Б.Н.Горевич, доктор технических наук, профессор

Применение стохастических сетевых графов для планирования комплекса работ в условиях неопределенности

Проведен анализ и показаны недостатки существующего подхода к сетевому планированию в условиях неопределенности. Предложен математический аппарат для оценки качества плана выполнения комплекса стохастических работ и принятия решений по его улучшению.

В 60-70-е годы прошлого века, в период становления теории исследования операций как самостоятельной науки, в рамках данного научного направления были созданы и получили бурное развитие методы сетевого планирования работ (в иностранных публикациях известны как методы *CPM* (*Critical Path Method* – метод критического пути) и *PERT* (*Program (Project) Evaluation and Review Technique* – метод анализа и оценки программ (проектов)). Впервые методы сетевого планирования были применены в США в конце 50-х годов – метод *CPM* был применен при управлении строительными работами, метод *PERT* – для реализации проекта разработки ракетной систем «Поларис», в ответ на успехи Советского Союза в ракетной отрасли. В СССР сетевые методы начали применять с 1963 г., – первыми объектами сетевого планирования были стройки Бурштынской ГРЭС, Лисичанского химкомбината и моста через р.Днепр в Киеве [1].

Появление и последующее широкое практическое применение данных методов связано с их прикладным характером – они предназначены для описания (моделирования) развертывающихся во времени организационных процессов различного вида, особенностью которых является обусловленность начала одних работ (операций) окончанием других и независимое одновременное выполнение нескольких работ (ветвление операций процесса). С использованием сетевых моделей удобно планировать комплекс работ, выполняемых в условиях временных, материальных и людских ограничений. К таким работам относятся, например, научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы (в результате планирования производится распределение и взаимоувязка этапов работ между исполнителями НИОКР), техническая эксплуатация образцов вооружения (определяется порядок проведения различных видов обслуживания и ремонта), этапы выполнения программы вооружения и межведомственных комплексных целевых программ развития вооружения (осуществляется увязка этапов программ вооружения по срокам и исполнителям).

В основе подхода, реализованного в методах сетевого планирования, лежит представление комплекса выполняемых работ в виде сетевого графа – совокупности окружностей, обозначающих события (факты начала или завершения работ) и дуг (работ) их соединяющих. Граф, как правило, размечают, приписывая дугам продолжительности планируемых работ, а окружностям – номера событий и их показатели (сроки начала, завершения и резервы времени выполнения работ, связанных с событием). Пример простейшего графа приведен на рисунке 1. Совокупность сетевого графа и расчетных формул составляют сетевую модель.

В зависимости от характера описываемых работ различают детерминированные и стохастические сетевые модели. Детерминированные модели применяются для описания комплекса работ с известными продолжительностями, а стохастические – для работ со случайными продолжительностями; в последнем случае известны законы распределения продолжительностей этих работ, или, по крайней мере, их числовые характеристики.

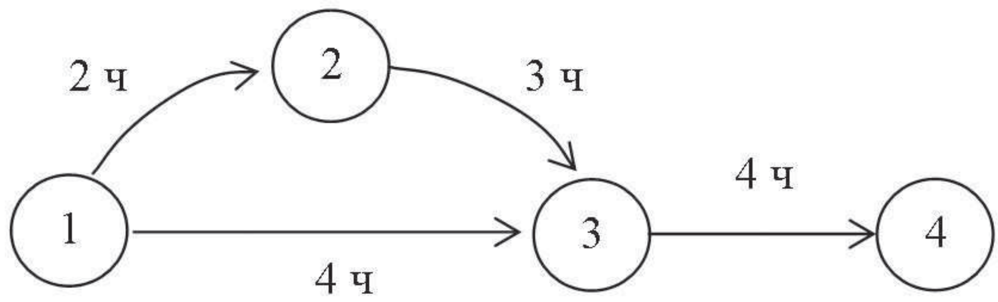

Рисунок 1 – Пример размеченного детерминированного сетевого графа

Моделирование позволяет провести логико-временную имитацию порядка выполнения работ и оценить качество плана выполнения работ по определенным показателям, таким, как предельный срок окончания всего комплекса работ, продолжительность простоев на отдельных ветвях графа в ожидании выполнения других работ, степень загруженности лиц, выполняющих работы и др. Сетевое моделирование является подчиненным этапом по отношению к собственно сетевому планированию. Целью сетевого планирования является синтез оптимального (в смысле некоторого критерия) плана выполнения работ, а содержанием – взаимоувязка комплекса выполняемых работ и корректировка их параметров.

Аппарат детерминированного сетевого моделирования в настоящее время глубоко проработан и доведен до практической реализации в виде различных специализированных программных продуктов и программных продуктов общего назначения, таких, как, например, широко применяемый математический пакет *Project*. Основополагающим понятием при анализе качества детерминированного графа является понятие пути, под которым понимается цепь последовательно выполняемых по ветвям графа работ, начиная от исходного и до завершающего, а основными объектами анализа – продолжительности путей L_s, которые определяются как сумма продолжительностей работ путей. Содержание анализа детерминированного графа сводится к выявлению так называемого критического пути – пути с максимальным значением продолжительности $L_{кр}=max(L_s)$, $s=\overline{1,N}$, где N – число событий графа, и оценки степени влияния на нее параметров отдельных работ. Так, для приведенного на рисунке 1 графа продолжительность первого пути (события 1-2-3-4) составляет $L_1=9\,ч$, второго пути (события 1-3-4) $L_2=8\,ч$. Первый путь является критическим, т. е. Lкр = 9 ч. Критерием детерминированного сетевого планирования является, как правило, минимизация продолжительности критического пути.

Кроме детерминированных сетевых моделей, большое значение для практики имеют стохастические сетевые модели. Это обусловлено тем, что обычно работы редко могут быть выполнены точно в заранее определенный срок, зачастую длительности работ можно считать случайными величинами с известными из опыта законами распределения, или с законами распределения, определяемыми, например, экспертным способом, как это показано в [2].

Для анализа сетевых графов со случайными продолжительностями работ в настоящее время используется методический подход, первоначально описанный в монографии [2] и в последующем детализированный в ряде публикаций (см., например, [3-12]), однако не изменивший при этом своего существа. Основными объектами анализа в данном подходе, так же как и в подходе для детерминированного случая, являются продолжительности путей, а содержанием подхода является отыскание критического пути на основе суммирования случайных продолжительностей работ, составляющих отдельные пути. При этом, исходя из посылки, что продолжительности работ сети t_{ij} являются независимыми случайными величинами, в качестве анализируемых характеристик продолжительностей каждого из путей L_s используются их математические ожидания m_s и дисперсии (среднеквадратические отклонения σ_s), определяемые соответственно суммированием математических ожиданий и дисперсий продолжительностей работ. На основе центральной предельной теоремы теории вероятностей принимается, что закон распределения продолжительности каждого s-го пути является гауссовским с плотностью распределения $f_s(t)$ и параметрами m_s, σ_s. В качестве возможного варианта нахождения закона распределения продолжительности пути $f_s(t)$ (более трудоемкого, но и более точного) рассматривается также применение известного в теории вероятностей правила композиции плотностей распределения суммируемых независимых случайных величин t_{ij}.

Далее на основе полученных законов распределения путей $f_s(t)$ определяется критический путь. В основе выбора критического пути, как правило, лежит вычисление вероятностей выполнения работ s-х путей за заданное (директивное) время $t_{дир}$:

$$P_s(t_{дир}) = \int_0^{t_{дир}} f_s(t)\,dt \,. \qquad (1)$$

Принимается, что путь, для которого вероятность (1) минимальна, является критическим, т. е. путем, ограничивающим продолжительность выполнения всех работ сети, и, при необходимости, предпринимаются меры по сокращению продолжительности этого критического пути.

Теоретический анализ и практическое исследование данного подхода и получаемых на его основе результатов показывают, что он, преследуя цель определения способа своевременного завершения всего комплекса работ сети, не достаточно теоретически обоснован ввиду применения показателя продолжительности пути, заимствованного из детерминированных моделей и рассчитываемого на основе сумм продолжительностей работ.

На самом деле, продолжительность любого пути стохастической сети не равна, а больше суммы продолжительностей работ, составляющих данный путь, что обусловлено наличием задержек работ, входящих в события, находящиеся на пересечении различных путей. Для детерминированной сети это утверждение также справедливо для всех путей, за исключением одного, так называемого «критического». В детерминированной сети всегда есть такой путь, на нем отсутствуют задержки в выполнении работ, он имеет максимальную сумму продолжительностей работ и, таким образом, определяет продолжительность всего комплекса работ сети. Так, для графа, представленного на рисунке 1, путь (1-2-3-4), являющийся критическим, не имеет задержек в выполнении отдельных работ, а путь (1-3-4) имеет задержку величиной 1 час в выполнении работы t_{34}, обусловленную ожиданием завершения работы t_{23}.

В стохастическом случае суммарная продолжительность работ *любого* пути является случайной величиной, поэтому в отличие от детерминированного случая пути не могут сопоставляться друг с другом по показателю продолжительности. Фактически, реализация случайных работ в каждом опыте (при каждом воспроизведении всего перечня работ сети) будет различной, и путь, имевший максимальную продолжительность в одном опыте, не обязательно будет иметь максимальную продолжительность в другом опыте. В связи с этим необходимо учитывать возможные *задержки* выполнения работ *на всех путях* стохастического графа.

Единственной характеристикой качества стохастической сети, содержащей полную информацию о *времени выполнения всего комплекса работ сети*, является *закон распределения* этого времени, рассчитываемый с учетом реальной взаимосвязи работ, в том числе с учетом возможных *задержек* выполнения работ на всех путях сети. Эта характеристика (в виде функции распределения $F_c(t)$ или плотности распределения $f_c(t)$) позволяет анализировать стохастический сетевой граф.

При таком подходе, вместо понятия критичного пути, справедливого лишь для детерминированного случая, возможно введение и применение понятия *критической работы*. Критической работой стохастической сети является та работа, которая в наибольшей степени влияет на закон распределения времени завершения всех работ сети (точнее, наиболее значимо влияет на избранный критерий синтеза сетевого плана). По степени этого влияния работы могут ранжироваться с последующим выполнением мероприятий по улучшению их характеристик.

Таким образом, основной задачей анализа стохастических сетевых графов является построение закона распределения времени завершения всего комплекса работ сети.

Исходя из определения функции распределения случайной величины и особенностей сетевых графов, таких, как единственность начального и завершающего событий, независимость продолжительностей выполняемых работ и необходимость выполнения всех работ, определяющих свершение события (всех стрелок, входящих в событие), методика построения функции распределения времени завершения всего комплекса работ сети может быть следующей.

1. Построение функции распределения осуществляется от завершающего события в направлении к более ранним событиям. Функция распределения времени свершения завершающего события является искомой функцией распределения времени завершения всего комплекса работ сети $F_c(t)=F_N(t)$.

2. В случае если в рассматриваемое *j*-е событие графа входит одна стрелка, соответствующая работе t_{ij} (см. рисунок 2а), то функция распределения времени свершения данного события определяется на основе композиции законов распределения времени свершения предыдущего (*i*-го) события и продолжительности времени t_{ij}:

$$F_j(t)=\int_0^t F_i(t-z)\,f_{ij}(z)\,dz\,.$$

3. В случае если в рассматриваемое *j*-е событие входит несколько стрелок, соответствующих работам $t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{mj}$ (см. рисунок 2б), то функция распределения времени свершения данного события, в силу указанного свойства независимости работ и необходимости выполнения всех работ для свершения рассматриваемого события, определяется как произведение результатов композиции законов распределения времени свершения событий, предшествующих каждой из работ, и продолжительности соответствующей работы:

$$F_j(t)=\prod_{i=1}^{m}\int_0^t F_i(t-z)\,f_{ij}(z)\,dz\,. \qquad (2)$$

4. Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будут определены функции распределения времени свершения всех событий сети, за исключением начального события. Для начального события функция распределения времени свершения принимается равной единице: $F_1(t)=1$, так как время свершения данного события (начала всех работ) является достоверным.

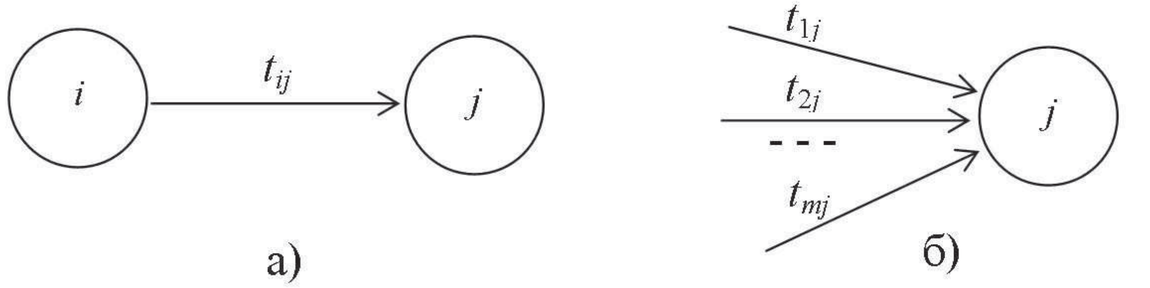

Рисунок 2 – К определению закона распределения времени свершения события *j*

Оценим описанную методику построения функции распределения времени завершения работ стохастической сети на простом примере. Пусть граф сети имеет вид, представленный на рисунке 1. Известны законы распределения продолжительностей работ 1-2, 2-3, 1-3, 3-4: $f_{12}(t)$, $f_{23}(t)$, $f_{13}(t)$, $f_{34}(t)$.

Тогда законы распределения времени свершения событий в соответствии с описанной методикой, определяются по формулам:

$$F_4(t)=\int_0^t F_3(t-z) f_{34}(z)dz ;$$

$$F_3(t)=\int_0^t F_2(t-z) f_{23}(z)dz \cdot \int_0^t f_{13}(z)dz ;$$

$$F_2(t)=\int_0^t f_{12}(z)dz .$$

Будем считать, что все законы распределения продолжительностей работ t_{ij} – гауссовские, с плотностями вида

$$f_{ij}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}}\exp\left(\frac{-(t-m_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right),$$

и параметрами, соответственно:

$m_{12}=3$ ч; $m_{23}=3$ ч; $m_{13}=6$ ч; $m_{34}=4$ ч;

$\sigma_{12}=0{,}2$ ч; $\sigma_{23}=0{,}3$ ч; $\sigma_{13}=1{,}5$ ч; $\sigma_{34}=1{,}3$ ч.

Замечание: Ввиду положительной определенности случайных продолжительностей работ t_{ij} применять для их описания гауссовские законы распределения необходимо с определенной осторожностью – параметры распределений должны быть такими, чтобы «хвосты» распределений не заходили в отрицательную область. Условием, отвечающим этому требованию, достаточным для практических расчетов, является выполнение соотношения $m_{ij} \geqslant 3$, $\sigma_{ij} \geqslant 0$. В большинстве же случаев, как показано в [2], для описания случайных величин t_{ij} приемлемым является β-распределение. Данное распределение положительно определено и имеет функцию плотности, напоминающую закон Гаусса, но ограниченную слева и справа.

В рассматриваемом примере выбор гауссовских законов распределений удовлетворяет требуемому соотношению параметров распределения и используется ввиду того, что позволяет методически более просто прийти к некоторым общим выводам, приведенным ниже.

Результат вычисления плотности распределения времени завершения всех работ сети $f_c(t)=f_4(t)$ приведен на рисунке 3.

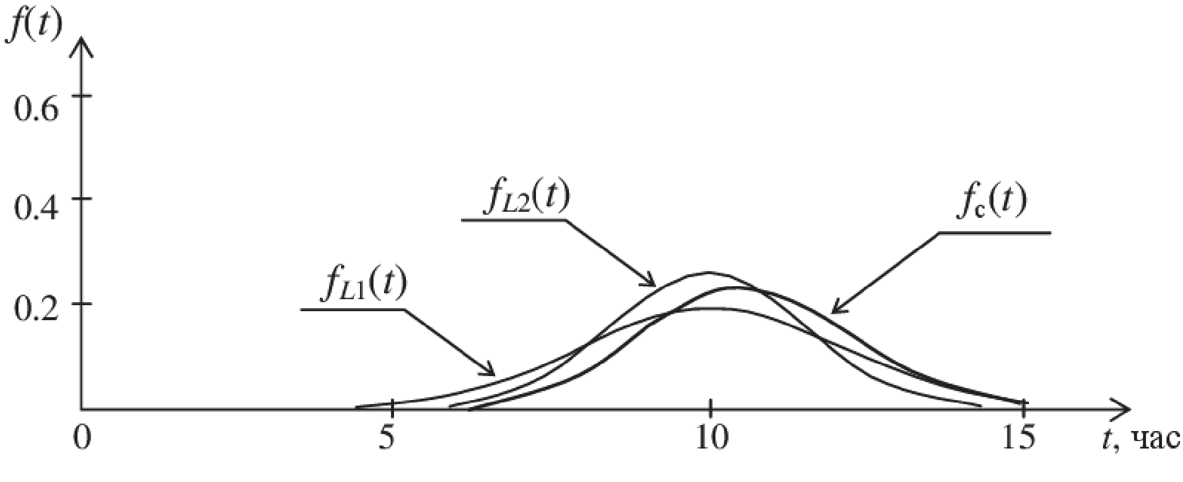

Рисунок 3 – Плотности распределения времени завершения всего комплекса работ сети и продолжительностей путей L_1, L_2

Для сравнения, в соответствии с известным подходом, описанным выше, вычислим законы распределения продолжительностей путей анализируемой сети. Для продолжительности пути L_1 (события 1-3-4), используя композицию плотностей распределения величин t_{13} и t_{34}, получаем:

$$f_{L1}(t)=\int_0^t f_{13}(t-z)f_{34}(z)dt .$$

Для продолжительности пути L_2 (события 1-2-3-4) композиция плотностей распределения продолжительностей работ имеет вид:

$$f_{L2}(t)=\int_0^t f_3(t-z)f_{34}(z)dz ,$$

где $f_3(t)=\int_0^t f_{12}(t-z)f_{23}(z)dz$.

Результаты вычислений функций $f_{L1}(t)$ и $f_{L2}(t)$ также приведены на рисунке 3.

Из сопоставления функций $f_c(t)$ и $f_{L1}(t)$, $f_{L2}(t)$, приведенных на рисунке 3, видно, что существующий подход к оценке качества стохастической сети, основанный на анализе продолжительностей путей как сумм продолжительностей работ, дает излишне оптимистический результат по сравнению с предлагаемым подходом – плотности распределения продолжительностей отдельных путей $f_{L1}(t)$ и $f_{L2}(t)$ смещены влево относительно плотности распределения времени завершения всего комплекса работ сети $f_c(t)$. Данное обстоятельство обусловлено взаимной задержкой работ, входящих в событие 3, в ожидании выполнения работ на другой ветви графа, чего не учитывает существующий подход к анализу стохастических графов. Фактически существующий подход не позволяет оценить взаимное влияние путей друг на друга, которое имеет место, несмотря на независимость продолжительностей выполняемых работ сети. Это влияние обусловлено наличием в графе сети событий, являющихся фактом завершения одновременно нескольких независимых работ (для графа на рисунке 1 – это событие 3). Последующие работы не могут выполняться, пока не будут выполнены все работы, входящие в данное событие. Таким образом, реальная случайная продолжительность пути должна определяться с учетом указанных взаимных задержек, что и позволяет сделать формула (2) предлагаемого подхода.

Очевидно, что для более сложных сетевых графов, имеющих большее число событий с несколькими входными стрелками работ, величина расхождения законов распределения продолжительностей отдельных путей графа и времени завершения всего комплекса работ сети будет увеличиваться.

Также следует обратить внимание на следующий факт – несмотря на то, что все работы сети имеют гауссовские распределения продолжительностей, в рассматриваемом случае закон распределения времени завершения всех работ сети $f_c(t)$ не является гауссовским, что также обусловлено влиянием описанной выше задержки выполнения работ.

В приведенном примере плотности распределения продолжительностей путей L_1 и L_2, в силу свойств композиции законов распределения и что видно также из рисунка 3, являются гауссовскими и имеют одинаковое значение параметра $m=10$ ч, но разные значения параметров σ ($\sigma_{L1}=2{,}017$ ч, $\sigma_{L2}=1{,}985$ ч). Ввиду этого, как следует из анализа рисунка 3, критерий (1) минимума вероятности $P_s(t_{дир})$ теряет смысл, так как при значениях $t_{дир}$, превышающих величину *m*, в соответствии с данным критерием критическим следуют признать путь L_1, а при значениях $t_{дир}$ меньших величины m критическим является путь L_2. Таким образом, критерий (1) выбора критического пути в существующем подходе зависит от субъективного параметра $t_{дир}$ и, вследствие этого, не позволяет объективно оценить «загруженность» путей сети, степень их «критичности» для выполнения всего комплекса работ сети. Это утверждение справедливо и для других законов распределения продолжительностей путей.

В итоге следует признать, что вследствие недостаточной теоретической обоснованности выбора объектом исследования продолжительностей путей в виде суммы продолжительностей работ, их составляющих, а также ввиду показанной необъективности критерия (1), существующий подход к оценке качества стохастической сети является несостоятельным и не имеет практической ценности.

Предлагаемый подход к анализу качества стохастических сетевых графов, основанный на построении закона распределения времени завершения всего комплекса работ сети, как это показано теоретически и продемонстрировано на примере, пригоден для анализа качества сети и адекватен анализируемому процессу. Кроме того, применение такой полной характеристики качества сети, как закон распределения времени завершения всего комплекса работ сети и получаемая в явном виде зависимость данного закона от характеристик отдельных случайных работ сети, позволяют расширить возможности по синтезу плана выполнения стохастических работ за счет использования широкого перечня критериев, удовлетворяющих различным потребностям лица, принимающего решение.

Критериями синтеза плана выполнения комплекса стохастических работ при этом могут быть:

– критерий максимального гарантированного результата – максимум вероятности выполнения всего комплекса работ сети за заданное время

$$F_c(t_{дир}) \to max \ ;$$

– критерий гарантированной оперативности – минимум γ-процентной квантили закона распределения времени завершения всего комплекса работ сети

$$t_\gamma \to min \text{, при } \int_0^{t_\gamma} f_c(t)\,dt = P_{гар} \text{,}$$

где $P_{гар}$ – уровень гарантии;

– критерий максимальной средней оперативности – минимум математического ожидания времени выполнения всех работ сети;

$$\int_0^\infty f_c(t)\,t dt \to min \ ;$$

– критерий минимума риска несвоевременного завершения комплекса работ (несоблюдения директивного времени $t_{дир}$), и другие.

Раскроем содержание последнего критерия более подробно. Используем байесовский подход к оценке риска. Для этого будем исходить из сопоставления вероятности незавершения работ сети в требуемые сроки и возможных потерь, связанных с нарушением этих сроков.

При наличии директивного срока окончания работ $t_{дир}$ вероятность завершения работ сети позже этого срока вычисляется по формуле:

$$P(t \geqslant t_{дир}) = 1 - F_c(t_{дир}) = \int_{t_{дир}}^\infty f_c(t)\,dt \ .$$

Значение директивного срока $t_{дир}$ отделяет область штрафа за несвоевременное завершение работ сети (область правее значения $t_{дир}$ на оси времени). Функция штрафа $C_{ш.}(t)$ по своему смыслу имеет возрастающий характер с момента $t_{дир}$ (см. рисунок 4). Величина ожидаемого штрафа может быть вычислена по формуле

$$C_{о.ш.}(t_{дир}) = \int_{t_{дир}}^\infty C_{ш.}(t)\, f_c(t)\,dt \ .$$

Если требуется завершить работу точно в назначенный срок $t_{дир}$, то штраф накладывается и за преждевременное завершение работ. Тогда

$$C_{о.ш.}(t_{дир}) = \int_0^{t_{дир}} C_{д.о.}(t)\, f_c(t)\,dt + \int_{t_{дир}}^\infty C_{ш.}(t)\, f_c(t)\,dt \ ,$$

где $C_{д.о.}(t)$ – функция штрафа за досрочное завершение работ сети.

В случае если величина ожидаемого штрафа из-за несвоевременности окончания работ неприемлема, производится корректировка сетевого графа, прежде всего за счет изменения параметров *критических* работ сети. При этом необходимо последовательно оценить степень влияния отдельных работ на показатель возможных потерь.

Для изменения параметров критических работ потребуются дополнительные затраты $C_{д.з.}$ по сравнению с первоначально планируемыми. Например, если планируется выполнение некоторой НИОКР, эти затраты могут быть обусловлены привлечением дополнительных исполнителей составных частей работ, реорганизацией привлекаемых к выполнению работ научных и конструкторских подразделений, закупкой дополнительного испытательного оборудования и т. п. В связи с этим функция дополнительных затрат, необходимых для сокращения сроков выполнения комплекса работ, зависит от вида закона распределения сети $f_c(t)$, т. е. является функционалом $C_{д.з.}(f_c(t))$.

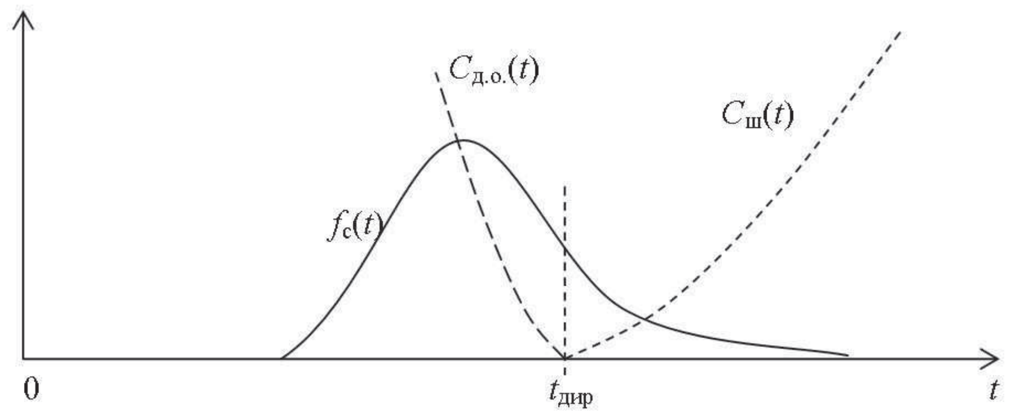

Рисунок 4 – Плотность распределения времени завершения работ сети и функции штрафа

Суммирование затрат, обусловленных необходимостью улучшения (корректировки) сетевого графа работ со штрафом за несвоевременность их выполнения, даст показатель непроизводительных затрат, связанных с отклонением сроков выполнения комплекса работ от установленного директивного времени $t_{дир}$:

$$C_{н.з.}(t_{дир})=C_{д.з.}(f_c(t))+C_{о.ш.}(t_{дир}).$$

Окончательно критерием минимума риска несвоевременного завершения комплекса работ (несоблюдения директивного времени $t_{дир}$) является минимум функции непроизводительных затрат

$$C_{н.з.}(t_{дир})\to\min.$$

В случае, если значение срока $t_{дир}$ четко не определено, а известен лишь его закон распределения $F_{t\,дир}(t)$, то

$$C_{н.з.}(t_{дир})=\int_0^\infty (C_{д.з.}(f_c(t))+C_{о.ш.}(t_{дир}))\,dF_{t\,дир}(t).$$

Таким образом, разработанный в статье подход к синтезу стохастических сетевых графов, включающий предложенный объект для анализа качества сети (закон распределения времени выполнения всего комплекса работ сети), совокупность критериев синтеза плана выполнения комплекса стохастических работ и математический аппарат для их расчета, в условиях показанной несостоятельности известного подхода, позволяет проводить оценку качества плана выполнения комплекса стохастических работ и дает возможность лицу, принимающему решение, обоснованно выработать решение по его улучшению. Основная сложность реализации предложенного математического аппарата – необходимость вычисления большого количества определенных интегралов, что требует значительных временных затрат при использовании численного интегрирования, – может быть в некоторой степени преодолена за счет применения других способов нахождения интегралов, в частности, на основе приемов вычисления определенных интегралов, известных в теории статистического моделирования.

Список использованных источников

1. Глушков В.М., Амосов Н.М., Артеменко И.А. Энциклопедия кибернетики. Том 2. – Киев, 1974.

2. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования / Пер. с франц. – М.: Прогресс, 1968. – С. 77-87.

3. Абчук В.А. и др. Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – С. 178-181.

4. Исследование операций: в 2-х томах / Пер. с англ.; под ред. Дж.Моудера, С.Элмаграби. Том 2. Модели и применение. – М.: Мир, 1981. – С. 294-295.

5. Основы надежности и технического обеспечения радиоэлектронных средств РТВ ПВО / Под ред. проф. Б.П.Креденцера, В.Г.Тоценко. – Киев: КИРТУ ПВО, 1982.

6. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учебник для вузов по спец. АСУ. – М.: Высшая школа, 1986. – С. 144-145.

7. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – С. 311-317.

8. Миненко С.Н., Казаков О.Л., Подзорова В.Н. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учебно-методическое пособие. – М.: ГИНФО, 2002.

9. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – С. 94-98.

10. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций. – 7-е издание / Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005. – С. 315-316.

11. Баев И.А., Ширяев В.И., Ширяев Е.В. Экономико-математическое моделирование управления фирмой. – М.: КомКнига, 2005.

12. Казаков О.Л., Миненко С.Н., Смирнов Г.Б. Экономико-математическое моделирование: Учебно-методическое пособие. – М.: МГИУ, 2006.