

Буравлев А.И.

Доктор технических наук, профессор.

**Алгоритмы оптимального управления динамикой противоборства группировок войск**

В статье рассматривается задача оптимального управления процессом противоборства двух однородных группировок войск, описываемых дифференциальными уравнениями Осипова-Ланчестера. В качестве критерия управления рассматривается критерий минимума затрат на обеспечение требуемого количественного соотношения сил за определенное время боевых действий. В результате редукции задачи к дискретному управляемому процессу с линейной функцией затрат и линейным терминальным ограничением, получен алгоритмы пошагового локально-оптимального управления. Алгоритм обладает высокой устойчивостью к параметрам функции затрат, что позволяет его использовать для решения параметрически неопределенных задач. В результате исследования исходного алгоритма получены также приближенно оптимальные алгоритмы управления, дающие близкие к оптимальному результаты в условиях как полной, так и неполной наблюдаемости параметров группировки противника. Приведен пример, демонстрирующий работоспособность полученных алгоритмов управления.

Задачи управления процессами вооруженной борьбы имеют большую теоретическую и прикладную значимость. Анализ и методам решения этих задач посвящены фундаментальные работы [1-6]. В работе [7] рассмотрена задача оптимального управления динамикой противоборства систем, представляемых совокупностью активных элементов, описываемых моделями вероятностных автоматов. В данной статье рассматривается приложение этой задачи к процессу вооруженного противоборства двух группировок войск.

**Постановка задачи.** Рассматриваются двухсторонние боевые действия однородных группировок войск с начальной численностью  $N_1, N_2$ . Процесс боевых действий описывается дифференциальными уравнениями Осипова-Ланчестера [8] для средних численностей группировок с учетом восполнения потерь:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\lambda_2 m_2 + \mu_1 [N_1 - m_1]; & m_1(0) &= N_1; \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\lambda_1 m_1 + \mu_2 [N_2 - m_2]; & m_2(0) &= N_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_1(t), m_2(t)$  – средние численности сторон в текущий момент времени  $t$ ;

$\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  – интенсивности поражающего действия систем вооружения группировок;

$\mu_1(t), \mu_2(t)$  – интенсивности восполнения потерь группировок.

В качестве оперирующей стороны рассмотрим сторону I. Ее целью является достижение численного превосходства над противником

$$\frac{m_1(T)}{m_2(T)} = \eta > 1 \text{ за время боевых}$$

действий  $T$  при определенной информации о поведении противника, которое задается функциями  $\lambda_2(t), \mu_2(t)$ . Управляющими параметрами оперирующей стороны также выступают интенсивности поражающего действия  $\lambda_1(t)$  и восполнения потерь  $\mu_1(t)$ .

В качестве критерия управления рассматриваются минимальные суммарные затраты на достижения заданного результата

$$J(T) = \int_0^T \{c_1 \mu_1 [N_1 - m_1(t)] + c_2 \lambda_1(t) m_1(t)\} dt \Rightarrow \min_{\lambda_1(t), \mu_1(t)} \quad (2)$$

при ограничениях  $m_1(T) = \eta m_2(T)$ ;  
 $0 \leq \lambda_1(t) \leq \lambda_1; 0 \leq \mu_2(t) \leq \mu_2$ .

Здесь  $c_0, c_1$  – стоимость затрат, связанных с поражением и восполнением потерь вооружения и военной техники (ВВТ) группировок;  $\lambda_1, \mu_1$  – предельные значения параметров управления  $\lambda_1(t), \mu_1(t)$ .

Сформулированная выше задача является задачей терминального управления, для ре-



шения которой необходимо привлекать вариационные методы [9]. Для приближенного решения задачи рассмотрим дискретную модель процесса противоборства.

**Дискретная модель управляемого процесса**

Запишем систему уравнений (1) в форме дискретного управляемого процесса, полагая известными функции  $\lambda_2(t), \mu_2(t)$ :

$$\mathbf{m}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{m}(k-1) + \mathbf{u}(k) + \mathbf{b}(k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{m}(t) = \|m_1(t), m_2(t)\|^T$  – вектор средних численностей противоборствующих сторон;

$T$  – индекс транспонирования;

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -\bar{\lambda}_2(k) \\ 0 & 1 - \bar{\mu}_2(k) \end{matrix} \right\| - \text{матрица процесса};$$

са;

$$\bar{\lambda}_2(k) = \lambda_2(k)\Delta t;$$

$$\bar{\mu}_2(k) = \mu_2(k)\Delta t;$$

$\mathbf{u}(k) = \|u_1(k), u_2(k)\|^T$  – вектор управления;

$$u_1(k) = \bar{\mu}_1(k) [N_1 - m_1(k)];$$

$$u_2(k) = -\bar{\lambda}_1(k)m_1(k) - \text{управляющие}$$

параметры;

$$\mathbf{b}(k) = \|0, b_2\|^T - \text{вектор возмущений};$$

$$b_2 = \bar{\mu}_2(k)N_2;$$

$k$  – номер шага;

$$n = E \left[ \frac{T}{\Delta t} + 0,5 \right] - \text{число шагов дискретного процесса.}$$

Целевая функция (2) принимает вид

$$J(n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{u}(k), \quad (4)$$

а терминальное ограничение  $\Psi^T \mathbf{m}(n) = 0$ ,

где  $\mathbf{c} = \|c_1, c_2\|^T$  – вектор стоимостей;

$$\Psi = \|1, -\eta\|^T - \text{вектор невязки.}$$

Разложим терминальную невязку  $\Psi^T \mathbf{m}(n) = 0$  по шагам дискретного процесса:

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{m}(n) &= \Psi^T [\mathbf{A}(n-1)\mathbf{m}(n-2) + \mathbf{u}(n) + \mathbf{b}(n)] = \dots \\ &= \Psi^T \left[ \prod_{k=1}^n \mathbf{A}(k)\mathbf{m}(0) + \sum_{k=1}^n \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{u}(k) + \sum_{k=1}^n \mathbf{b}^{n-k} \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем скалярное уравнение относительно неизвестного вектора управления:

$$\begin{aligned} \Psi^T \left[ \sum_{k=1}^n \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{u}(k) \right] &= \\ &= -\Psi^T \left[ \prod_{k=1}^n \mathbf{A}(k)\mathbf{m}(0) + \sum_{k=1}^n \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{b} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем составляющие этого уравнения. Произведение матриц  $\mathbf{A}(n-r)$ ,  $r = \overline{1, k}$  дает матрицу

$$\prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r) = \left\| \begin{matrix} 1 & a_{12}(n-k) \\ 0 & a_{22}(n-k) \end{matrix} \right\|,$$

$$\text{где } a_{22}(n-k) = \prod_{r=1}^k (1 - \bar{\mu}_2(r));$$

$$a_{12}(n-k) = -\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\mu}_2} (1 - a_{22}(n-k)), \text{ а вы-}$$

ражение  $\Psi^T \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{u}(k)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi^T \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{u}(k) &= \|1, -\eta\| \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} 1 & a_{12}(n-k) \\ 0 & a_{22}(n-k) \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{matrix} \right\| = \\ &= u_1(k) + a(n-k)u_2(k), \end{aligned}$$

$$\text{где } a(n-k) = a_{12}(n-k) - \eta a_{22}(n-k) < 0.$$

Аналогично представляются выражения

$$\Psi^T \prod_{k=1}^n \mathbf{A}(k)\mathbf{m}(0) = N_1 + a(k)N_2;$$

$$\Psi^T \prod_{r=1}^k \mathbf{A}(n-r)\mathbf{b} = a(n-k)b_2.$$

Равенство (4) удовлетворяется при почленном равенстве его правой и левой части. Если разложить невязку по начальным условиям  $N_1 + a(k)N_2$  равномерно по всем шагам дискретного процесса, то на каждом шаге процесса должны выполняться равенства

$$u_1(k) + a(n-k)u_2(k) = -d(n-k); \quad k = \overline{1, n},$$

$$d(n-k) = a(n-k)b_2 + \frac{N_1 + a(k)N_2}{n}. \quad (6)$$

**Алгоритмы локально-оптимального управления**

Вследствие линейности целевой функции (4) и разложения терминальной невязки (6) исходная задача оптимального управления



распадается на ряд локальных задач выбора управлений  $u_1(k), u_2(k)$ , обеспечивающих минимум затрат на каждом шаге процесса:

$$J(k) = c_1 u_1(k) + c_2 u_2(k) \Rightarrow \min_{u_1(k), u_2(k)}$$

при ограничениях

$$u_1(k) + a(n-k)u_2(k) = -d(n-k);$$

$$0 \leq u_1(k) \leq u_1; \quad 0 \leq u_2(k) \leq u_2; \quad k = \overline{1, n}.$$

Каждая из этих задач представляет собой элементарную задачу линейного программирования с двумя переменными, решение которой имеет вид:

$$u_2^*(k) = \min \left\{ -\frac{c_1 d(n-k)}{c_2 - a(n-k)c_1}; -u_2 \right\}; \quad (7)$$

$$u_1^*(k) = \min \left\{ -d(n-k) - a(n-k)u_2^*(k); u_1 \right\}.$$

Здесь  $u_1, u_2$  – предельные значения управляющих параметров, которые определяются исходя из боевых возможностей группировки по огневому поражению и восполнению собственных потерь. В частности они могут быть рассчитаны по формулам

$$u_1 = \mu_1 N_1; \quad u_2 = -\lambda_2 N_1, \quad (8)$$

где  $\mu_1, \lambda_2$  – предельные значения вероятностей (интенсивностей) огневое поражение и восполнения единичного объекта группировки.

Таким образом, получен алгоритм локально-оптимального управления процессами поражения противника и восполнения собственных потерь, обеспечивающий ми-

нимум затрат и требуемый уровень количественного соотношения сил противоборствующих сторон за заданное время боевых действий.

Исследования алгоритма показали, что близким к нему по конечным результатам является приближенно оптимальный алгоритм, в котором огневое поражение и восполнение потерь на каждом шаге осуществляется с заданным коэффициентом количественного соотношения сил  $\eta$  относительно противника в пределах боевых возможностей группировки:

$$u_2(k) = \min \left\{ \eta \lambda_2 m_2(k-1); u_2 \right\};$$

$$u_1(k) = \min \left\{ \eta \mu_1(k-1) [N_1 - m_1(k-1)]; u_1 \right\}. \quad (9)$$

$$\text{где } \mu_1(0) = \frac{u_1}{N_1};$$

$$u_1(1) = \min \left\{ \eta \mu_1(0) \lambda_2 N_2; u_1 \right\}.$$

На рисунках 1 – 3 показаны графики изменения количественного соотношения численностей группировок, а также потребные интенсивности поражения и восполнения группировки 1 в ходе боевых действий для оптимального и квазиоптимального алгоритмов управления при следующих исходных данных:  $N_1 = N_2 = 100$ ;  $c_1 = c_2 = 1$ ;  $\lambda_2 = 0,1$  1/час;  $\mu_2 = 0,15$  1/час;  $u_1 = 8$ ;  $u_2 = 10$ ;  $\eta = 2$ ;  $T = 10$  часов.

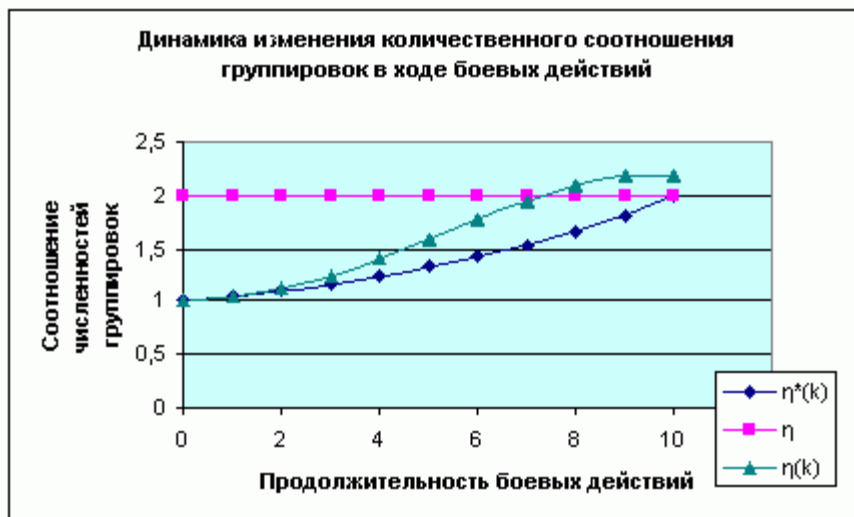


Рисунок 1

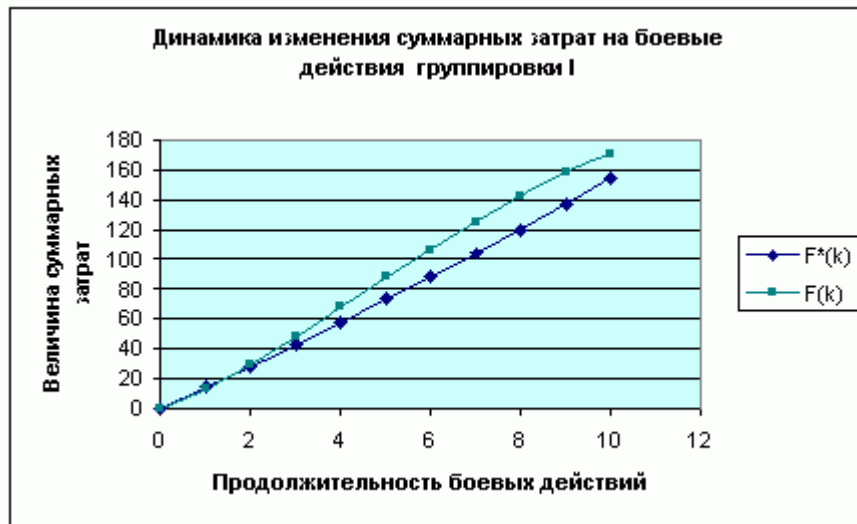


Рисунок 2

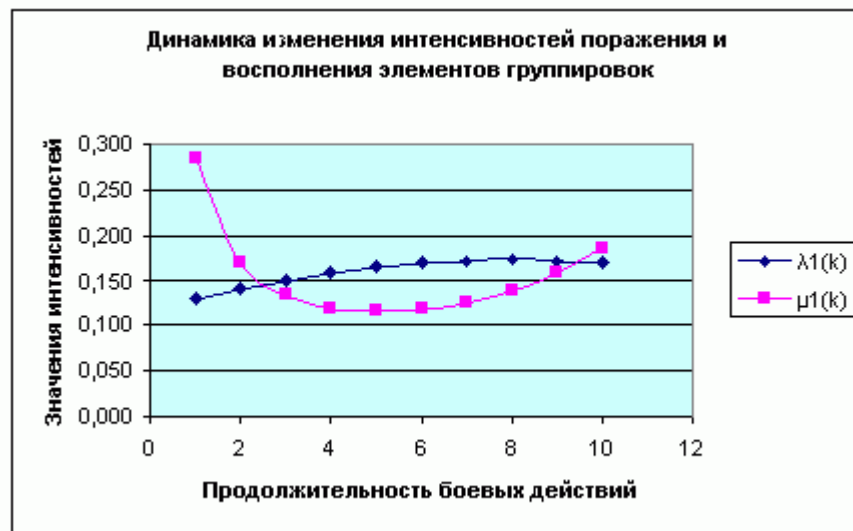


Рисунок 3

Как видно из графиков, оба алгоритма управления обеспечивают достижение конечного результата цели  $m_1(T) = 2m_2(T)$ , что по критериям оперативного искусства соответствует разгрому противника. При этом затраты на достижение данного результата практически совпадают для обоих алгоритмов (абсолютное расхождение составляет 2,3%). Алгоритмы являются устойчивыми к изменению затрат  $c_1, c_2$ . Так, например, при изменении соотношения  $\frac{c_1}{c_2}$  в 10 раз суммарная стоимость затрат изменяется в пределах 5%. Вместе с тем, алгоритмы достаточно чувствительны к ограничениям на

управляющие параметры. Например, снижение предельных значений управляющих параметров в рассматриваемом примере на 10% приводит к снижению показателя количественного соотношения сил  $\eta$  на 20%.

На рисунке 4 показаны графики зависимости численности восполняемых потерь  $u_1(k)$  в процессе боевых действий для оптимального и приближенно оптимального алгоритмов. Из графиков видно, что оптимальный алгоритм управления является более «мягким» и обеспечивает монотонное увеличение восполняемой численности потерь.

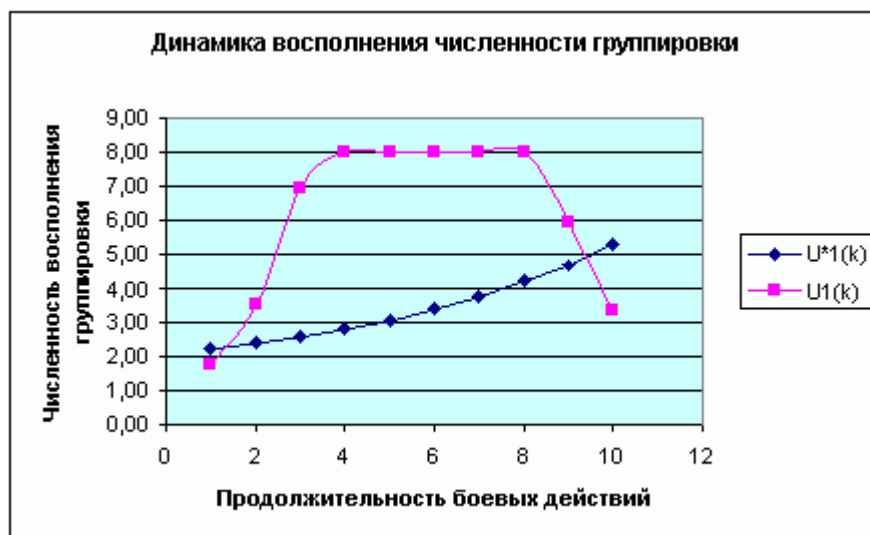


Рисунок 4

Такое управление является более предпочтительным с точки зрения его практического осуществления.

Приближенно оптимальный алгоритм управления (9) может успешно использоваться в случае, когда оперирующая сторона имеет достоверную информацию только о численности противника  $m_2(k)$  и собственных потерях  $V_1(k)$  в каждый дискретный момент времени. В этом случае приближенно оптимальный алгоритм управления будет иметь вид:

$$u_2(k) = \min \{ \eta V_1(k-1); u_2 \};$$

$$u_1(k) = \min \{ \eta \mu_1(k-1)[N_1 - m_1(k-1)]; u_1 \}; \quad (10)$$

$$m_1(k) = m_1(k-1) - V_1(k) + u_1(k),$$

где  $V_1(0) > 0$  – прогнозируемые потери оперирующей стороны в начальный момент времени;

$$u_1(1) = \min \{ \eta \mu_1(k-1)V_1(0); u_1 \};$$

$$\mu_1(0) = \frac{u_1}{N_1}.$$

Нетрудно заметить, что при  $V_1(0) = \lambda_2 N_2$  данный алгоритм полностью совпадает с алгоритмом (9). Качество работы данного алгоритма будет зависеть только от точно-

сти прогноза и оценки собственных потерь в ходе боевых действий.

Полученные алгоритмы управления процессом противоборства могут быть использованы в системах информационной поддержки принятия решений в задачах военного планирования.

#### Список использованных источников

- 1 Морз Ф.М., Кимбелл Д.Е. Методы исследования операций / Пер. с англ. Под ред. А.Ф. Горохова. – М.: Сов. Радио, 1956.
- 2 Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. – М.: Воениздат, 1963.
- 3 Татарченко П.Н., Кунцев Л.Н., Мещеряков Г.А. и др. Математические модели боевых действий. – М.: Сов. Радио, 1969.
- 4 Гермейер Ю.Б. Введение в исследование операций. – М.: Наука, 1971.
- 5 Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука, 1972.
- 6 Тараканов К.В. Математика и вооруженная борьба. – М.: Воениздат, 1974.
- 7 Буравлев А.И. Задача оптимального управления динамикой противоборства вероятностных автоматов в условиях полной наблюдаемости // Системный анализ, информатика, оптимизация. Сб. научных трудов Международной академии информатизации «В мире науки». – М.: 1996.
- 8 Буравлев А.И., Гордеев В.С. Модель динамики противоборства неоднородных группировок сил // Вооружение и экономика, 2009, № 5.
- 9 Чаки Ф. Современная теория управления / Пер с англ. – М.: Мир, 1975.