

Буравлев А.И.

Доктор технических наук, профессор

Тимофеев М.В.

Анализ динамики противоборства однородных группировок при различных стратегиях огневых воздействий

В статье рассматривается марковская модель противоборства однородных группировок с учетом произвольного распределения огневых воздействий по противнику. В рамках данной модели анализируются типовые стратегии целераспределения. Для этих стратегий получены дифференциальные уравнения для средних численностей и дисперсий численностей противоборствующих группировок. Сформулирована задача оптимального целераспределения в игровой постановке. Получена минимаксная стратегия целераспределения, гарантирующая каждой из сторон максимальный уровень уцербна на конечном интервале времени боя.

В теории и практике исследования операций широкое применение находят аналитические модели противоборства, основанные на марковских процессах и известные в литературе как модели «динамики средних» [1,2,3].

Огневое воздействие сторон в этих моделях организуется на основе равновероятного распределения по наблюдаемым объектам противника. Для этого случая получены дифференциальные уравнения для средних численностей в зависимости от того, наблюдается или нет факт поражения объектов противника.

В данной работе рассматривается модель противоборства однородных группировок с применением различных стратегий огневых воздействий. Проводится сравнительный анализ типовых стратегий огневых воздействий и строится оптимальная стратегия на основе игрового подхода.

Описание модели. Рассматривается противоборство двух однородных группировок с начальными численностями $N^{(1)}$, $N^{(2)}$. Каж-

дая боевая единица сторон осуществляет огневое воздействие по объектам противника в соответствии с матрицами целераспределения

$\gamma^{(1)} = [\gamma_{ij}^{(1)}]_{N^{(1)} \times N^{(2)}}$, $\gamma^{(2)} = [\gamma_{ji}^{(2)}]_{N^{(2)} \times N^{(1)}}$, где

вероятности $\gamma_{ij}^{(1)} \geq 0$, $\gamma_{ji}^{(2)} \geq 0$ и удовлетворяют условиям нормировки

$$\sum_{j=1}^{N^{(2)}} \gamma_{ij}^{(1)} = 1, \quad \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \gamma_{ij}^{(2)} = 1$$

Поскольку группировки однородные, то огневое воздействие осуществляется с одинаковой для всех боевых единиц стороны поражающей интенсивностью. Поток поражающих выстрелов принимается пуассоновским и стационарным за время боя. Восстановление группировок в ходе боя не производится.

Схема взаимодействия сторон представлена двудольным графом на рисунке 1, где прямоугольники изображают боевые единицы сторон, а стрелками показано распределение огневых воздействий между ними.

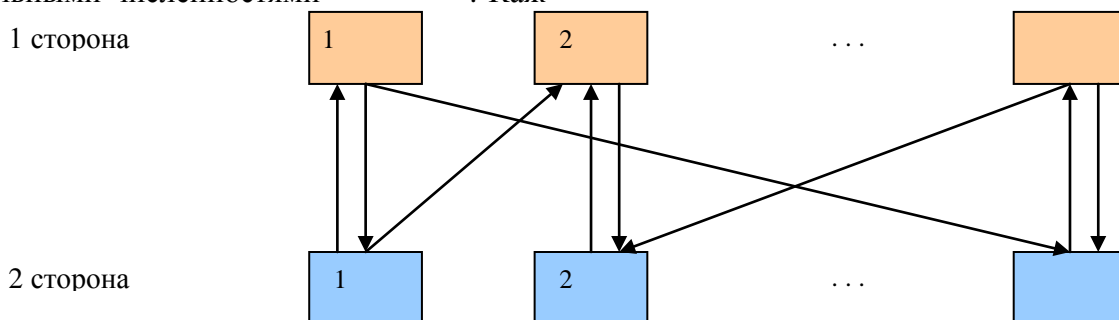


Рисунок 1 – Схема взаимодействия противоборствующих сторон

Состояние боевой единицы в произвольный момент времени характеризуется слу-

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая боевая единица боеспособна;} \\ 0, & \text{если } i\text{-ая боевая единица поражена.} \end{cases}$$

и связанной с ним вероятностью боеспособного состояния $p_i(t) = P(X_i(t) = 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{dp_i^{(1)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(2)} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \gamma_{ij}^{(2)} p_j^{(2)}(t); & (i = \overline{1, N^{(1)}}); \\ \frac{dp_j^{(2)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(1)} \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \gamma_{ji}^{(1)} p_i^{(1)}(t); & (j = \overline{1, N^{(2)}}) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями $p_i^{(1)}(0) = 1$; $p_j^{(2)}(0) = 1$.

При заданных матрицах целераспределения система уравнений (1) интегрируется обычным порядком, в результате получаем динамику вероятностей состояний боевых единиц сторон.

В силу независимости индикаторов состояния $X_i(t)$ математическое ожидание и дисперсия численностей группировок определяются на основе следующих соотношений:

$$m(t) = M \left[\sum_{i=1}^N X_i(t) \right] = \sum_{i=1}^N p_i(t); \quad (2)$$

$$D(t) = D \left[\sum_{i=1}^N X_i(t) \right] = \sum_{i=1}^N p_i(t) q_i(t), \quad (3)$$

где $M[\cdot]$ - оператор математического ожидания; $D[\cdot]$ - оператор дисперсии; $q_i(t) = 1 - p_i(t)$ - вероятность поражения боевой единицы в текущий момент времени.

Для оценки соотношения сил противоборствующих сторон используется коэффициент:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i^{(1)}(t)}{dt} &= -\frac{\lambda^{(2)}}{N^{(1)}} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} p_j^{(2)}(t) = -\frac{\lambda^{(2)}}{N^{(1)}} m^{(2)}(t); & (i = \overline{1, N^{(1)}}); \\ \frac{dp_i^{(2)}(t)}{dt} &= -\frac{\lambda^{(1)}}{N^{(2)}} \sum_{i=1}^{N^{(1)}} p_i^{(1)}(t) = -\frac{\lambda^{(1)}}{N^{(2)}} m^{(1)}(t); & (j = \overline{1, N^{(2)}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно из уравнений, вероятности состояний боевых единиц сторон изменяются с одинаковой динамикой, зависящей от на-

чайным индикатором:

Выпишем систему уравнений Колмогорова для вероятностей боеспособного состояния боевых единиц сторон [1]:

$$K_{cc} = \frac{m^{(1)}(t)}{m^{(2)}(t)},$$

по величине которого оценивают исход боя.

Так, например, $K_{cc}(t) \geq 3$ соответствует разгрому противника; при $K_{cc}(t) \geq 2$ достигается абсолютное превосходство над противником; при $K_{cc}(t) > 1$ реализуется численный перевес над противником [4].

Анализ стратегий целераспределения. Рассмотрим типовые стратегии распределения огневых воздействий и найдем соответствующие выражения для вероятностей состояний, математического ожидания и дисперсии численностей сторон.

А) Равновероятное распределение при отсутствии информации о результатах огневого воздействия (стрельба без переноса огня).

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{N^{(1)}}; \quad \gamma_{ji}^{(2)} = \frac{1}{N^{(2)}}$$

В этом случае система уравнений для вероятностей состояний сторон принимает вид:

первых численностей и интенсивностей поражающего действия сторон.

Суммируя левые и правые части уравнений (4), получаем известные выражения для



математических ожиданий численностей сторон [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{dm^{(1)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(2)}m^{(2)}(t); \quad m^{(1)}(0) = N^{(1)}; \\ \frac{dm^{(2)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(1)}m^{(1)}(t); \quad m^{(2)}(0) = N^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя выражение (3) по времени, после преобразования получаем уравнения для дисперсий

$$\begin{aligned} \frac{dD^{(1)}(t)}{dt} &= \lambda^{(2)}m^{(2)}(t) \left[\frac{2m^{(1)}(t)}{N^{(1)}} - 1 \right]; \\ D^{(1)}(0) &= 0; \\ \frac{dD^{(2)}(t)}{dt} &= \lambda^{(1)}m^{(1)}(t) \left[\frac{2m^{(2)}(t)}{N^{(2)}} - 1 \right]; \\ D^{(2)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (6) следует, что максимум дисперсии численности достигается при численности сторон равной половине от начальной численности:

$$\frac{m(t)}{N} = \frac{1}{2}.$$

На рисунках 2, 3 приведены графики изменения математического ожидания и дисперсий численностей противоборствующих группировок при следующих исходных данных: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,15$ 1/ мин; $N^{(1)} = 3$; $N^{(2)} = 5$.

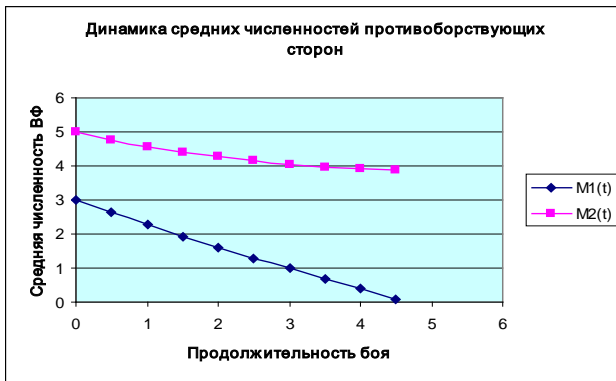


Рисунок 2 – Динамика средних численностей сторон

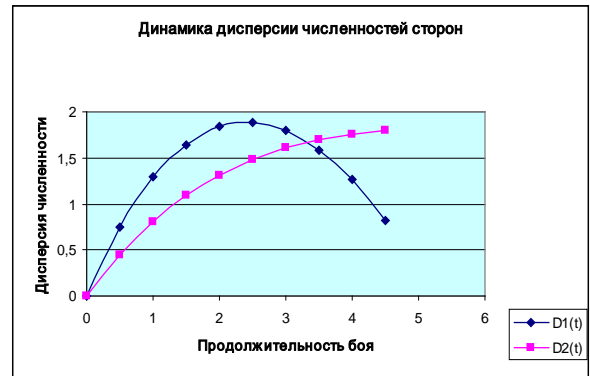


Рисунок 3 – Динамика дисперсии численностей сторон

Б) Равновероятное распределение при наличии информации о результатах огневого воздействия (стрельба с переносом огня).

В этом случае стрельба ведется только по боеспособным единицам противника с равновероятным распределением сил сторон:

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{m^{(2)}(t)}; \quad \gamma_{ji}^{(2)} = \frac{1}{m^{(1)}(t)}.$$

При этом целераспределение изменяется в процессе боя, поскольку изменяются средние численности сторон.

Система уравнений для вероятностей состояний боевых единиц, средних численностей и дисперсий численностей сторон принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i^{(1)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(2)} \frac{m^{(2)}(t)}{m^{(1)}(t)}; \quad (i = \overline{1, N^{(1)}}); \\ \frac{dp_j^{(2)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(1)} \frac{m^{(1)}(t)}{m^{(2)}(t)}; \quad (j = \overline{1, N^{(2)}}). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm^{(1)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(2)} \frac{N^{(1)}}{m^{(1)}(t)} m^{(2)}(t); \\ m^{(1)}(0) &= N^{(1)}; \\ \frac{dm^{(2)}(t)}{dt} &= -\lambda^{(1)} \frac{N^{(2)}}{m^{(2)}(t)} m^{(1)}(t); \\ m^{(2)}(0) &= N^{(2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD^{(1)}(t)}{dt} &= \lambda^{(2)} \frac{m^{(2)}(t)}{N^{(1)}m^{(1)}(t)} \left[\frac{2m^{(1)}(t)}{N^{(1)}} - 1 \right]; \\ D^{(1)}(0) &= 0; \\ \frac{dD^{(2)}(t)}{dt} &= \lambda^{(1)} \frac{m^{(1)}(t)}{N^{(2)}m^{(2)}(t)} \left[\frac{2m^{(2)}(t)}{N^{(2)}} - 1 \right]; \\ D^{(2)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$



Из уравнений (7)...(9) видно, что при наличии информации о состоянии противника эффективность огневого воздействия по нему существенно возрастает. Поэтому для снижения собственных потерь необходимо принимать меры по маскировке собственных сил, информационному противодействию средствам разведки и наблюдения противника.

На рисунке 4 показана динамика коэффициента K_{cc} для равновероятного целераспределения без переноса и с переносом огня.

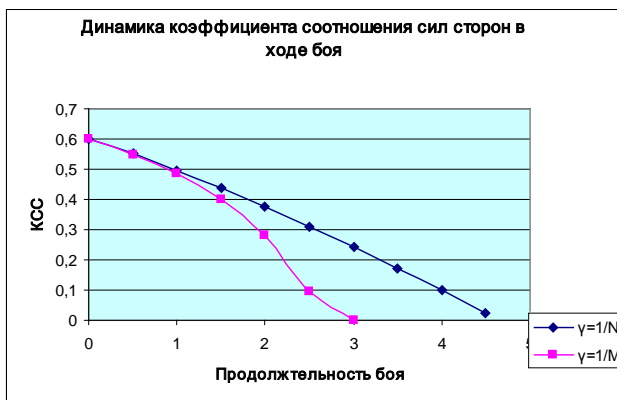


Рисунок 4 – Динамика коэффициента соотношения сил при равновероятном целераспределении без переноса и с переносом огня

В) Равновероятное целераспределение на основе прогноза состояний объектов противника.

В том случае, если наблюдение за объектами противника в ходе боя затруднено или сопровождается активным информационным противодействием, то распределение огня возможно на основе прогноза состояний объектов противника.

Этот прогноз можно осуществить по уравнениям для вероятностей состояний объектов противника (7). С этой целью вводится порог \hat{P} для определения индикатора состояний объектов противника:

$$X_j^{(2)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_j^{(2)}(t) \geq \hat{p} \\ 0 & \text{если } p_j^{(2)}(t) < \hat{p} \end{cases}$$

после чего рассчитывается правдоподобная оценка для числа боеспособных единиц:

$$\hat{m}^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^{N^{(2)}} X_j^{(2)}$$

относительно которой рассчитывается параметр целераспределения:

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\hat{m}^{(2)}(t)}$$

В этом случае в системах уравнения (7)...(9) вместо математического ожидания $m^{(2)}(t)$ необходимо использовать ее оценку $\hat{m}^{(2)}(t)$.

На рисунке 5 показаны графики изменения коэффициента соотношения сил для исходных данных : $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,15$ 1/мин; $N^{(1)} = 3$; $N^{(2)} = 5$; $\hat{p} = 0,3$.

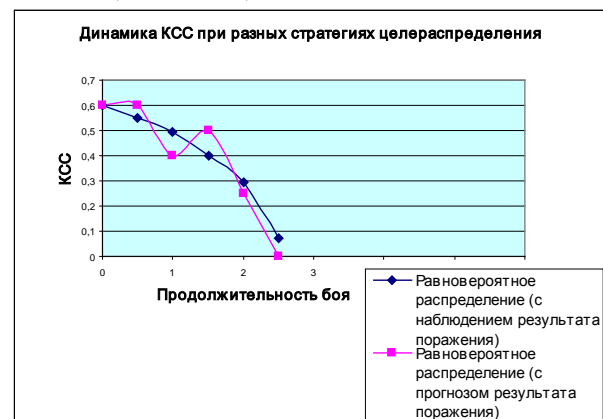


Рисунок 5 – Динамика коэффициента соотношения сил при равновероятном распределении и переносе огня

Как видно из рисунка 5. наличие информации о результатах огневого воздействия обеспечивает более высокую стабильность коэффициента соотношения сил.

Г) Детерминированное распределение

$$(\gamma_{ij}^{(1)} = 0 \cup 1).$$

В качестве детерминированных рассмотрены распределения огневого воздействия первой стороны «один на один» и «все на один», при равновероятном распределении огневого воздействия второй стороны. На рис. 6 показаны графики изменения $K_{cc}(t)$ для этих стратегий при тех же исходных данных, что и в случае В).

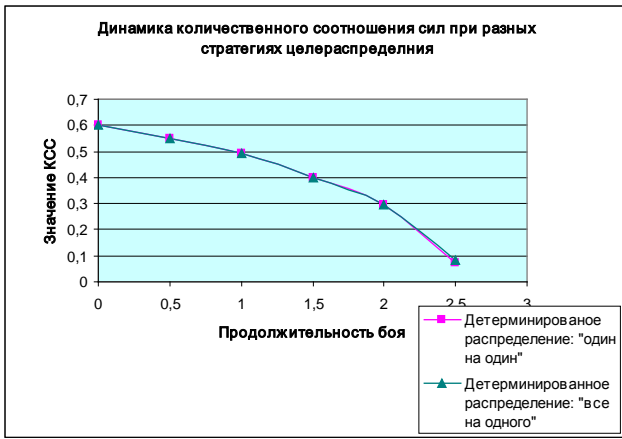


Рисунок 6.-Динамика количественного соотношения сил при детерминированном распределении огневых воздействий первой стороны

Видно, что независимо от характера детерминированного распределения сил первой стороны («один на один» или «все на одного») динамика соотношения сил остается неизменной. Это связано с тем, что соотношение сил определяется отношением средних численностей, которые не изменяются от порядка поражаемых единиц противника.

В том случае, если соотношение сил определить просто отношением боеспособных

$$K_{CC} = \frac{\sum_{i=1}^{N^{(1)}} X_i^{(1)}(t)}{\sum_{j=1}^{N^{(2)}} X_j^{(2)}(t)}$$

единиц, то результат будет совершенно другой. На рисунке 7 показаны графики текущего соотношения сил при действии первой стороны «один на один» и «все на одного» при равновероятном распределении сил второй стороны.

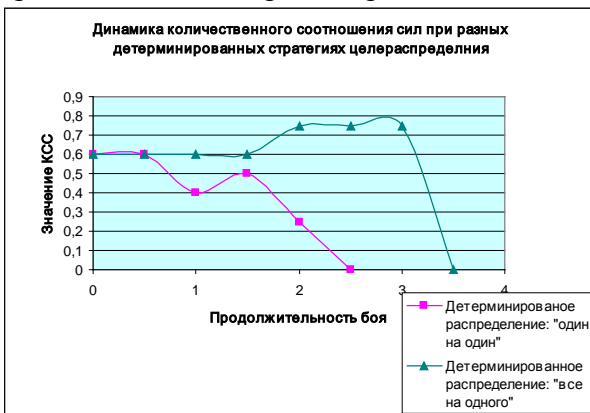


Рисунок 7.-Динамика количественного соотношения сил при использовании первой стороной стратегии «все на одного» и «один на один»

По графику видно, что при действии «один на один», первая сторона проигрывает второй стороне вследствие ее численного перевеса. Однако, если первая сторона будет действовать по схеме «все на одного», то она в ходе боя может даже усилить свои позиции и продержаться более длительное время до своего полного уничтожения.

В военной теории и практике концентрация сил на направлении удара является фундаментальным принципом военного искусства. Этот принцип, как видим, реализуется и в рассматриваемой математической модели боя, что в определенной степени подтверждает ее адекватность.

Определенный интерес представляет задача нахождения игровых стратегий целераспределения [3]. Для этого рассмотрим процесс противоборства как дискретный процесс с интервалом дискретности Δt . Используя уравнения (1), найдем приращения средних численностей противоборствующих сторон $\Delta m^{(1)}(k)$, $\Delta m^{(2)}(k)$ на k -ом шаге процесса:

$$\begin{aligned} \Delta m^{(1)}(k) &= -\lambda^{(2)} \Delta t \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \gamma_{ji}^{(2)}(k) p_j^{(2)}(k-1) \\ \Delta m^{(2)}(k) &= -\lambda^{(1)} \Delta t \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \gamma_{ij}^{(1)}(k) p_i^{(1)}(k-1) \end{aligned} \quad (10)$$

где $k = E \left[\frac{t}{\Delta t} \right]$ - текущий номер шага процесса; $E[x]$ - функция выделения целой части x .

В качестве критерия оптимизации целераспределения рассмотрим отношение приращений средних численностей сторон на каждом шаге

$$V(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \frac{\Delta m^{(2)}(\gamma^{(1)}; k)}{\Delta m^{(1)}(\gamma^{(2)}; k)} \quad (11)$$

В ходе боя каждая из сторон желает получить гарантированный максимум потерь противника $\Delta m^{(1)}(k)$, $\Delta m^{(2)}(k)$, что приводит к максимуму показателя (11):

$$V^*(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \frac{\max_{\gamma^{(1)}} \Delta m^{(2)}(\gamma^{(1)}; k)}{\max_{\gamma^{(1)}} \min_{\gamma^{(2)}} \Delta m^{(1)}(\gamma^{(2)}; k)} = \max_{\gamma^{(1)}} \min_{\gamma^{(2)}} V(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$$



Найдем приращения $\Delta m^{(1)}(k)$, $\Delta m^{(2)}(k)$ для детерминированного целераспределения. Для этого подставим в правые части уравнений (10) значения $\gamma_{ij} = 0 \cup 1$, сохра-

ним условия нормировки $\sum_{j=1}^{N^{(2)}} \gamma_{ij}^{(1)} = 1$; $\sum_{i=1}^{N^{(1)}} \gamma_{ji}^{(2)} = 1$. В результате получим:

$$\Delta m^{(1)}(k) = -\lambda_2 m_2(k-1),$$

$$\Delta m^{(2)}(k) = -\lambda_1 m_1(k-1).$$

Поскольку $0 \leq \gamma_{ij} \leq 1$, то выполняются следующие неравенства

$$\sum_{j=1}^{N^{(2)}} \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \gamma_{ji}^{(1)}(k) p_i^{(1)}(k-1) \leq \sum_{i=1}^{N^{(1)}} p_i^{(1)}(k-1) = m^{(1)}(k-1);$$

$$\sum_{i=1}^{N^{(1)}} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \gamma_{ij}^{(2)}(k) p_j^{(2)}(k-1) \leq \sum_{j=1}^{N^{(2)}} p_j^{(2)}(k-1) = m^{(2)}(k-1).$$

Отсюда следует, что максиминное значение показателя $V(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$ реализуется при детерминированных распределениях огневых воздействий противоборствующих сторон, т.е.

$$\max_{\gamma^{(1)}} \min_{\gamma^{(2)}} V(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \frac{\Delta m^{(2)}(k-1)}{\Delta m^{(1)}(k-1)}.$$

Таким образом, детерминированное распределение огневых воздействий гарантирует обеим сторонам нанесение максимального ущерба противнику.

На рис.8 показано изменение количественного соотношения сил в ходе боя при минимаксном распределении огневых воздействий сторон для рассматриваемого числового примера.

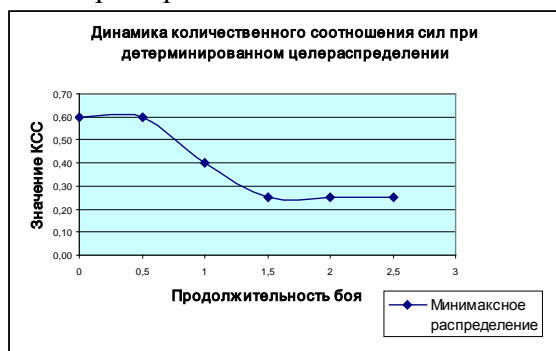


Рисунок 8 – Динамика количественного соотношения сил при минимаксном распределении огневых воздействий сторон.

Исследование детерминированных стратегий типа «один на одного», «несколько на одного» и «все на одного» показало, что наиболее эффективной является стратегия «все на одного».

Закключение. Полученная в работе аналитическая модель позволяет исследовать процесс огневого противоборства однородных группировок с использованием различных стратегий целераспределения. Для типовых стратегий целераспределения получены дифференциальные уравнения для математических ожиданий и дисперсий численностей противоборствующих сторон. Исследование типовых стратегий огневого противоборства показало, что в целом они значимо влияют на ход и исход боя, что говорит о необходимости учета стратегий целераспределения при моделировании боевых действий. Показано, что минимаксной стратегией, гарантирующей нанесение максимального ущерба противнику, является детерминированная стратегия с максимальной концентрацией огневых воздействий и с переносом огня после поражения объектов противника.

Список использованных источников

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Наука, 1972.
2. Абчук В.А. и др. Справочник по исследованию операций/ Под общ. Ред. Ф.А. Матвейчука.- Воениздат, 1979.
3. Гермейер Ю.Б. Введение в исследование операций. – М.: Наука, 1971.
4. Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г., Смоленков В.А. Введение в теорию эффективности боевых действий ракетных войск и артиллерии. Монография. – М.: ВАГШ, 2008.