Буравлев А.И.
Доктор технических наук, профессор.

Система дифференциальных уравнений для моментов стохастического процесса противоборства

В статье рассматривается модель противоборства однородных боевых систем в условиях неопределенностей, обусловленных недостоверным знанием начальной численности и боевых возможностях противоборствующих группировок. Процесс противоборства описывается системой дифференциальных уравнений со случайными начальными условиями и случайными параметрами. Для приближенного решения системы стохастических уравнений используется метод моментов В.С. Пугачева, позволяющий получить дифференциальные уравнения для математических ожиданий, дисперсий и ковариаций численностей группировок. Приведен пример использования данной модели и результаты ее исследования при решении практических задач.

Известные уравнения Осипова-Ланчестера[1], описывающие динамику изменения средних численностей противоборствующих группировок, не позволяют оценить точность и надежность прогноза результата моделирования в условиях неопределенностей и действия случайных факторов. В частности, такая неопределенность возникает при неточно известных начальных данных о численности противоборствующих группировок, состава и характеристиках их систем вооружения, боевого, технического и тылового обеспечения. В этом случае необходимо рассматривать стохастическую систему уравнений, описывающую динамику противоборства сторон.

Рассмотрим вначале стохастическую систему уравнений противоборства однородных группировок без восстановления

$$\dot{X}_1 = -\lambda_2 X_2; \qquad \dot{X}_2 = -\lambda_1 X_2 \tag{1}$$

с детерминированными интенсивностями λ_1, λ_2 поражающего воздействия и случайными начальными условиями $X_1(0)$, $X_2(0)$. Относительно начальных условий полагаем известными их математические ожидания $m_1(0) = M[X_1(0)]$; $m_2(0) = M[X_2(0)]$, дисперсии $D_1(0) = M[\overset{0}{X}{}_1^2(0)]$; $D_2(0) = M[\overset{0}{X}{}_2^2(0)]$ и корреляционный момент $K_{12}(0) = M[\overset{0}{X}_1(0)\overset{0}{X}_2(0)]$, где $\overset{0}{X} = X - m$ – центрированное значение случайной величины X.

Применяя к системе уравнений (1) метод моментов[2], получаем следующую систему уравнений для первых и вторых моментов

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -\lambda_2 m_2; \\ \dot{m}_2 &= -\lambda_1 m_1; \\ \dot{D}_{X_1} &= -2\lambda_2 K_{12}; \\ \dot{D}_2 &= -2\lambda_1 K_{12}; \\ \dot{K}_{12} &= -\lambda_1 D_1 - \lambda_2 D_2 \end{aligned} \tag{2}$$

с начальными условиями $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$, $D_1(0) > 0$, $D_2(0) > 0$, $|K_{12}(0)| \geq 0$, где N_1, N_2 – штатные численности группировок.

Интегрирование этой системы уравнений позволяет получить динамику изменения не только средних численностей, но и дисперсий группировок, а также оценить величину их линейной корреляции.

Для количественной оценки соотношения сил вместо отношения средних численностей $KCC(t) = \dfrac{m_1(t)}{m_2(t)}$ целесообразно использовать отношение средних квадратических значений (СКЗ) численностей сторон:

$$KCC^*(t) = \sqrt{\frac{m_1^2(t) + D_1(t)}{m_2^2(t) + D_2(t)}} = \frac{m_1(t)}{m_2(t)} \cdot \gamma(t), \tag{3}$$

[1] Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: – Наука, 1979.

[2] Пугачев В.С., Синицын И.Н. Дифференциальные стохастические системы. – М.: Наука, 1986.

где $\gamma(t)=\sqrt{\dfrac{1+V_1^2(t)}{1+V_2^2(t)}}$ – поправочный коэффициент, зависящий от вариаций $V(t)=\dfrac{\sigma(t)}{m(t)}$ численностей противоборствующих сторон.

Принимая гипотезу о нормальности распределения случайных численностей группировок в каждом временном сечении можно оценить вероятность прогноза о превышении численности собственной группировки над противником для любого момента времени t:

$$P(t)=P\big(X_2(t)>X_1(t)\big)=$$
$$=1-\Phi\left(\frac{m_1(t)-m_2(t)}{\sqrt{\sigma_1^{\,2}(t)+\sigma_2^{\,2}(t)}}\right), \qquad (4)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа;

$\sigma_2(t)=\sqrt{D_2(t)}$ – среднее квадратическое отклонение (СКО) численности группировки.

Для практических расчетов функцию Лапласа с можно аппроксимировать логистической функцией $\Phi(x)\simeq\dfrac{1}{1+\exp(-1,71x)}$, которая дает погрешность расчетов не более 0,5%.

На рисунках 1–4 показаны графики средних $m_1(t)$, $m_2(t)$ и СКО $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ численностей противоборствующих сторон, $KCC^*(t)$ и прогнозируемой вероятности численного превосходства противника $P(t)$ для следующих начальных данных:

$$\frac{N_1}{N_2}=1,25\,;\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=0,8\,;$$
$$\frac{\sigma_1}{m_1}=0,01\,;\ \frac{\sigma_2}{m_2}=0,125\,.$$

Из этих графиков видно, что учет случайности в соотношении численностей сторон несколько снижает значение показателя КСС.

Рассмотрим теперь стохастическую систему уравнений противоборства при наличии восстановления группировок. В качестве случайных параметров помимо начальных численностей $X_1(0)$, $X_2(0)$ будем рассматривать интенсивности восстановления группировок ξ_1, ξ_2. Восстановление группировок осуществляется в пределах штатных численностей. В этом случае уравнения для численностей противоборствующих сторон будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1&=-\lambda_2X_2+\xi_1\left[N_1-X_1\right];\\ \dot{X}_2&=-\lambda_1X_1+\xi_2\left[N_2-X_2\right].\end{aligned} \qquad (5)$$

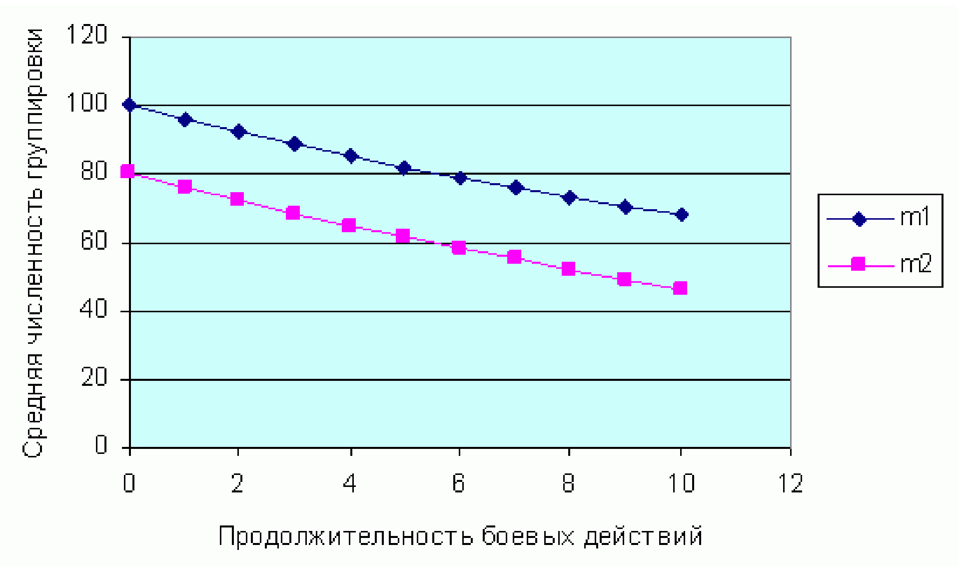

Рисунок 1 – Динамика изменения средних численностей противоборствующих группировок

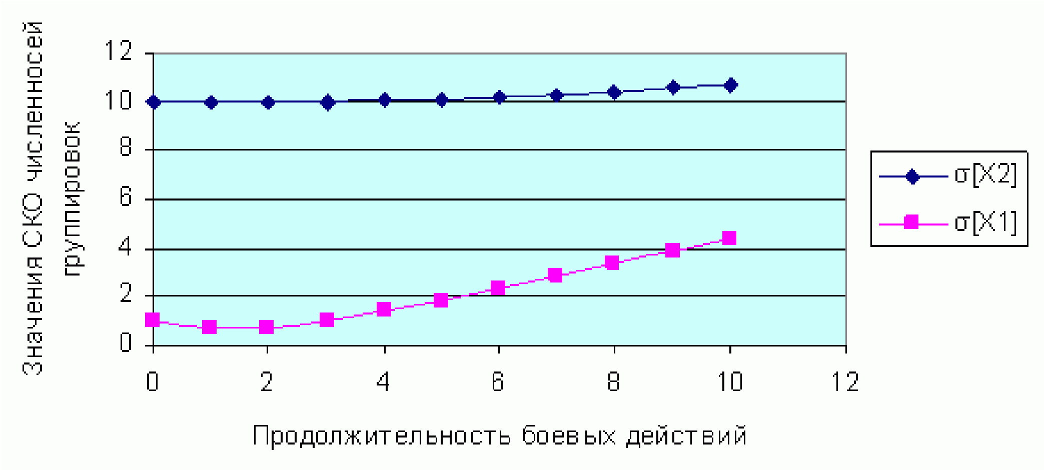

Рисунок 2 – Динамика изменения СКО численностей противоборствующих группировок

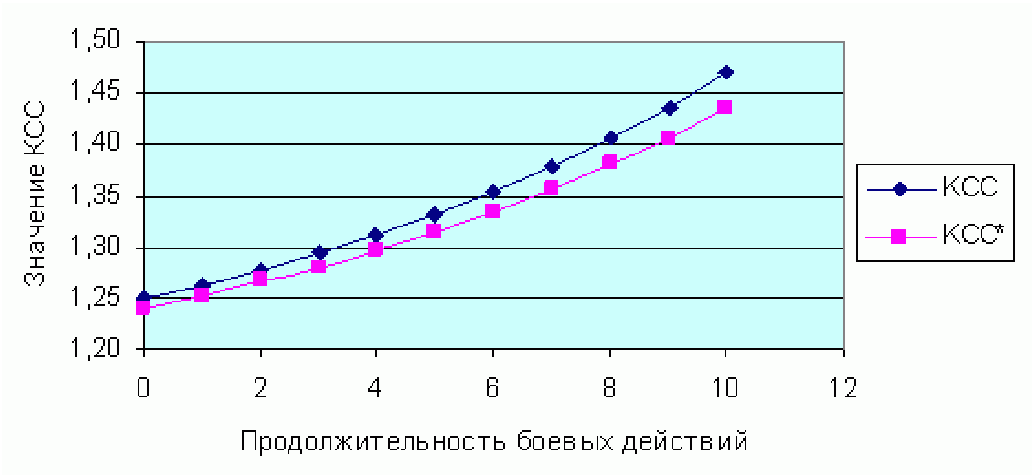

Рисунок 3 – Изменение количественного соотношения сил противоборствующих сторон

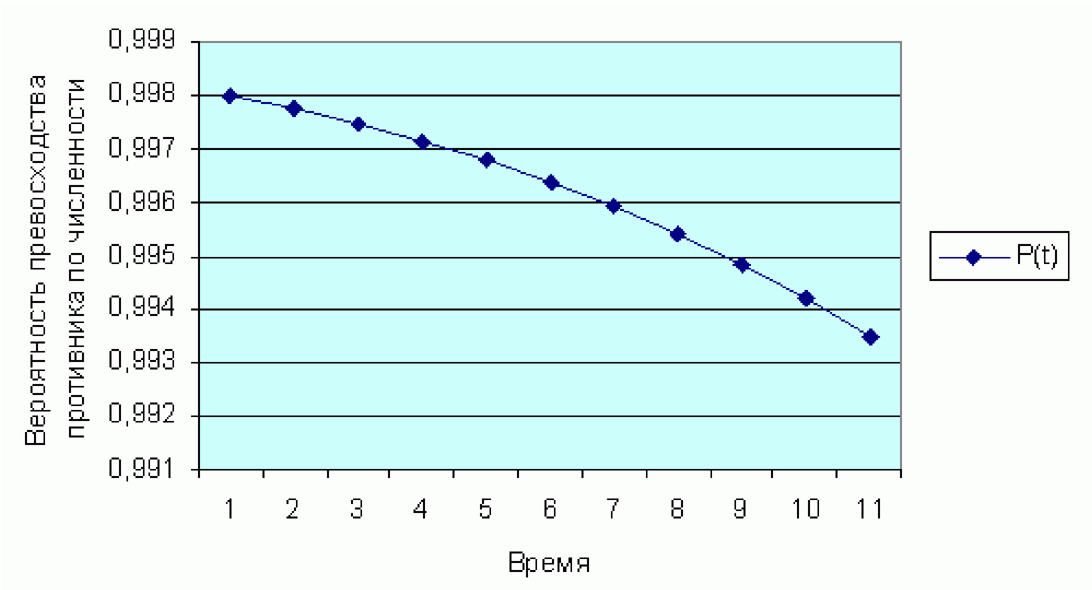

Рисунок 4 – Прогнозируемая вероятность численного превосходства противника

Для упрощения задачи примем допущение о независимости интенсивностей восстановления от численности группировки противника, что обеспечивает $K_{\xi_1 X_2} = M\left[\overset{0}{\xi}_1 \overset{0}{X}_2\right] = 0$; $K_{\xi_2 X_1} = M\left[\overset{0}{\xi}_2 \overset{0}{X}_1\right] = 0$. Кроме того полагаем $M\left[\xi_1 X_1^2\right] = 0$;

$M\left[\xi_2 X_1 X_2\right]=0$. Это связано с тем, что центрированные величины $\overset{0}{X}{}_1^2$ и $\overset{0}{X}_1\overset{0}{X}_2$ практически всегда отличны от нуля, поэтому их осреднение совместно с центрированными случайными величинами $\overset{0}{\xi}_1$, $\overset{0}{\xi}_2$ дает нуль.

Применяя метод моментов к (5), получаем следующую систему уравнений моментов

$$\begin{aligned}
&\dot{m}_1=-\lambda_2 m_2+\mu_1(N_1-m_1);\\
&\dot{m}_2=-\lambda_1 m_1+\mu_2(N_2-m_2);\\
&\dot{D}_1=-2\lambda_2 K_{12}+2K_{\xi_1 X_1}N_1;\\
&\dot{D}_2=-2\lambda_1 K_{12}+2K_{\xi_2 X_2}N_2;\\
&\dot{K}_{12}=-\lambda_1 D_1-\lambda_2 D_2,
\end{aligned} \qquad (6)$$

при начальных условиях $m_1(0)=N_1$; $m_2(0)=N_2$; $D_1(0)>0$; $D_2(0)>0$; $K_{X_1X_2}(0)\neq 0$.

Здесь $K_{\xi_1X_1}=M\left[\overset{0}{\xi}_1\overset{0}{X}_1\right]$, $K_{\xi_2X_2}=M\left[\overset{0}{\xi}_2\overset{0}{X}_2\right]$ – корреляционные моменты связи между интенсивностями восстановления и численностью группировок. Эти величины определяются с помощью экспертов, либо на основе численного моделирования противоборства группировок с учетом различных стратегий их восполнения. Поскольку корреляционные моменты однозначно выражаются через коэффициенты корреляции и СКО случайных параметров, то задачей экспертов является оценка лишь коэффициентов корреляции.

Интегрирование системы уравнений (6) позволяет получить более точные значения для дисперсий численностей группировок и обеспечить более точный вероятностный прогноз результатов боевых действий.

На рисунках 5–8 представлены графики зависимостей средних и СКО численностей группировок, их соотношения сил и прогнозируемой вероятности численного превосходства противника $P(t)$ при следующих параметрах восстановления $\mu_1=0,2$ 1/час; $\sigma_{\xi_1}=0,1$ 1/час; $\mu_2=0,3$ 1/час; $\sigma_{\xi_2}=0,2$ 1/час.

Анализ второго примера показывает, что с увеличением числа случайных факторов, включаемых в модель противоборства, уменьшается степень достоверности прогноза о соотношении численностей группировок в ходе боевых действий.

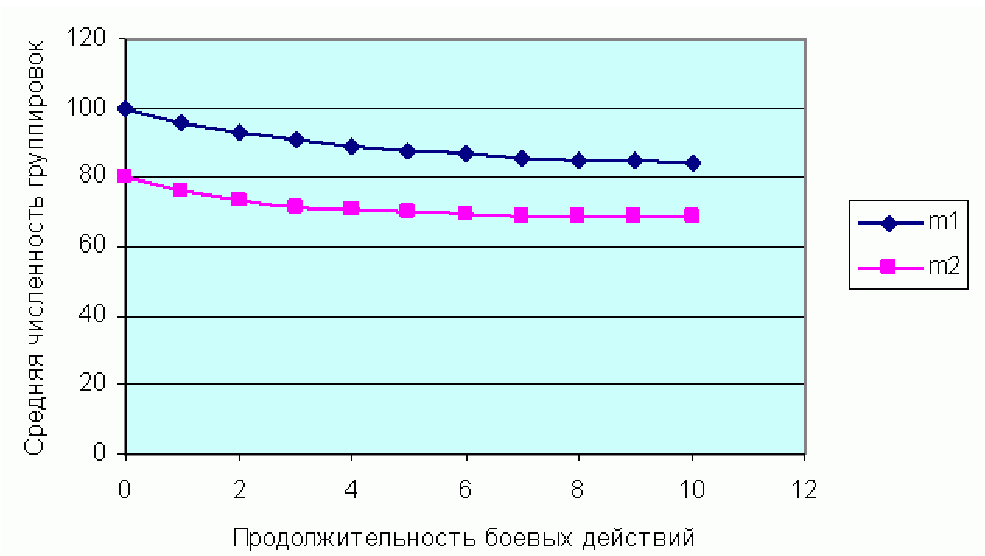

Рисунок 5 – Динамика изменения средних численностей противоборствующих группировок

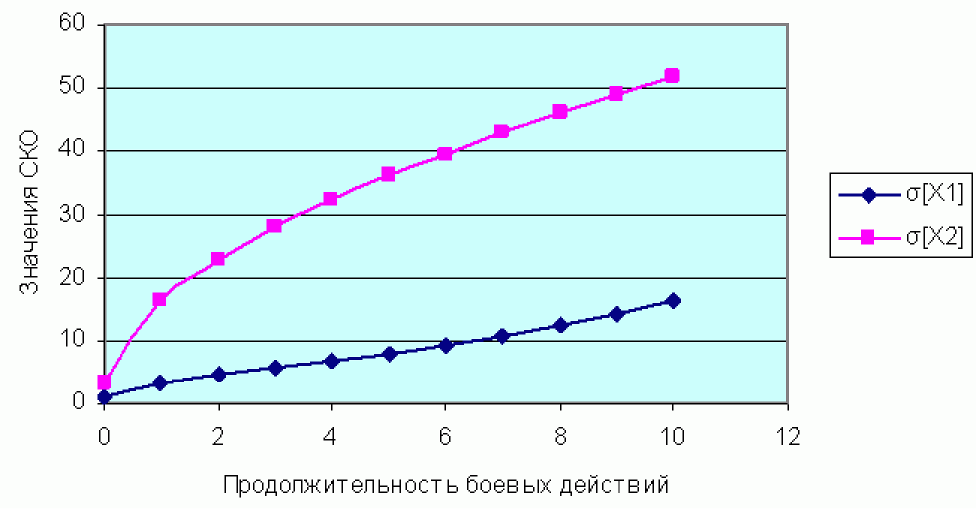

Рисунок 6 – Динамика изменения СКО численностей противоборствующих группировок

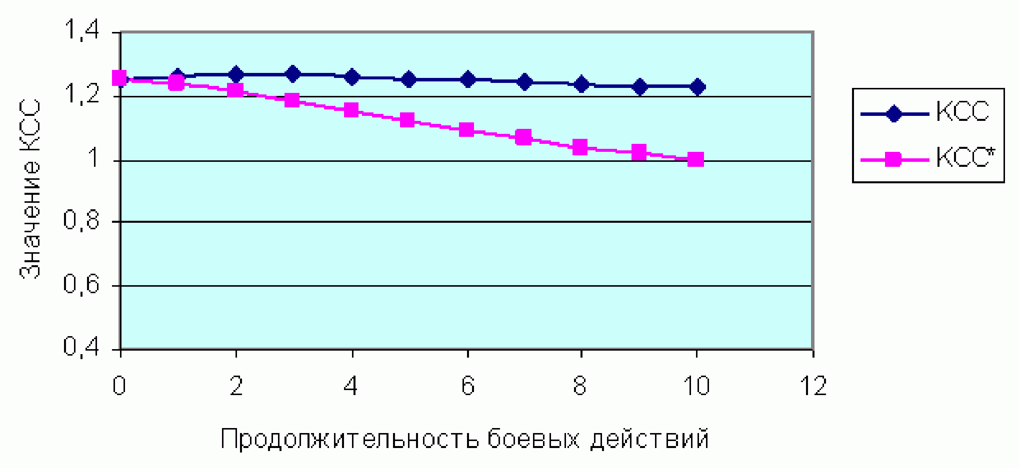

Рисунок 7 – Изменение количественного соотношения сил противоборствующих сторон

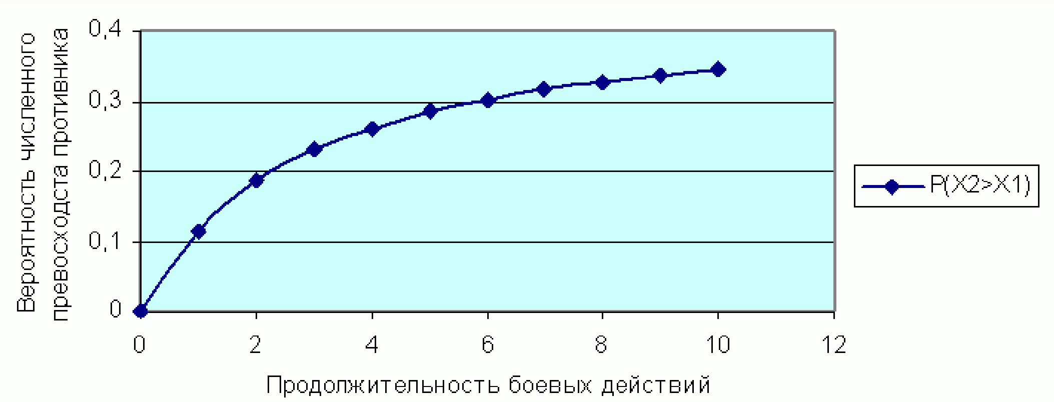

Рисунок 8 – Прогнозируемая вероятность численного превосходства противника

Исследования на моделях показали, что учет факторов неопределенности и случайностей становится значимым при вариациях случайных параметров, составляющих более 15-20%. В этом случае для уменьшения риска в планировании боевых действий вместо уравнений динамики средних необходимо использовать полученные выше уравнения динамики моментов. Величина допустимой вариации случайных параметров 15-20% является граничным значением для оценки точности информации о противнике при планировании боевых действий.