аттрактором, а проекцию восстановленного аттрактора на картинную плоскость – реконструкцией.

Нелинейная динамика вводит новое понятие, используемое при исследовании временных рядов, – хаотический или содержащий в себе детерминированный хаос. С точки зрения линейных методов анализа такие временные ряды являются стохастическими. В нелинейном анализе их нельзя причислить к детерминированным, хотя абсолютно случайными они тоже не являются. Следовательно, хаотический процесс представляет собой нечто среднее между детерминированным процессом и стохастическим. Другими словами, предсказание по такому временному ряду с заданной точностью возможно, но лишь на ограниченное число шагов.

Малочисленность временных рядов, для которых методы нелинейной динамики могли бы быть эффективно использованы, накладывает отпечаток на особенности использования алгоритмов нелинейной динамики для их исследования:

- нельзя ограничиваться использованием какого-либо одного алгоритма нелинейной динамики, необходимо согласованное использование нескольких алгоритмов, что позволяет проверить выполнение используемых предположений и оценить достоверность результатов;
- необходимо применять предостерегающие тесты, оценки, алгоритмы и исследовать зависимость результата от параметров используемого метода;
- осуществлять поиск наиболее информативных характеристик ряда и использовать алгоритмы с наименьшим искажением информации, требующие минимума постулируемых гипотез и переносящие возникшие проблемы с этапа обработки данных на этап интерпретации [4].

Удовлетворить таким требованиям довольно сложно. Поэтому среди десятков методик и алгоритмов, предложенных в 80...90-х годах прошлого столетия, до настоящего времени выжили очень немногие. Методическая последовательность идентификации временных рядов на основе применения методов нелинейной динамики определяется целью анализа и характером анализируемых данных (рисунок 1).

Рекуррентный анализ

Нелинейная динамика предлагает достаточно широкий спектр методов расчета различных динамических параметров ряда, например, таких, как корреляционная размерность, энтропия, показатели Ляпунова и др. Как правило, эти методы помогают оценить, насколько временной ряд близок к детерминированному процессу или шуму. Однако все они накладывают существенные ограничения на исходные данные. В 1987 г. Экманом, Кампхорстом и Рюэллем были разработаны так называемые рекуррентные графики, которые позволили избежать серьезности накладываемых ограничений и дали возможность работать практически с любыми временными рядами [5].

Преимущество графического инструментария состояло еще и в том, что он позволил исследовать m -размерную траекторию лагового пространства посредством двухмерного представления ее рекуррентности (повторяемости траекторий по прошествии некоторого времени) и, следовательно, дал возможность увидеть динамическую картину в целом. Тем не менее, данный инструмент являлся и до настоящего времени является только графическим и не позволяет получать никаких количественных оценок.

На начальном этапе исследования временного ряда, еще до его преобразования, рекуррентный анализ позволяет идентифицировать и вскрыть динамику ряда. Полученная в результате этого информация используется как подсказка при принятии решения на преобразование временного ряда по той или иной причине. Обычно рекуррентный график изображается в виде двумерной квадратной или треугольной (т.к. обе стороны от главной диагонали являются симметричными) матрицы, заполненной нулями или единицами [6].



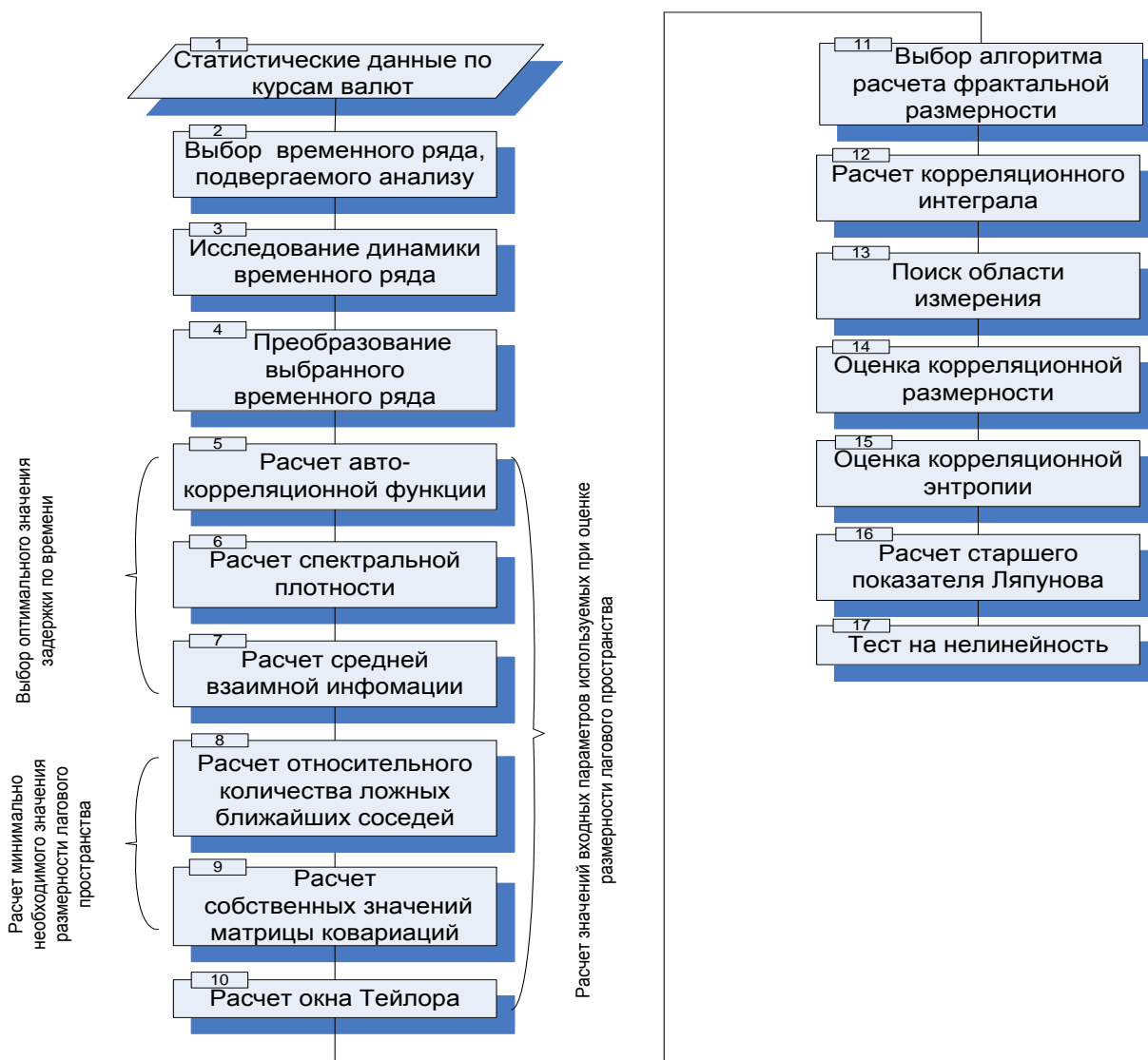


Рисунок 1 – Методическая последовательность идентификации временных рядов курса валют методами нелинейной динамики

$$R_{ij} = \Theta(\varepsilon_i - \|x_i - x_j\|), \quad (2)$$

где: $i, j = 1, \dots, N$;

N – число рассматриваемых состояний x_i ;

ε_i – граничное расстояние или расстояние от центра выбранной окрестности;

$\|\bullet\|$ – норма;

$\Theta(\bullet)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Если состояние временного ряда в момент времени i рекуррентно другому его состоянию в момент времени j , то значение элемента матрицы с координатами (i, j) равно единице, в противном случае – нулю. Графически единицы представлены черными точками, а нули – белыми (рисунок 2). Главная диагональ (под углом $\pi/4$) называется линией тождественности.

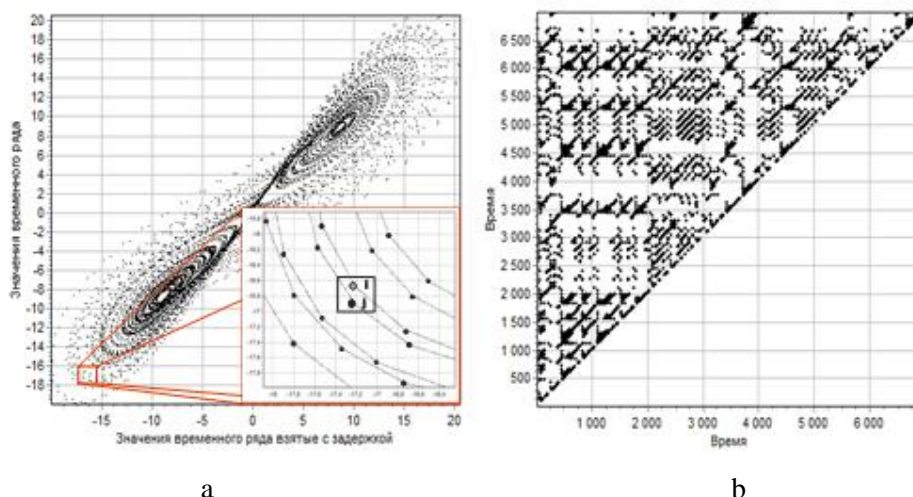


Рисунок 2 – Иллюстрация применения рекуррентного аппарата

а – сегмент реконструкции временного ряда, содержащего аттрактор Лоренца;

б – рекуррентный график данного временного ряда. Если точка траектории в момент времени j (большая черная точка сегмента реконструкции) попадает в окрестность некой другой в момент i (серая точка), то такие точки считаются рекуррентными и на рекуррентном графике появляется точка черного цвета с координатами (i, j) . Если же точка сегмента реконструкции располагается вне выбранной окрестности (белая точка), то и на рекуррентном графике появляется точка белого цвета

Следует подчеркнуть, что отдельные точки не несут никакой информации о текущих состояниях в моменты i и j , однако, в совокупности позволяют реконструировать свойства исследуемого временного ряда. Значение граничного расстояния ε_i следует

выбирать не более 10% от максимального значения диаметра восстановленного аттрактора. Однако на практике, в условиях присутствия шумовой компоненты, приходится либо увеличивать, либо уменьшать пороговое значение граничного расстояния. Постепенное увеличение граничного расстояния приводит к увеличению числа рекуррентных точек на поверхности полотна графика. В зависимости выбора нормы будут различаться формы окрестности (рисунок 3) [7, 8].

При построении рекуррентного графика с фиксированным значением r , в окрестность с L_3 – нормой может попасть наибольшее количество близлежащих траекторий реконструкции по сравнению с L_1 - L_2 - нормами, а при выборе L_2 - нормы, наоборот – меньшее. Выбор нормы зависит от структуры исследуемого временного ряда, а также от целей, которые исследователь преследует в своей

работе. В частности, L_3 - норма не зависит от размерности лагового пространства и легка в вычислении. L_1 - норма обеспечивает наиболее устойчивую рекуррентность состояний, поскольку, если траектории реконструкции рекуррентны для L_1 - нормы, то они будут рекуррентны и при использовании двух других норм [7, 9].

Главнейшим преимуществом рекуррентного анализа является способность визуализировать многомерные траектории лагового пространства, даже в случае коротких и нестационарных временных рядов, позволяющая проследить эволюцию исследуемого временного ряда во времени. В работе были выделены два основных класса геометрических структур – топология и текстура. Топология соответствует крупномасштабным структурам на графиках и подразделяется на подвиды [5]:

1 Однородная топология (рисунок 4) характерна для случайных временных рядов, характеристические времена (времена релаксации) которых малы в отношении длины ряда (т.е. по сравнению с интервалом времени, задействованным в построении рекуррентного графика).

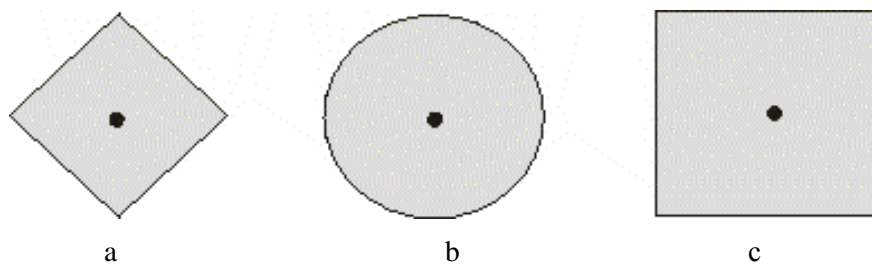


Рисунок 3 – Три типа нормы
 а – L1-норма,
 б – L2-норма (евклидова),
 с – L3-норма (максимальная норма)

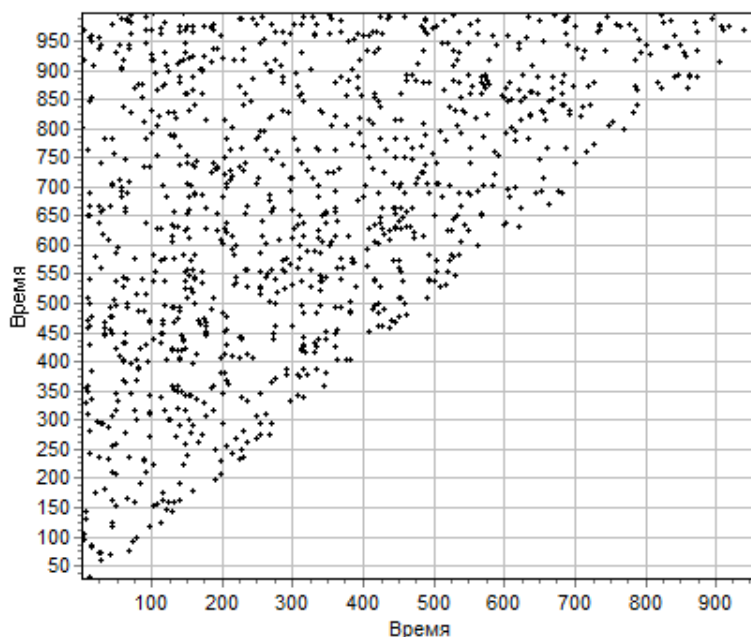


Рисунок 4 – Структура рекуррентности модельного временного ряда белого шума

2 Периодическая топология (рисунок 5) отображается на рекуррентном графике через диагонально ориентированные структуры – диагональные линии и структуры.

3 Контрастная топология (рисунок 6) характеризуется резкими изменениями динамики процесса и нестационарностью, вследствие чего появляются характерно выраженные белые зоны в структуре рекуррентного графика.

Основываясь на частоте рекуррентностей таких экстремальных и редких событий, по

рекуррентному графику можно отследить и оценить их. Текстура характеризуется малыми масштабами и также подразделяется на подвиды:

1 Отдельные точки в структуре рекуррентного графика характеризуют редкие состояния, непродолжительно существующие во времени, или если они подвержены сильным флуктуациям. Если график полностью состоит из отдельных точек, то временной ряд является случайным (рисунок 4).

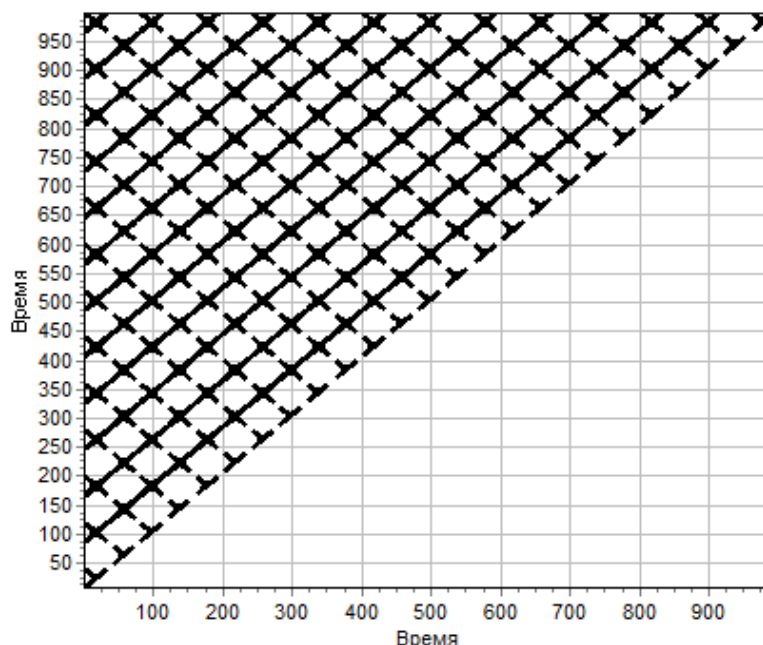


Рисунок 5 – Структура рекуррентности модельного временного ряда синусоиды

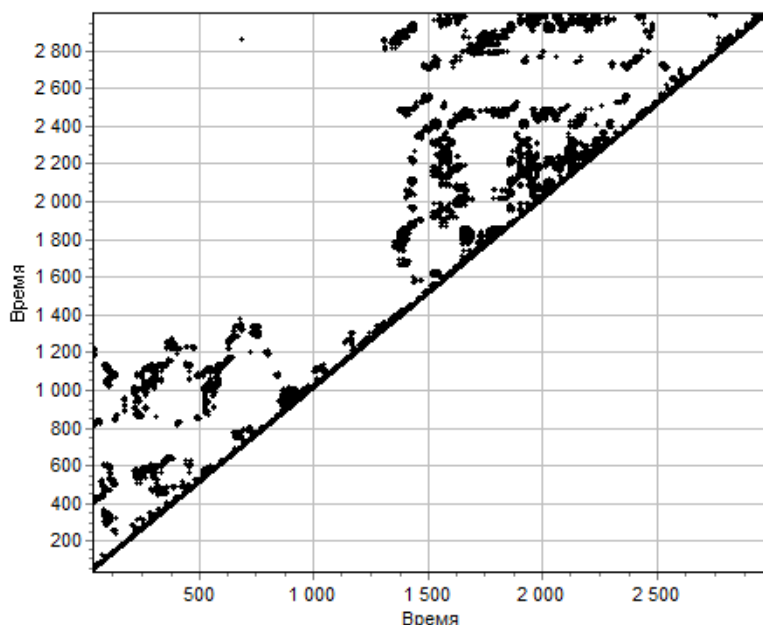


Рисунок 6 – Структура рекуррентности модельного временного ряда обобщенного броуновского движения

2 Диагональные линии. Такая текстура соответствует ситуации, когда некая часть лаговой траектории пролегает параллельно другой (повторяет саму себя в различные отрезки времени). Характер диагональной линии определяет эволюцию процесса. Так, длина ее соответствует временному масштабу локальной близости участков траектории, а наклон – временному разнесению, направлению последовательности состояний данных участков временного ряда и характеризует внутреннее время данных подпро-

цессов. Если диагональные линии параллельны главной диагонали, значит, части траектории параллельны друг другу в одинаковые отрезки внутреннего времени для двух данных частей траектории (рисунок 5). Если же они перпендикулярны главной диагонали, то направление их развития противоположно (т.е. один из подпроцессов будто отражен в зеркале). Нерегулярное проявление диагональных линий характеризует хаотический процесс (рисунок 7).

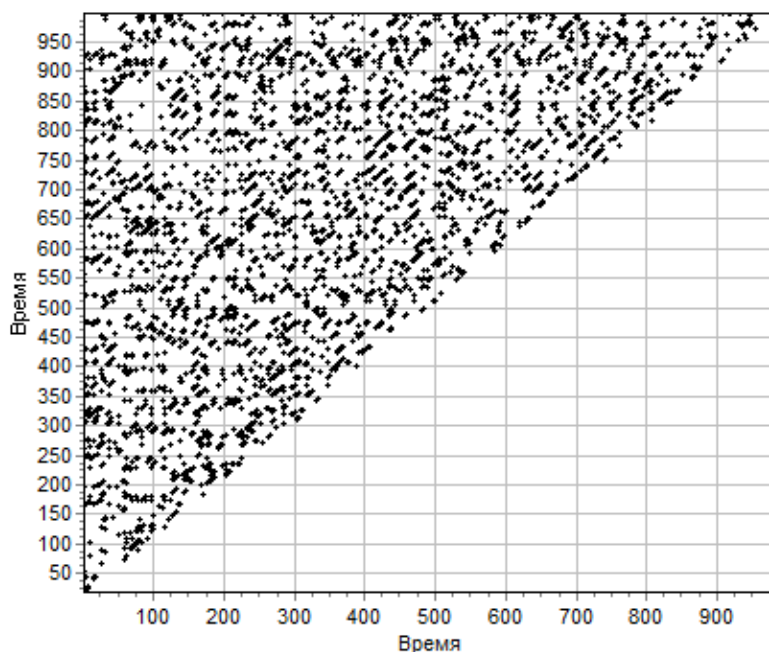


Рисунок 7 – Структура рекуррентности модельного временного ряда Хенона

Вертикальные (и горизонтальные) линии и их скопления соответствуют интервалам времени, в течение которых состояние системы не меняется или меняется, но незначительно, будто система остается замороженной на некоторое время (свойство ламинарности). Кроме того, нерегулярное появление черных зон соответствует скоплениям вертикальных и горизонтальных линий, а нали-

чие белых зон указывает на нерегулярность процесса, который может означать, например, коррелированность шумов (рисунок 6 и 8).

На рисунке 9 показана структура рекуррентности временного ряда курса валюты евро.

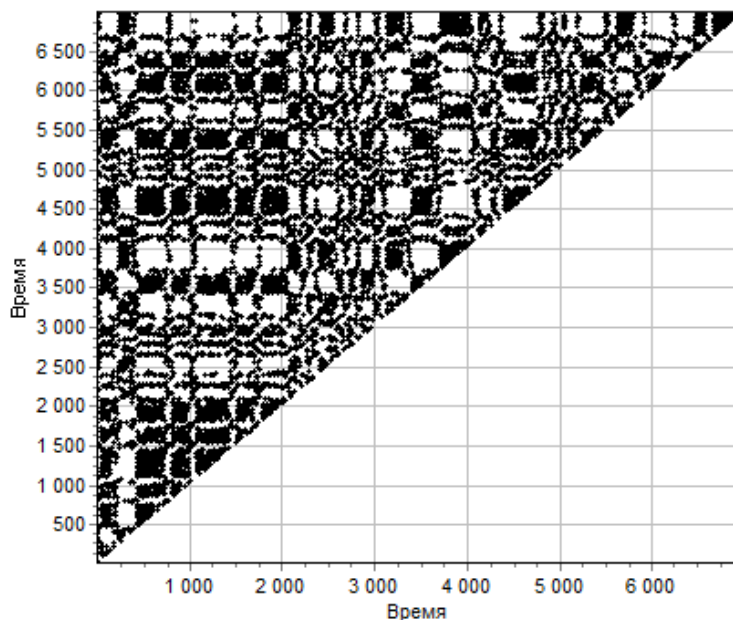


Рисунок 8 – Структура рекуррентности модельного временного ряда Лоренца с добавлением 20% гауссова шума

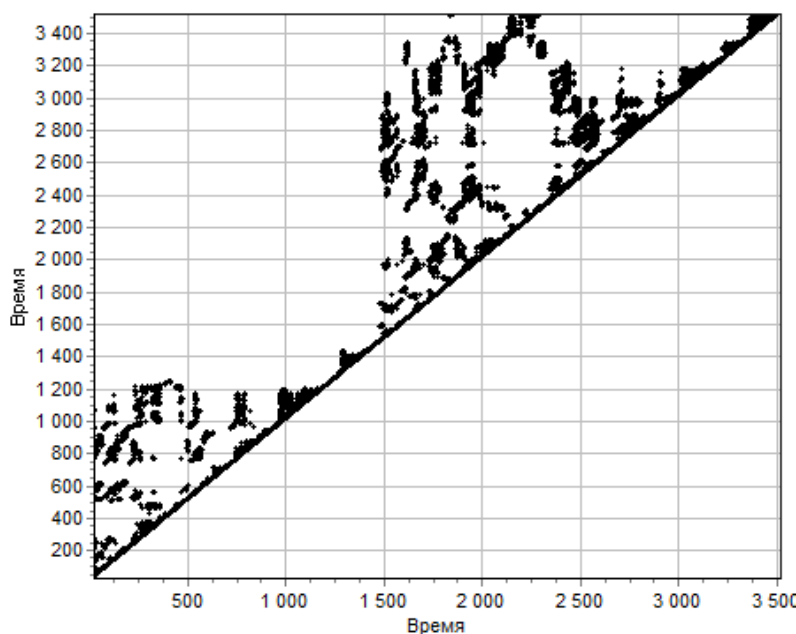


Рисунок 9 – Структура рекуррентности временного ряда евро

Видно, что динамика временного ряда евро характеризуется нетривиальной геометрической структурой, имеющей контрастную топологию, текстура которой имеет как отдельные точки и их скопления, так и диагональные, вертикальные и горизонтальные линии. Все это говорит о сложной динамике временного ряда евро и его некоторой степени схожести с модельным временным рядом обобщенного броуновского движения.

Однако, несмотря на существующую довольно четкую классификацию, во многих временных рядах экономических систем присутствует шум, зачастую столь значительный, что анализ картины рекуррентного графика иногда приводит к тупиковому эффекту. Авторы работы в этом случае предлагают постепенно увеличивать число отсчетов в исследуемых рядах в рассматриваемый промежуток времени в направлении: месячные данные \Rightarrow еженедельные данные \Rightarrow ежедневные данные с построением рекуррентных графиков, их анализом и интерпретацией. Такой механизм позволяет выявить истинную структуру рекуррентности исследуемого временного ряда, которая при зашумленности оказывается замаскированной очагами черных точек и, как следствие, принять решение на удаление из временного ряда некоторого процента шума [10].

Выбор параметров реконструкции

Практическая реализация реконструкции при всей своей простоте и достаточной изученности сталкивается с рядом серьезных проблем. Возникают они из-за того, что длина временного ряда всегда ограничена:

- возможностями хранения информации;
- скоростью обработки;
- стационарностью временного ряда.

В свете развития компьютерной индустрии первые две проблемы становятся разрешенными. Третья проблема является бичом большинства современных методов анализа временных рядов. Стационарность в нелинейной динамике несет иную смысловую нагрузку, нежели ее классические аналоги.

Под стационарностью исследуемого временного ряда в нелинейной динамике постулируется время, в течение которого показатели ряда не изменились, и исследуется один и тот же временной ряд. Так, добавление сколь угодно малого шума радикально изменяет динамику ряда на бесконечно малых временных масштабах. Поскольку временные ряды курса валют являются совокупностью уже случившихся событий, стационарность в этих рядах, как правило, соблюдается.

Объем информации, который можно извлечь из конечного множества точек временного ряда, зависит от свойств поверхности аттрактора (насколько она искривлена,



закручена и т.п.) и от свойств функции, породившей аттрактор (насколько велики ее производные). Однако в задачах реконструкции временного ряда свойства поверхности и функции аттрактора априорно неизвестны, поэтому каких-либо оценок о свойствах аттрактора сделать невозможно. Можно только разумно распорядиться несколькими параметрами, чаще всего это размерность вложения m или размерность лагового пространства и задержка по времени τ или временной лаг.

Подбор оптимальных значений параметров реконструкции является чрезвычайно важной задачей, поскольку все без исключения методы и алгоритмы нелинейной динамики имеют хотя бы один из них в качестве входного и, следовательно, результат, получаемый от использования методов и алгоритмов, также зависит от этих параметров.

Выбор значения задержки по времени

τ

Существует большое количество рекомендаций и способов выбора этого значения τ , но не существует универсальных методов по определению его оптимального значения. Вследствие этого подавляющее большинство исследователей прибегают к выбору оптимального значения τ на основе вычисления [4, 11, 12]:

- автокорреляционной функции временного ряда;
- спектра мощности временного ряда, то есть быстрого преобразования Фурье автокорреляционной функции;
- средней взаимной информации между двумя измерениями.

Однако в работе при анализе временных рядов от сложных систем показано, что оптимальное значение задержки τ можно получить с помощью метода средней взаимной информации. Воспользовавшись рекомендациями этой работы, построим зависимость средней взаимной информации от задержки

по времени τ (рисунок 10), рассчитываемой по выражению:

$$I(\tau) = -\sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}, \quad (3)$$

где $p_{ij}(\tau)$ – собственная или совместная вероятность точки P_i в фазовом пространстве и точки P_j , взятой с задержкой [10].

Из рисунка видно, что значение задержки по времени τ равно 25, поскольку при этом значении по шкале абсцисс достигается первый минимум кривой, характеризующей значения средней взаимной информации [13, 14].

Выбор минимально необходимой размерности лагового пространства

Размерность лагового пространства m временных рядов реальных систем априорно неизвестна. Для ее определения используют два способа вычисления. Первый способ позволяет определить величину m с точки зрения достаточности, посредством вычисления корреляционного интеграла. Второй позволяет определить минимально необходимую величину m посредством поиска ложных близких соседей или посредством вычисления собственных значений матрицы ковариации [4, 15, 18].

Исследования метода ложных ближайших соседей и метода главных компонент, проведенные в работе на временных рядах от сложных технических систем, показывают, что эти два метода дают примерно одинаковые оценки минимально необходимой размерности лагового пространства, причем с небольшим разбросом. Отправляясь от выводов данной работы, воспользуемся методом ложных ближайших соседей (*false nearest neighbors* или сокращенно FNN), согласно которому по уменьшению количества FNN до нуля находят минимальное значение величины m (рисунок 11) [10].



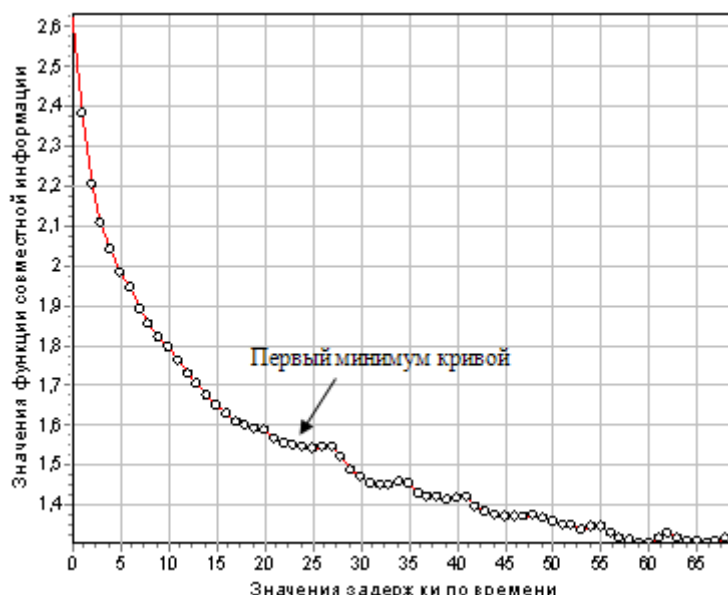


Рисунок 10 – Функция средней взаимной информации временного ряда курса валюты евро

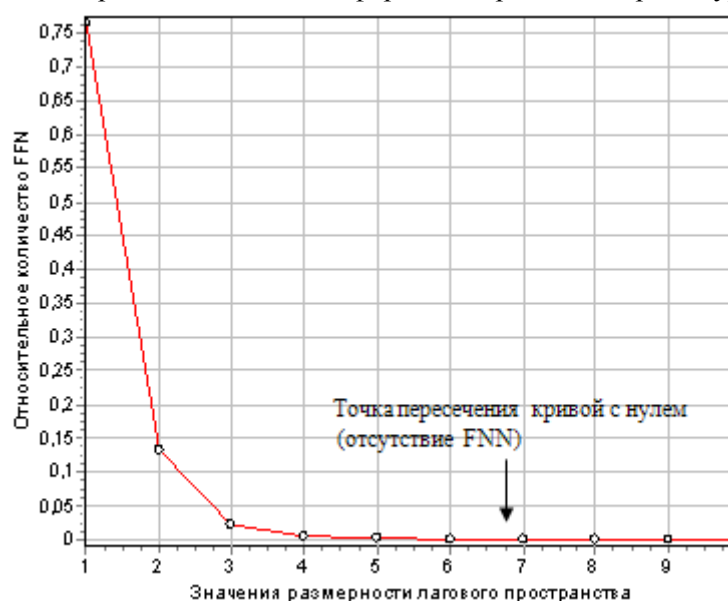


Рисунок 11 – Зависимость относительного количества ложных ближайших соседей в восстановленном аттракторе от значений размерности лагового пространства временного ряда курса валюты евро

Анализ рисунка 11 показывает, что минимально необходимое значение размерности лагового пространства временного ряда курса евро равно 7.

Оценка достаточности длины исследуемых временных рядов

Временные ряды курса валют представляют собой набор данных ограниченной длины, характеризующих возможности экономической системы. В то же время существующие теоремы, определяющие процедуры вычисления корреляционного интеграла, сформулированы и доказаны только для бесконечных последовательностей. Это ка-

сается и проблемы определения задержки по времени τ . Для разрешения этой проблемы целесообразно использовать достаточно длинные временные ряды курса валют. В этом случае можно постулировать, что они являются бесконечными. Другой путь – путь модификации классического алгоритма вычисления корреляционного интеграла.

Для первого пути существуют различные критерии, определяющие минимальную длину временного ряда, позволяющую избежать систематических ошибок при вычислении. Согласно этим критериям, временной ряд должен содержать порядка 100000 зна-



чений, а в некоторых случаях и более. Вследствие невозможности удовлетворить указанным требованиям, в процедуру вычисления необходимо вводить дополнительные модификации [17, 18].

Одна из таких модификаций называется окно Тейлера. Суть модификации заключается в следующем. Точки, расположенные в исходном временном ряду в непосредственной близости друг от друга, оказываются, как правило, коррелированными, что в случае конечности временного ряда приводит к систематическим ошибкам при вычислении корреляционного интеграла. Для этого в процессе вычисления корреляционного интеграла можно не принимать в расчет точки, расположенные в исходном временном ряду на расстоянии меньше, чем w шагов, где величина w называется окном Тейлера. Рекомендуемая $w > \tau$ минимальная величина этого окна равна [19, 20]:

$$w > \tau(2/N)^{2/m}. \quad (4)$$

Как показывают исследования, указанная рекомендуемая величина окна Тейлера может быть слишком завышенной или недостаточной. В этом случае нет гарантии, что модификация алгоритма полностью компенсирует последствия слишком малой длины исходного временного ряда [21].

Другой, более сложный способ определения оптимальных размеров окна Тейлера – построение контурной карты пространственно-временного разделения. Контурная карта представляет собой кривую, равную плотности вероятности того, что две точки временного ряда, находящиеся на расстоянии Δt , окажутся в реконструкции на расстоянии, не превышающем ε . При этом строится не одна кривая, а семейство кривых, соответствующих разным значениям плотности вероятности. Размер окна Тейлера определяется как величина Δt , при которой набор кривых становится разнесенным на некоторое расстояние друг от друга в реконструкции. На рисунке 12 построены кон-

турная карта временного ряда курса валюты евро [17, 22].

Видно, что контурная карта демонстрирует масштабную независимость в реконструкции при увеличении временного интервала Δt . Однако при значениях $\Delta t < 4$ масштаб расстояний между кривыми достаточно близкий, что говорит о близких траекториях в реконструкции или о сильной корреляции между значениями временного ряда. Отсюда значение окна Тейлера необходимо выбрать равным четырем и учитывать его при расчете корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$.

Выбор алгоритма расчета фрактальной размерности аттрактора

Аттракторы временных рядов реальных экономических систем принадлежат к классу объектов, обладающих фрактальной размерностью, то есть дробной, нецелой размерностью, в отличие от объектов, содержащих периодическую динамику и имеющих целочисленную размерность аттрактора (2.0, 3.0 ...). Размерность аттрактора является наиболее широко распространенной величиной, используемой при описании хаотической динамики временных рядов. Она характеризует сложность аттрактора или, другими словами, характеризует число степеней свободы временного ряда, т.е. позволяет определить минимальное количество динамических переменных, которое должна включать соответствующая математическая модель временного ряда, или хотя бы дать оценку этой величины (чаще всего снизу).

Размерность можно применять как к обычным евклидовым пространствам и их областям, к торам, сферам и т.д., так и к фрактальным множествам типа канторова. Важность размерности определяется тем, что она является одной из немногих характеристик, которую можно оценить по временному ряду, получая, таким образом, информативную характеристику исследуемой системы непосредственно по статистическим данным.



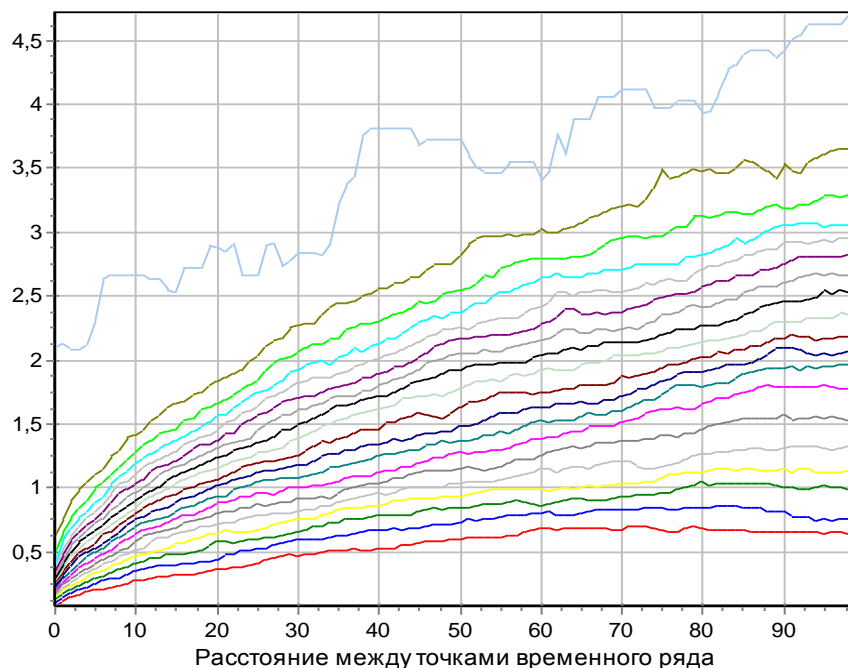


Рисунок 12 – Контурная карта пространственно-временного разделения временного ряда

Существует большое количество как самих размерностей, например, геометрические, вероятностные, динамические, так и численных методов расчета размерности аттрактора. Исторически первой была попытка определения по временному ряду емкости аттрактора D_0 . В общем виде численный алгоритм расчета D_0 предполагал, что по временному ряду построена m -мерная реконструкция и в распоряжении исследователя находится набор векторов (1). Хотя это могут быть и точки исходного фазового пространства X_n .

Реконструированное пространство, в котором находятся анализируемые вектора, разбивается на ячейки со стороной ε и подсчитывается, сколько ячеек накрывает все точки реконструкции. Вследствие этого алгоритмы такого типа получили название «подсчет ячеек» (*box counting*). Однако выяснилось, что алгоритмы подсчета ячеек обладают серьезным недостатком, а именно, в определении размерности никак не отражена оценка вклада часто посещаемых областей аттрактора. Вследствие этого алгоритмы подсчета ячеек оказались непрактичными, и внимание исследователей было обращено к вероятностным размерностям, в основе которых лежит вычисление обобщенных энтропий

$$H = \frac{1}{1-q} \log(\sum p_i^q), \quad (5)$$

где p_i – мера i -й ячейки, покрывающей аттрактор.

При $q > 1$ основной вклад в сумму, стоящую под знаком логарифма, будут давать наиболее посещаемые ячейки, на которые разбита область аттрактора, а влияние редко посещаемых ячеек аттрактором будет незначительно. Описанные выше размерности являются частными случаями так называемой генеральной размерности D_q или размерности Ренье, для определения которой аттрактор покрывается ячейками размера ε и вводится вероятность пребывания точки в i -й ячейке покрытия p_i . Для любого действительного числа q , $-\infty < q < \infty$, размерность D_q определяется как предел

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\log(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q)}{\log(\varepsilon)}. \quad (6)$$

При $q = 0$ зависимость (6) сводится к определению емкости аттрактора D_0 , а при



$q = 1$ возникает неопределенность вида $0/0$, но ее раскрытие по правилу Лопиталья приводит к определению информационной размерности D_1 . При $q = 2$ получается выражение для корреляционной размерности D_2 или корреляционного показателя, используемого для определения размерности исследуемой системы, трудно поддающейся или не поддающейся аналитическому описанию. Например, аттракторы, построенные методом задержек координат по модельным, статистическим или опытным данным

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (7)$$

где $C(\varepsilon)$ – так называемый корреляционный интеграл, определяющий относительное число пар точек аттрактора, находящихся на расстоянии, не большем ε

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - r(x_i, x_j)), \quad (8)$$

где: θ – ступенчатая функция Хевисайда;
 r – расстояние между точками аттрактора;

N – число точек x_i на аттракторе.

Алгоритм расчета по выражению (8) был предложен еще в 1983 году Грассбергером и Прокаччиа. С этого времени он остается одним из самых популярных и наиболее важных алгоритмов нелинейной динамики, используемым для анализа временных рядов. Так, для уравнений движения динамической системы таковым является расчет ляпуновских показателей [23].

Оценка корреляционной размерности аттрактора

Так как временные ряды курса валют представляют собой совокупность статистических данных, вследствие чего точно не известна размерность их лагового пространства, а известна только информация об одной координате точек на аттракторе, то расчет значений корреляционного интеграла целесообразно выполнять для нескольких размерностей лагового пространства

$m = 1, 2, 3, \dots$. На рисунке 13 показаны корреляционные суммы или зависимости значений корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$ от расстояния ε в логарифмических координатах при последовательном переборе значений размерности лагового пространства до десяти.

Анализ рисунка 13 показывает, что с увеличением значения ε величина $C(\varepsilon)$ достигает своего насыщения $C(\varepsilon) \rightarrow 1$, то есть при значениях ε , сравнимых с размером аттрактора. Видно также, что при очень малых значениях ε число пар точек x_i, x_j , расстояние между которыми не превышает ε , становится малым, в основном, из-за конечного числа точек на аттракторе. В этом случае статистика становится бедной и недостаточной.

Оставшаяся область является рабочей и используется для оценки корреляционной размерности. Область аппроксимируется прямыми линиями, рассчитанными с помощью метода наименьших квадратов, угловый коэффициент которых дает оценку корреляционной размерности. В идеальном случае, например, при исследовании временного ряда, содержащего аттрактор Лоренца, рабочая область должна быть прямой линией. Однако на рисунке 13 рабочая область далека от этого. Поэтому оценка корреляционной размерности становится проблематичной на всем протяжении рабочей области, и она может быть оценена только в определенном интервале масштабов, в котором наблюдаются линейные участки.

Для идентификации таких линейных участков обычно используют график Раппа (рисунок 14), характеризующий зависимость локальных (мгновенных) тангенсов углов наклона корреляционного интеграла от расстояния ε в логарифмическом масштабе, рассчитанных по выражению

$$D_2 = \frac{\ln C(\varepsilon_k) - \ln C(\varepsilon_{k-1})}{\ln \varepsilon_k - \ln \varepsilon_{k-1}}, \quad \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{\max} - 1. \quad (9)$$

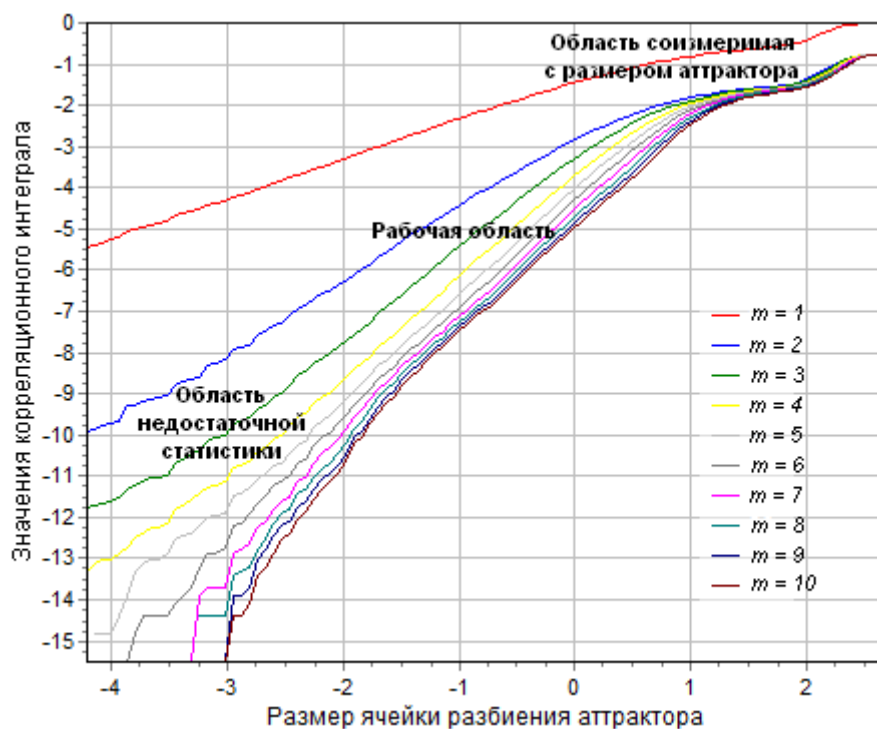


Рисунок 13 – Корреляционные суммы или зависимости значений корреляционного интеграла $C(\epsilon)$ от расстояния ϵ при значениях размерности лагового пространства m от единицы до десяти, построенные по временному ряду курса валюты евро

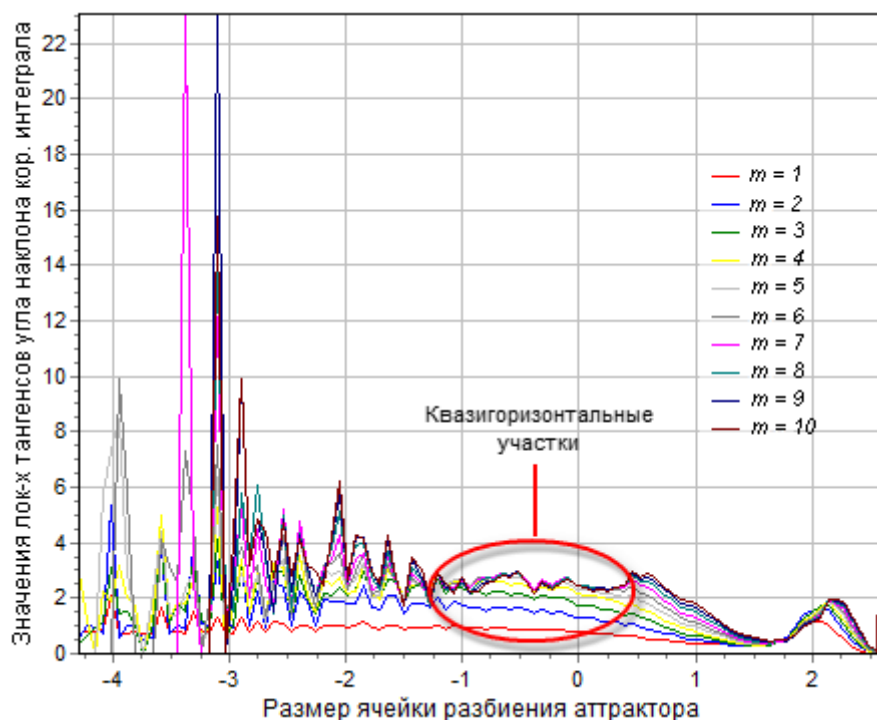


Рисунок 14 – График Раппа, характеризующий зависимость значений локальных тангенсов углов наклона корреляционного интеграла от расстояния ϵ при значениях размерности лагового пространства m от единицы до десяти, построенный по временному ряду курса валюты евро

На графике Раппа находят горизонтальный участок или область измерения, которая соответствует искомому линейному участку. При этом в найденной области измерения

должна наблюдаться тенденция к совпадению для каждой зависимости при увеличении размерности m . Анализ рисунка 14 показывает, что в область измерения не попадают очень большие и очень малые значе-



ния ε , и к тому же предполагаемая область измерения (овал на рисунке 14) является совсем не идеально плоской при увеличении значения m , а несколько флуктуирующей. Тем не менее, предполагаемая область измерения является именно той областью, по которой необходимо оценить корреляционную размерность.

Для оценки корреляционной размерности соотнесем установленные «квазигоризонтальные» участки по графику Раппа с участками зависимостей в графике корреляционных сумм и аппроксимируем их прямым методом наименьших квадратов. Далее построим зависимость углового коэффициента аппроксимирующих прямых от размерности m (рисунок 15).

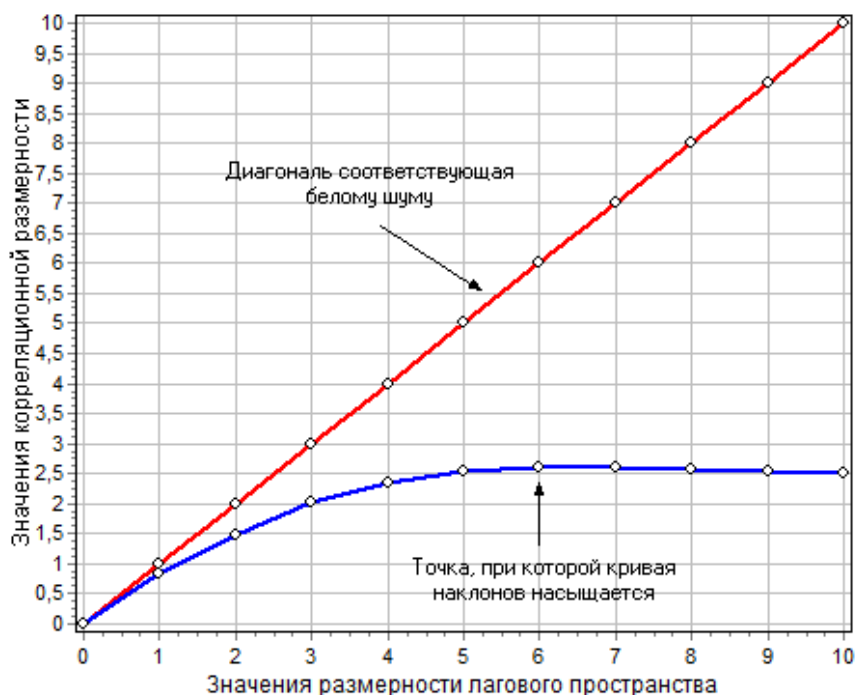


Рисунок 15 – Зависимость значений углового коэффициента прямых, аппроксимирующих корреляционные суммы, от размерности лагового пространства m

Согласно выводам специалистов, если кривая наклонов на приведенной зависимости близка к диагонали (белый шум), то она соответствует случайному поведению временного ряда. В динамике такого временного ряда отсутствуют какие-либо закономерности. При этом хаос, присутствующий в ряде, не детерминирован. Напротив, если кривая достигает максимума и стабилизируется (происходит насыщение), то она соответствует детерминированному хаотическому поведению системы. Таким образом, можно заключить, что исследуемый временной ряд курса валюты евро является хаотическим, корреляционная размерность его аттрактора составляет 2,595. Она достигается при размерности лагового пространства, равного 6 [24, 25].

Судить о разумности и обоснованности рассчитанных корреляционных величин на

сегодняшний день достаточно трудно. Как говорилось выше, данная проблема вытекает из недостаточной длины исследуемого временного ряда. Для оценки размерности лагового пространства с точностью около 5% необходима выборка длиной $N = 42^d$, где d – целая часть размерности. Для $d = 3$ имеем около 70000 отсчетов. В работе приводится оценка $N = 10^d$. Из этих оценок следует, что линейный участок должен наблюдаться при изменении масштаба в 42 или 10 раз. Оценка, полученная в работах, устанавливает жесткие ограничения на корреляционный показатель [17, 18, 26, 27]

$$D \leq 2 \lg N. \quad (10)$$

Если это так, то возникает вопрос: почему же в ряде случаев хорошие результаты

получаются при гораздо меньших выборках? Простого и ясного ответа на этот вопрос в литературе пока нет. Из-за аттрактора Лоренца возникают проблемы с измерением корреляционных величин. При увеличении длины временного ряда или очищении его от шума данная проблема становится разрешенной. Отсюда становится очевидным, что основной вклад в невозможность оценки корреляционных величин вносит уровень шума, присутствующий во временном ряде, если, конечно, временной ряд действительно является хаотическим, а не случайной реализацией. Проблема с длиной временного ряда реальной системы, по-видимому, состоит не в самом понятии его длины, а в том, чтобы за имеющийся временной промежуток успело образоваться притягивающее множество точек или аттрактор [10, 28].

Таким образом, опираясь на соотношение (10), при длине временного ряда, равного 3522 отсчетов, а также на основании вышесказанного, правильно оценить корреляционные характеристики при размерности лагового пространства более 7, по-видимому, не удастся. На основании этого можно заключить, что рассчитанные выше показатели являются обоснованными и достоверными.

Оценка корреляционной энтропии

Строгого доказательства того, что корреляционный интеграл имеет отношение к энтропии, нет, но можно ожидать, что при малых значениях ε и больших m :

$$\log C_q \cong D_q \log \varepsilon - K_q m \tau. \quad (11)$$

Следовательно, фиксируя в выражении (11) масштаб ε и исследуя зависимость от $m\tau$, можно оценить энтропию временного ряда K_q . Соотношение (11) позволяет делать не только количественные, но и качественные выводы. Согласно ему, если временной ряд хаотический, то при увеличении m график корреляционных сумм (рисунок 13) должен проходить все ниже и ниже. Соответственно, зависимость мгновенного наклона корреляционных сумм будет проходить все выше и выше (рисунок 14). По это-

му признаку уже можно сделать вывод о хаотичности системы [4].

Ограничиваясь только случаем, когда $q = 2$ (корреляционная энтропия), и используя рекомендации, можно переписать соотношение (11) в несколько ином виде [29, 30]:

$$C(\varepsilon, m) \sim \varepsilon^{D_2} \exp(-K_2 m). \quad (12)$$

Разрешив (12) относительно K_2 , получим выражение для нижней оценки энтропии Колмогорова-Синая, которая может быть оценена посредством суммы положительных показателей Ляпунова, выраженных через корреляционный интеграл:

$$K_2(\varepsilon, m) \leq \ln\left(\frac{C(\varepsilon, m)}{C(\varepsilon, m+1)}\right). \quad (13)$$

Выражение (13) характеризует среднюю скорость потери информации временным рядом при увеличении размерности лагового пространства и является количественной характеристикой степени хаотичности ряда, т.е. позволяет вычислить численное значение энтропии. Если энтропия достигает нуля, то система становится полностью предсказуемой. Так будет в случае регулярных динамических процессов. Для истинно случайных процессов энтропия неограниченно велика. Энтропия системы в режиме странного аттрактора положительна, но имеет конечное значение. На рисунке 16 построены графики зависимостей корреляционной энтропии K_2 от размера ячейки разбиения аттрактора.

Видно, что с ростом размерности лагового пространства m зависимости $K_2(\varepsilon, m)$ монотонно снижаются и стремятся к значению $K_2 \approx 0,105$. Вследствие этого можно заключить, что исследуемый временной ряд курса валюты евро находится в режиме странного аттрактора, а присутствующий во временном ряде хаос является слабо детерминированным.

Оценка старшего показателя Ляпунова

Одной из особенностей хаотических временных рядов является неустойчивость траекторий, принадлежащих хаотическому аттрактору. Количественной мерой этой неус-



тойчивости являются так называемые характеристические показатели Ляпунова. Эти показатели являются важнейшими характе-

ристиками аттрактора, поскольку позволяют получить количественные оценки:

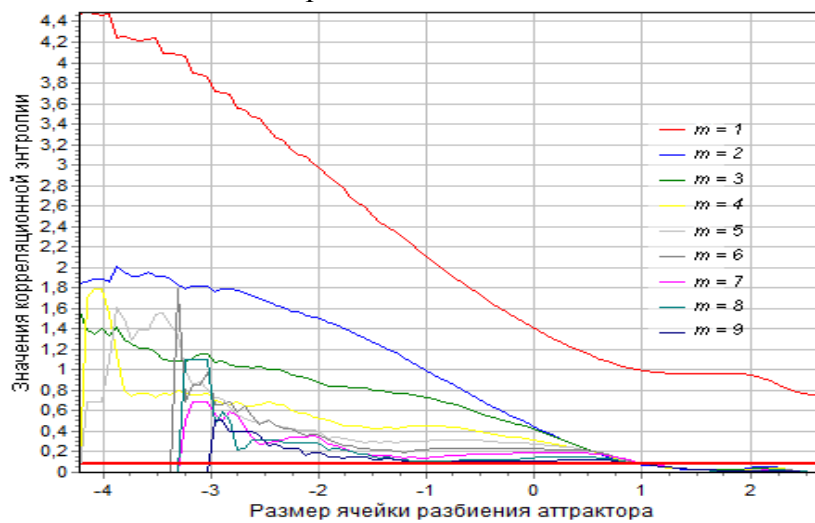


Рисунок 16 – Зависимости значений корреляционной энтропии временного ряда курса валюты евро от размера ячейки разбиения аттрактора

- фрактальной размерности аттрактора;
- энтропии системы;
- характерное время предсказуемости поведения системы.

Наиболее точную и разумную числовую оценку хаоса для временных рядов со сложной динамикой в большинстве случаев удается получить, рассчитав старший показатель Ляпунова λ_1 , который является величиной, обратной среднему времени предсказуемости временного ряда $T_m = 1/\lambda_1$. На временах, больших T_m , возможны лишь статистические предсказания [31].

В настоящее время существует огромное количество алгоритмов расчета старшего показателя Ляпунова. Среди них наиболее часто используют *методы аналога* или методы, связанные с непосредственным измерением скорости расхожимости близких траекторий.

На сегодняшний день существуют две реализации данного метода. Первая была предложена в 1985 г. Вольфом, вторая – в 1993-1994 г. Розейнштейном и Кантцем в независимых друг от друга работах, обладающая теми же достоинствами, что и алгоритм Вольфа и вдобавок не требующая смены траектории движения, а также большого количества данных [32, 33, 34].

Алгоритмы Розейнштейна и Кантца используют двойное усреднение и схожи меж-

ду собой. Отличие заключается только лишь в определении близких соседей. Оба алгоритма являются обобщением алгоритма Сато, согласно которому старший показатель Ляпунова оценивается по выражению [35]

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i\Delta t(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}, \quad (14)$$

где: Δt – пробный или выборочный период временного ряда;

$d_j(i)$ – расстояние между j -й парой

ближайших соседей после i -го дискретно-временного шага;

$M = N - (m-1)\tau$ – количество реконструированных точек временного ряда;

N – количество элементов во временном ряду;

m – размерность лагового пространства;

τ – задержка по времени.

С целью увеличения сходимости (относительно i), а также с целью увеличения достоверности результирующей оценки λ_1 , выражение (14) модифицируется в альтернативную, усредненную по всем значениям j , форму [34]

$$\lambda_1(i, k) = \frac{1}{k\Delta t} \left\langle \ln \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)} \right\rangle = \frac{1}{k\Delta t} [\langle \ln d_j(i+k) - \ln d_j(i) \rangle] \approx \frac{1}{k} [y(i+k) - y(i)]. \quad (15)$$

Согласно определению старшего показателя Ляпунова

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t}, \quad (16)$$

и с учетом (15), получаем, что j -я пара ближайших соседей расходится со скоростью

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, \quad (17)$$

где C_j – исходное расстояние.

Беря логарифм по обеим частям (17), получаем

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t). \quad (18)$$

На основании (18) значение старшего показателя Ляпунова фиксируется как угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей зависимость $d_j(i)$. Критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова принимает следующий вид:

$\lambda_1 > 0$ – хаотическое движение;

$\lambda_1 \leq 0$ – регулярное движение.

На рисунке 17 представлена кривая, показывающая среднее расхождение или дивергенцию траекторий движения аттрактора в лаговом пространстве. Видно, что при увеличении дискретно-временного шага уменьшается угол наклона кривой, что говорит о снижении хаотического поведения траекторий аттрактора и приближении их к регулярному движению. Полученные положительные значения показателя Ляпунова являются критерием хаотического поведения временного ряда курса валюты евро.

Тестирование временного ряда курса валюты евро на нелинейность

При решении задачи идентификации временных рядов, полученных от реальных систем, исследователь сталкивается с одним очень важным вопросом. К какому классу процессов относится исследуемый временной ряд? Является ли он действительно хаотическим, просто шумом или чем-то другим? Чтобы ответить на эти вопросы, исследователь идет по пути выдвижения нулевых гипотез о структуре временного ряда с последующей их проверкой. Одним из методов проверки выдвинутых предположений является метод суррогатных данных, суть которого заключается в выполнении следующих шагов [36]:

- создать или сгенерировать из исследуемого временного ряда ансамбль (обычно три или пять) суррогатных реализаций;

- рассчитать различные статистики (корреляционный интеграл, ляпуновские показатели, размерности и т.д.) для исходного временного ряда и суррогатных реализаций;

- сравнить полученные результаты (если результаты существенно различаются, нулевая гипотеза может быть отклонена).

Создание суррогатных реализаций зависит от выдвинутой исследователем нулевой гипотезы, то есть от предположения принадлежности исследуемого временного ряда к тому или иному классу процессов. Вследствие этого существует большое количество алгоритмов генерации суррогатных реализаций. Выделим лишь некоторые из них:

- перемешивание в случайном порядке данных временного ряда [37];

- рандомизация фаз спектра временного ряда или Фурье-преобразование (FT) [36];

- перемешивание элементов временного ряда с последующей рандомизацией фаз спектра или амплитудно-скорректированное Фурье-преобразование (AAFT) [36].



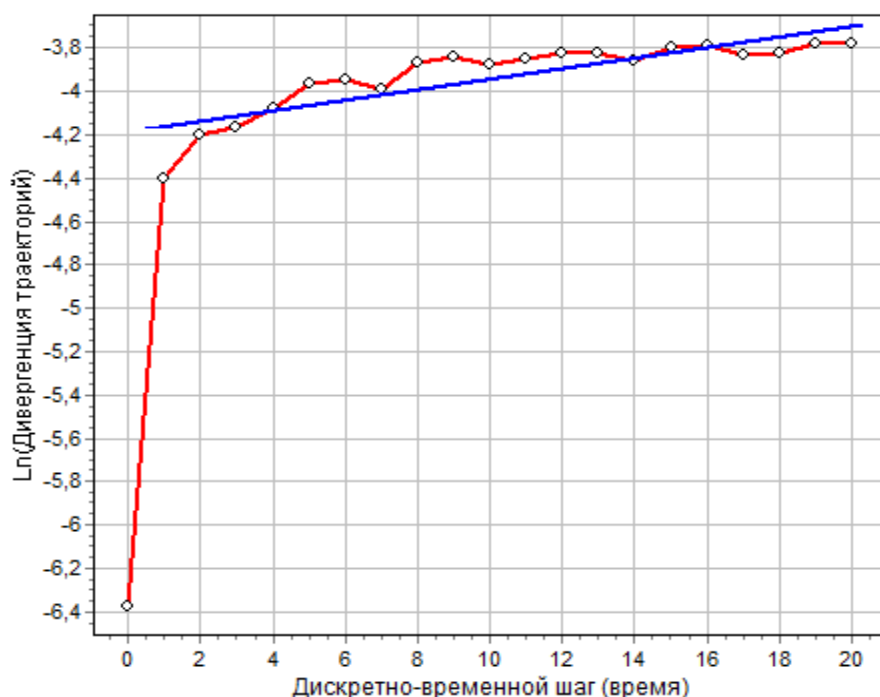


Рисунок 17 – Кривая дивергенций траекторий аттрактора, построенная по временному ряду курса валюты евро. Прямая, проведенная по кривой дивергенций, – аппроксимирующая прямая, угловой коэффициент которой равен теоретическому значению старшего показателя Ляпунова

Перемешивание предполагает, что в качестве нулевой гипотезы выбран гауссов случай (предположение о том, что временной ряд соотносится с гауссовым шумом). Перемешивание в случайном порядке данных ломает структуру временного ряда, в результате чего порядок следования данных становится полностью отличным от исходного, т.е. случайным. При этом амплитуда данных и их частотное распределение по времени остается неизменным.

Фурье-преобразование предполагает, что в качестве нулевой гипотезы выбран коррелированный гауссов случай (предположение о том, что временной ряд соотносится с коррелированным гауссовым шумом). Создание такой суррогатной реализации достигается Фурье-преобразованием исходного временного ряда, изменением случайным образом фаз и обратным Фурье-преобразованием. При этом суррогатная реализация обладает практически тем же спектром мощности и автокорреляционной функцией, что и исходный временной ряд.

Амплитудно-скорректированное преобразование предполагает, что в качестве нулевой гипотезы выбран статичный нелинейный случай (предположение о том, что временной ряд соотносится с нелинейным вре-

менным рядом, но таким, у которого нелинейность проявляется не в динамике, а в распределении амплитуды). Создание такой суррогатной реализации включает в себя приведенные выше преобразования, т.е. сначала исходный временной ряд перемешивается, а затем применяется Фурье-преобразование.

С целью проверки гипотезы о том, является ли исследуемый временной ряд курса валюты евро действительно нелинейным хаотичным процессом или просто шумом, сгенерируем суррогатные временные ряды по первым двум алгоритмам (рисунок 18).

Видно, что суррогатные зависимости имеют различия по углу наклона, по степени кривизны и масштабной разнесенности. На лицо потеря информации вследствие перемешивания и рандомизации фазы исходного временного ряда. Однако рандомизованные по фазе суррогаты имеют некоторую степень близости к траектории корреляционных сумм исходного временного ряда, что говорит о некоторой доле схожести исходного временного ряда с коррелированным гауссовым шумом. Для обоих типов суррогатных реализаций корреляционную разность не удалось оценить вследствие постоянно увеличивающегося наклона корреля-

ционных сумм при увеличении размерности лагового пространства.

Из полученных результатов тестирования можно отбросить нулевую гипотезу о том, что временной ряд курса евро является стохастическим, однако имеет некоторую степень схожести с коррелированным гауссо-

вым шумом. Для проверки этих утверждений целесообразно дополнительно классифицировать спектральную структуру временного ряда по цвету шума или рассчитать спектральный показатель b , также называемый коэффициентом масштабирования

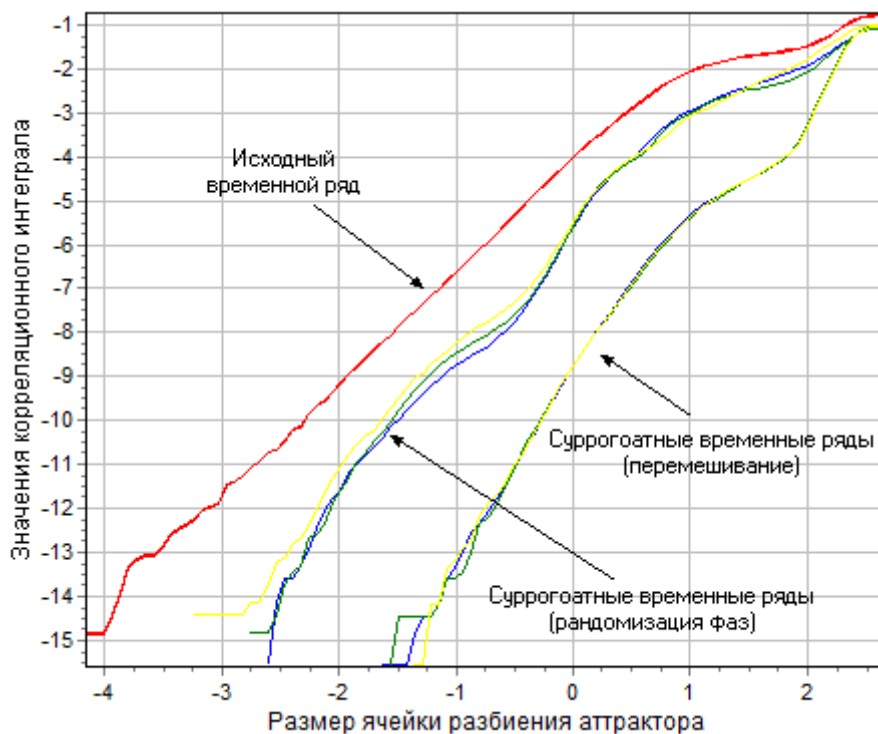


Рисунок 18 – График корреляционных сумм при размерности лагового пространства $m = 5$ исходного временного ряда курса валюты евро и его суррогатных реализаций

$$P(f) = -af^{-b}, \quad (19)$$

или беря логарифм по обеим частям

$$\ln P(f) = -b \ln f + a, \quad (20)$$

где: f – частота дискретизации;
 a и b – коэффициенты регрессии.

Значения спектрального показателя b варьируются в пределах от 0 до 4 и имеют следующий физический смысл [38]:

- b близко к нулю – периодограмма имеет сплошной или непрерывный спектр, что соответствует белому или гауссову шуму;
- $0 < b < 2$ – периодограмма имеет розовый шум. Спектральная структура розового шума занимает промежуточное положение между спектром белого шума и спектром упорядоченных детерминированных колебаний;

- $b = 2$ – периодограмма имеет одномерное броуновское движение или проинтегрированный белый шум. Одномерное броуновское движение также называют коричневым шумом (от слова brown – коричневый);

- $b > 2$ – периодограмма имеет дважды проинтегрированный белый шум или черный шум.

На рисунке 19 построена периодограмма временного ряда курса валюты евро в логарифмических координатах. Аппроксимирующая прямая определяет значение спектрального показателя, равного 1,578. Полученный угол наклона аппроксимирующей прямой определяет спектральную структуру временного ряда курса валюты евро как структуру розового шума.



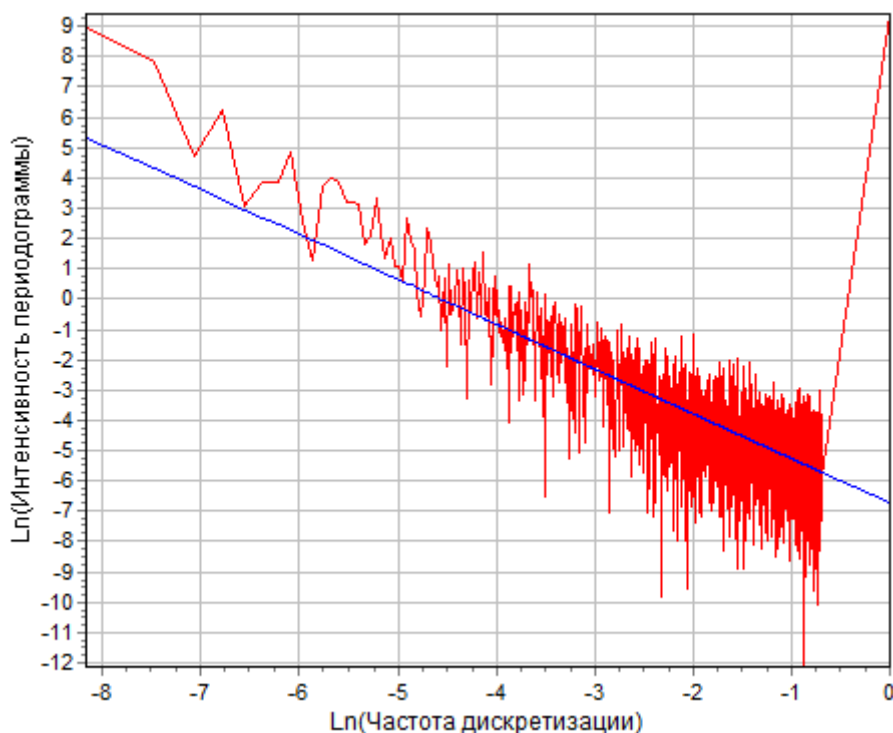


Рисунок 19 – Периодограмма временного ряда курса валюты евро в логарифмических координатах

Проведенная идентификация временного ряда курса валюты евро методами нелинейной динамики позволила выявить множество характеристик, закономерностей, присущих временному ряду, глубже понять внутреннюю структуру, динамику временного ряда. Она позволила отнести временной ряд к классу сложных, фрактальных, хаотических, со слабо детерминированным хаосом и высокой степенью энтропийности. Полученная информация может быть использована при прогнозном моделировании временных рядов курса валют, разработке и принятии экономических решений.

Список использованных источников:

- 1 Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. – М.: Наука, 1989.
- 2 Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A. Rand L.S. Young. Heidelberg: Springer-Verlag, 366-381 (1981).
- 3 Безручко. Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 302 с. ISBN 5-94409-045-6.
- 4 Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Едиториал УРСС, 2002.
- 5 Eckmann, J.-P., Kamphorst, O., S., Ruelle, D., Recurrence plots of dynamical systems, // Europhys. Lett., 4, p. 973-977, 1987.

6 Marwan N., Thirl M., Nowaczyk N.R. // Nonlin. Process Geophys. 2002. V. 9 (3/4). P. 325.

7 Marwan, N., Encounters with neighbours (current developments of concepts based on recurrence plots and their applications), //PhD Thesis, University of Potsdam, 2003.

8 Zbilut, J. P., Webber Jr., C. L., Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots, // Phys. Lett. A, 171, p. 199_203, 1992.

9 Zolotova N. V., Ponyavin D. I. Recurrence and cross recurrence plot analysis of natural time series // Educational and methodical materials, St. Petersburg Univ. Press, 2005, p. 33.

10 Горшков В.А., Касаткин С.А. Идентификация временных рядов авиационных событий методами и алгоритмами нелинейной динамики.

11 Gibson J.F., Farner J.D., Casdagli M., Eubank S. An analytic approach to practical state space reconstruction. Physica D. 57, (1992).

12 Kennel M.B., Isabelle S. Method to distinguish possible chaos from colored noise and determine embedding parameters. Phys. Rev. A. 46 (1992).

13 Fraser A.M., Swinney H.L., Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information // Phys. Rev. A. 1986. V. 33, №2. P. 1131-1140.

14 Fraser A.M., Information and Entropy in Strange Attractors //IEEE Trans. 1989. V. IT-35, N2. P. 245-262.

15 Петров В.В. Структура телетрафика и алгоритм обеспечения качества обслуживания при влиянии эффекта самоподобия. 05.12.13 – "Системы, сети и устройства телекоммуникаций". Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. 2004.

16 Актуальные проблемы современной математики: учёные записки. Т. 13 (вып. 2). п/ред. проф.

Калашникова Е.В., изд. ЛГУ им. А.С. Пушкина, С.-Пб., 2004 г., С. 112-140.

17 Ruelle, D. Deterministic chaos: the Science and the Fiction// Proc. R. Soc. Lond. A, 427, 1990. P. 241-248.

18 Smith L.A. Intrinsic Limits on Dimension Calculations//Phys. Lett. A. 1988. V. 133, №6. P. 283-288.

19 Tsonis A. Chaos: from Theory to Applications. NY. Premium Press. 1992.

20 Theiler J. Spurious Dimension from Correlation Algorithms Applied to Limited Time Series Data// Physical Rev. A, 34, # 3, 2427, 1986.

21 Hegger R., Kantz H., and Schreiber T. Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods // The TISEAN package, CHAOS 9, 1999.

22 A. Provenzale, L.A. Smith, R. Vio and G. Murrante. Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series. Physica D 58 (1992) 31-49. North-Holland.

23 Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors. Phys. Rev. Lett. 50, 346-349 (1983).

24 Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.

25 Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

26 Mayer-Kress C. Application of Dimension Algorithms to Experimental Chaos//Directions in Chaos. – Singapore: World Scientific, 1987. P. 122-147.

27 J.P. Eckmann, D. Ruelle, Physica D 56, 185 (1992).

28 Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005.

29 Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега. ДАН СССР, т.119, С.861-864, 1958.

30 Синай Я.Г. О понятии энтропии динамической системы. ДАН СССР, т.124, С.768-771, 1959.

31 Шустер Г. Детерминированный хаос: Пер. с англ. / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. – М.: Мир, 1988.

32 Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series//Physica D. 16 (1985). №3. P.285-317.

33 M.T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, Physica D 65, 117 (1993).

34 H. Kantz, A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, Phys. Lett. A 185, 77 (1994).

35 S. Sato, M. Sano, and Y. Sawada, Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems, Prog.Theor. Phys. 77 (1987) 1.

36 J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data, Physica D 58, 77 (1992)

37 J.A. Scheinkman and B. LeBaron, J. Business 62 (1989) 311.

38 Э. Петерс. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004.

