

В.Г. Найденов, доктор технических наук,
старший научный сотрудник
Е.В. Першин

Исследование интервального показателя точности траекторного измерительного комплекса

В статье проведено исследование возможности применения в теории и практике траекторных измерений интервального показателя точности траекторных измерительных комплексов (ТИК), используемых для обеспечения испытаний вооружения и военной техники.

При обосновании технических требований к траекторным измерительным комплексам (ТИК), оценке их возможностей, проектировании новых и модернизации существующих комплексов, а также при планировании натурных измерительных экспериментов важное значение имеет правильный выбор показателей точности ТИК.

В работах [1, 2] в качестве показателя точности $Q(k)$ траекторного измерительного комплекса предлагается выбирать значение вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}(k) \subset B\}$ нахождения в дискретный момент времени $t=k$ погрешности оценки составляющих вектора $\hat{\theta}(k)$ параметров движения летательных аппаратов (ЛА) в пределах заданной доверительной области требований к точности ТИК.

Показатель $Q(k)$ точности ТИК представляет собой обобщенную интервальную гарантированную оценку точности траекторного измерительного комплекса по оцениваемому вектору $\hat{\theta}(k)$ параметров движения летательного аппарата и в настоящее время достаточно часто используется в теории траекторных измерений.

Однако практическое применение такого показателя точности для проектирования ТИК, а также при разработке предложений в плановые документы по развитию траекторных измерительных средств затруднено. Это связано с тем, что разработчики сложных технических комплексов, для испытания которых применяются ТИК, не обосновывают такую величину, как допустимое значение вероятности попадания вектора $\Delta\hat{\theta}(k)$ в заданную доверительную область требований, да и форма и размеры этой области, как правило, не задаются. Кроме того, представляет определенную трудность вычисление значения доверительной вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}(k) \subset B\}$ для доверительных областей требований, имеющих произвольную форму.

В настоящее время в практике проектирования ТИК доминирует способ сравнения «точечных» оценок, характеризующих возможности ТИК, и требований к нему, заданных в виде среднеквадратических значений погрешностей оценок (СКО) составляющих вектора параметров движения ЛА, что не позволяет получить гарантированный результат, поскольку сравниваемые значения являются случайными величинами.

В связи с этим и возникла задача проведения исследования такого интервального гарантированного показателя точности ТИК для получения обоснованных ответов на все интересующие вопросы и обоснования возможности его широкого практического применения в практике полигонных испытаний сложных технических комплексов.

Рассмотрим случай, когда оцениваемый вектор $\theta(k)$ параметров движения ЛА для заданной точки k траектории его полета имеет нормальное распределение и задается в виде [3]:

$$\theta(k) = [x(k) \ y(k) \ z(k) \ \dot{x}(k) \ \dot{y}(k) \ \dot{z}(k) \ \ddot{x}(k) \ \ddot{y}(k) \ \ddot{z}(k)]^T = [\theta_1(k) : \theta_2(k) : \theta_3(k)]^T,$$

где $\theta_1(k)=[x(k)y(k)z(k)]^T$, $\theta_2(k)=[\dot{x}(k)\dot{y}(k)\dot{z}(k)]^T$, $\theta_3(k)=[\ddot{x}(k)\ddot{y}(k)\ddot{z}(k)]^T$ – векторы координат ЛА, скорости и ускорения ЛА в полигонной системе координат соответственно.

Известно [1, 2], что в случае нормального закона распределения случайного вектора оценки параметров движения ЛА $\hat{\theta}(k)$ в качестве показателей точности ТИК, характеризующих случайную составляющую погрешности оценки этого вектора, выступает его ковариационная матрица $Y_{\hat{\theta}(k)}$. При этом рассматриваются три априорно оцениваемые ковариационные матрицы $Y_{\hat{\theta}_1(k)}$, $Y_{\hat{\theta}_2(k)}$ и $Y_{\hat{\theta}_3(k)}$ соответствующих векторов $\hat{\theta}_1(k)$, $\hat{\theta}_2(k)$ и $\hat{\theta}_3(k)$, характеризующие случайную составляющую погрешности оценки этих векторов.

При нормальном законе распределения ошибок оценки ТИК вектора параметров движения ЛА графической иллюстрацией оценки точности ТИК, например, при оценке координат ЛА, является эллипсоид рассеивания погрешности оценки этим комплексом вектора $\hat{\theta}_1(k)$ для дискретного момента времени $t=k$. При этом в зависимости от изменяющихся во времени параметров траекторной измерительной системы данный эллипсоид рассеивания изменяет свою ориентацию и размеры в пространстве вдоль траектории полета ЛА.

Так, на рисунке 1 приведена графическая иллюстрация эллипсоида рассеивания для случая оценки ТИК координат траектории полета ЛА.

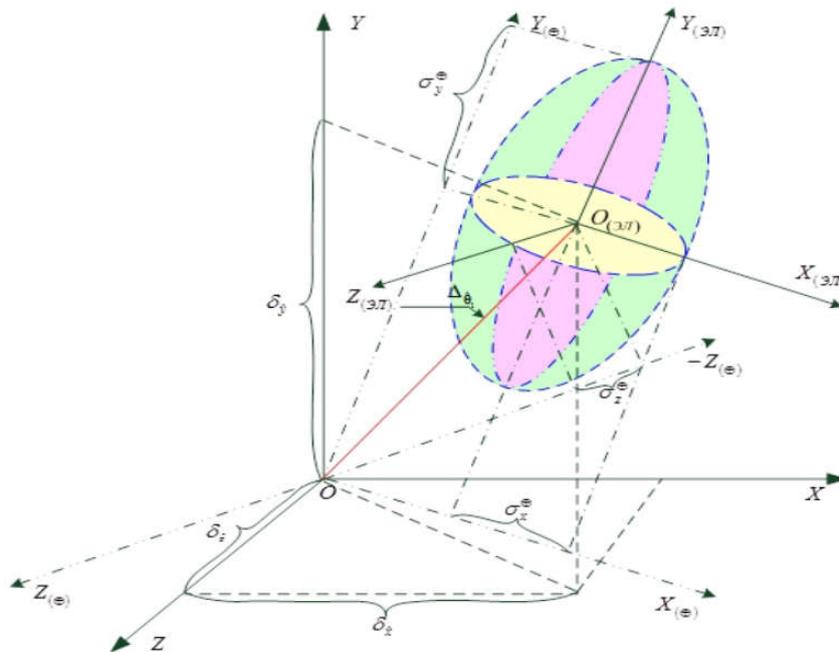


Рисунок 1 – Эллипсоид рассеивания погрешности оценки траекторным измерительным комплексом координат траектории полета ЛА

На рисунке приведено графическое изображение значений случайной и систематической составляющих вектора $\Delta\hat{\theta}_1$, представляющего собой полную погрешность оценки вектора $\hat{\theta}_1(k)$ для конкретного момента времени. На данном рисунке в системе координат $OXYZ$ изображен эллипсоид рассеивания погрешности оценки вектора координат траектории полета ЛА $\hat{\theta}_1(k)=[\hat{x}\hat{y}\hat{z}]^T$ с главными осями рассеивания $X_{(эл)}Y_{(эл)}Z_{(эл)}$, причем система координат $OXYZ$ не совпадает с системой координат $O_{(эл)}X_{(эл)}Y_{(эл)}Z_{(эл)}$ главных осей эллипсоида рассеивания. При этом считается, что летательный аппарат находится в начале системы координат $OXYZ$.

Отрезок прямой линии, соединяющей центр эллипсоида рассеивания погрешности оценки вектора $\hat{\theta}_1$ с началом системы координат $OXYZ$, имеет проекции δ_x , δ_y и δ_z на оси системы координат $OXYZ$, которые являются составляющими вектора $\Delta_{\hat{\theta}_1} = [\delta_x \delta_y \delta_z]^T$, характеризующего систематическую составляющую погрешности случайного вектора $\Delta \hat{\theta}_1$.

Кроме того, на рисунке показаны проекции σ_x^\oplus , σ_y^\oplus и σ_z^\oplus полуосей эллипсоида рассеивания на главные оси рассеивания $X_{(эл)} Y_{(эл)} Z_{(эл)}$, которые представляют собой главные среднеквадратические отклонения случайных величин \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} в координатах $O_{(эл)} X_{(эл)} Y_{(эл)} Z_{(эл)}$, и характеризуют случайную составляющую вектора $\Delta \hat{\theta}_1$.

Как видно из рисунка, за исключением случая, когда направления главных осей рассеивания $X_{(эл)} Y_{(эл)} Z_{(эл)}$ совпадают в пространстве с направлением осей полигонной системы координат, значения главных среднеквадратических отклонений случайных величин \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} всегда будут больше значений проекций δ_x , δ_y и δ_z полуосей эллипсоида рассеивания на оси системы координат $OXYZ$, которые параллельны осям полигонной системы координат. Поэтому использование для сравнения с предъявляемыми требованиями к точности ТИК проекций полуосей этого эллипсоида рассеивания на оси полигонной системы координат является неправомерным, поскольку в требованиях на ТИК не задается опорная система координат, к которой и привязываются задаваемые требования.

Для обоснования допустимого значения вероятности попадания вектора $\Delta \hat{\theta}(k)$ в заданную доверительную область пространства, установления оптимальной формы и требуемых размеров этой области необходимо разработать алгоритм и программу вычисления показателя точности траекторного измерительного комплекса $Q(k) = P\{\Delta \hat{\theta}(k) \in B_{эл}\}$.

Необходимо отметить, что при нормальном законе распределения погрешности оценки ТИК, например, вектора координат траектории полета ЛА поверхности, где наблюдается равная плотность распределения погрешности оценки вектора параметров движения ЛА, представляют собой эллипсоиды. В связи с этим представляется правомерным определить в качестве области требований, предъявляемых к точности ТИК, эллипсоид с полуосями a , b и c , центр которого находится в точке истинного положения ЛА в момент времени $t = k$, а направление осей совпадает с направлением осей полигонной системы координат.

На рисунке 2 представлены единичный эллипсоид рассеивания погрешности оценки ТИК координат траектории полета ЛА и доверительная область требований $B_{эл}$, предъявляемых к точности траекторного измерительного комплекса.

В предположении, что случайные величины \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} являются независимыми, имеют нормальный закон распределения, вероятность события, заключающегося в том, что вершина случайного вектора $\Delta \hat{\theta}_1$ попадает в рассматриваемый эллипсоид $B_{эл}$, определится следующей формулой [4, 5]:

$$P\{\Delta \hat{\theta}_1 \in B_{эл}\} = \iiint_{B_{эл}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_x^\oplus \sigma_y^\oplus \sigma_z^\oplus} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-\delta_x)^2}{(\sigma_x^\oplus)^2} + \frac{(y-\delta_y)^2}{(\sigma_y^\oplus)^2} + \frac{(z-\delta_z)^2}{(\sigma_z^\oplus)^2} \right)\right\} dx dy dz, \quad (1)$$

где δ_x , δ_y и δ_z – систематические составляющие оценки погрешностей соответственно случайных величин \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} ;

σ_x^\oplus , σ_y^\oplus и σ_z^\oplus – главные среднеквадратические отклонения соответственно случайных величин \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} в координатах $O_{(эл)} X_{(эл)} Y_{(эл)} Z_{(эл)}$.

Определение значений главных среднеквадратических отклонений $\sigma_{\hat{x}}^{\oplus}$, $\sigma_{\hat{y}}^{\oplus}$ и $\sigma_{\hat{z}}^{\oplus}$ случайных величин \hat{x} , \hat{y} и \hat{z} может быть проведено путем приведения ковариационной матрицы $\mathcal{Y}_{\hat{\theta}_1}$, полученной по результатам априорной оценки точности ТИК, к ее каноническому виду $\mathcal{Y}_{\hat{\theta}_1}^{\oplus}$ в соответствии со следующим преобразованием:

$$\mathcal{Y}_{\hat{\theta}_1}^{\oplus} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = [\mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(1)} : \mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(2)} : \mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(3)}]^T \cdot \mathcal{Y}_{\hat{\theta}_1} \cdot [\mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(1)} : \mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(2)} : \mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(3)}],$$

где $\mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(1)}$, $\mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(2)}$ и $\mathbf{U}_{\hat{\theta}_1}^{(3)}$ – собственные векторы ковариационной матрицы $\mathcal{Y}_{\hat{\theta}_1}^{\oplus}$; λ_x , λ_y и λ_z – собственные значения этой ковариационной матрицы.

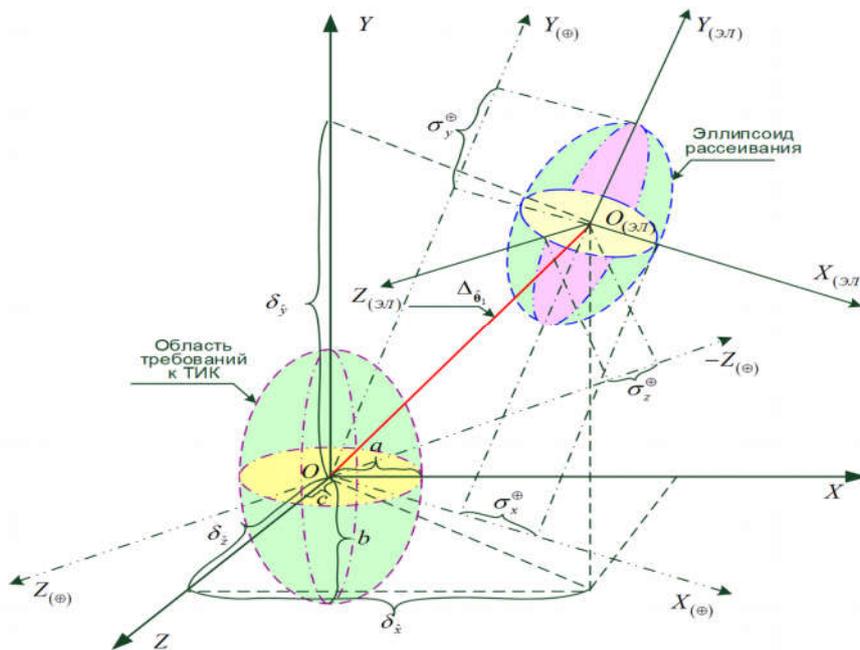


Рисунок 2 – Эллипсоид рассеивания погрешности оценки ТИК координат траектории полета ЛА и область требований к точности траекторного комплекса

Необходимо отметить, что вероятность попадания случайного вектора $\hat{\Delta}\hat{\theta}_1(k)$ в заданную произвольную область при нормальном законе рассеивания можно определить аналитически или с помощью таблиц лишь в отдельных случаях, когда область задана эллипсоидами рассеивания или интервалами отдельных случайных величин в главных осях рассеивания. В остальных случаях нужно разумно организовать процедуры численного интегрирования плотности вероятности по заданной области.

Поскольку область требования к точности ТИК, как правило, не совпадает с формой эллипсоида рассеивания, то имеются сложности в вычислении интеграла вида (1), т. е. получении оценки величины интервального показателя точности ТИК. Поэтому для исследования интервального показателя точности ТИК были использованы процедуры численного интегрирования с помощью программного пакета Maple [5].

В рассматриваемой декартовой системе координат эллипсоид с полуосями a , b и c ограничен слева поверхностью $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, а справа – поверхностью $z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Проек-

цией этого эллипсоида на плоскость XOY является эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Следовательно, вычисление значения вероятности $P\{\hat{\Delta\theta}_1 \in B_{эл}\}$ сводится к вычислению трехкратного интеграла вида:

$$P\{\hat{\Delta\theta}_1 \in B_{эл}\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_x^{\oplus} \sigma_y^{\oplus} \sigma_z^{\oplus}} \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left[\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{(\sigma_x^{\oplus})^2} + \frac{(y-m_y)^2}{(\sigma_y^{\oplus})^2} + \frac{(z-m_z)^2}{(\sigma_z^{\oplus})^2} \right] \right) dz \right] dy \right] dx.$$

При интегрировании переменная y изменяется от $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ до $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Программа в среде Maple по вычислению значений $P\{\hat{\Delta\theta}_1 \in B_{эл}\}$ приведена ниже.

```
> restart;
> with(plots):
> assume(b>0,a=float,b=float,c=float,sigma[x]=float,sigma[y]=float,r=float);
> a:=150;b:=100;c:=60;sigma[x]:= 50;sigma[y]:= 60;sigma[z]:= 35;
> m[x]:= 20;m[y]:= 10;m[z]:= 30;
> G:=b*(sqrt(1-(x^2)/(a^2)));
> L:=-b*(sqrt(1-(x^2)/(a^2)));
> K:=(1.0/((sqrt(2*3.1415927)))^3)*sigma[x]*sigma[y]*sigma[z]);
> F:=c*(sqrt(1-(x^2)/(a^2)-(y^2)/(b^2)));
> J:=-c*(sqrt(1-(x^2)/(a^2)-(y^2)/(b^2)));
> S:=(int(exp(-(1/2)*(((x-m[x])^2)/sigma[x]^2+((y-m[y])^2)/sigma[y]^2+((z-m[z])^2)/sigma[z]^2)),z=J..F));
> W:=int(S,y=L..G);
> plot(W,x=-a..a);
> P:=K*evalf(int(W,x=-a..a));
> print(P1=P);
> plot3d(S,x=-a..a,y=-b..b);
```

Форма поверхности $S = f(\sigma_x^{\oplus}, \sigma_y^{\oplus})$, полученная после интегрирования по переменной z при $\sigma_x^{\oplus} = 20$ м, $\sigma_y^{\oplus} = 20$ м и $a = 150$ м, $b = 100$ м приведена на рисунке 3.

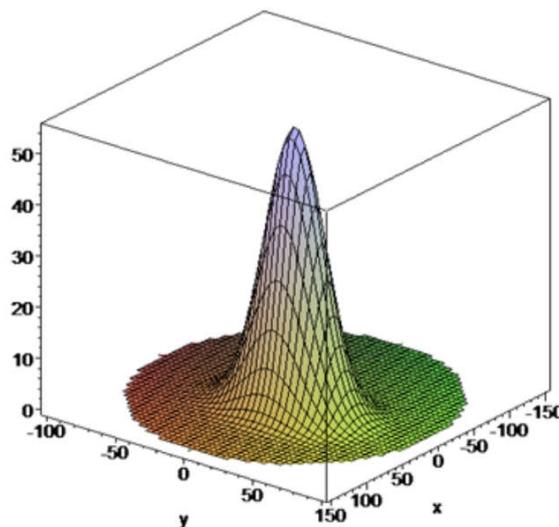


Рисунок 3 – Вид поверхности $S = f(\sigma_x^{\oplus}, \sigma_y^{\oplus})$ при $\sigma_x^{\oplus} = 20$ м, $\sigma_y^{\oplus} = 20$ м и $a = 150$ м, $b = 100$ м

Вид рисунка 3 подтверждает наличие при проведении исследования нормального закона распределения погрешности оценки вектора координат траектории полета ЛА.

С использованием разработанной программы был проведен комплекс расчетов. Так, на рисунке 4 приведено семейство зависимостей значения вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ от величин главных СКО погрешностей оценки координат траектории полета ЛА в предположении, что $\sigma_x^{\oplus} = \sigma_y^{\oplus} = \sigma_z^{\oplus}$ и при отсутствии систематических погрешностей оценки координат ЛА ($\delta_{\dot{x}} = \delta_{\dot{y}} = \delta_{\dot{z}} = 0$).

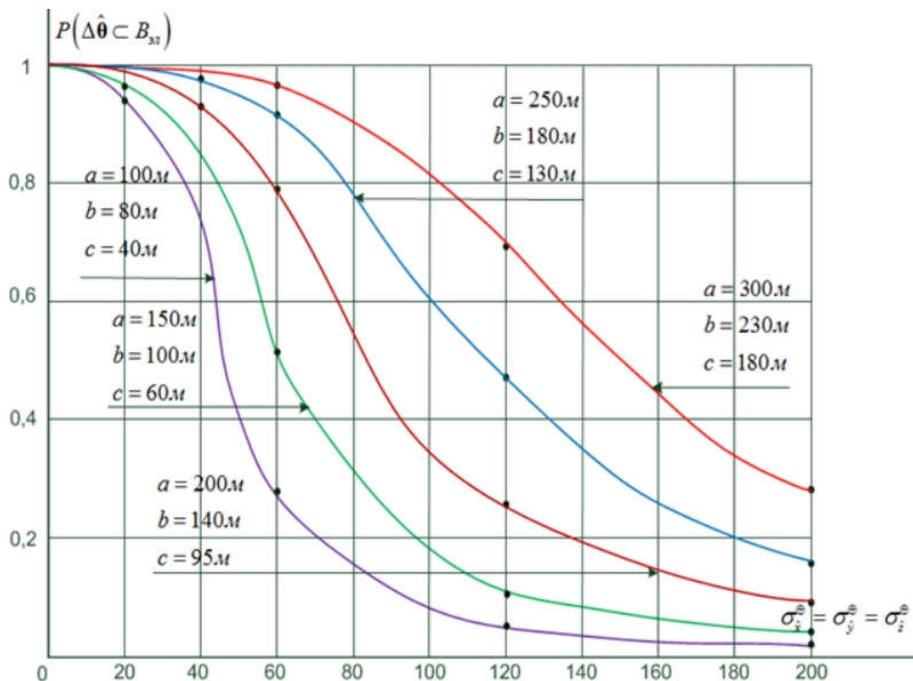


Рисунок 4 – Семейство зависимостей значения вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ от величин главных СКО погрешности оценки координат траектории полета ЛА

Из графиков рисунка 4 видно, что при увеличении главных СКО погрешностей оценки координат траектории полета ЛА значение вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ уменьшается. Стоит отметить, что при одних и тех же значениях σ_x^{\oplus} , σ_y^{\oplus} и σ_z^{\oplus} , но с уменьшением размеров a , b и c эллипсоида требований к точности ТИК вероятность $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ имеет меньшее значение.

Достаточно высокий уровень вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ имеет место, когда значения главных СКО погрешностей оценки координат траектории полета ЛА в 1,8 раза меньше размера самой малой полуоси эллипсоида требований к точности ТИК.

В целом, семейство зависимостей значения вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ от величин главных СКО погрешностей оценки координат траектории полета ЛА подтверждает правильность вычислительных процедур, проведенных с использованием программной среды Maple.

На рисунке 5 приведено семейство зависимостей значения вероятности $P\{\Delta\hat{\theta}_1(k) \subset B_{эл}\}$ для областей требований к точности ТИК, по форме совпадающих с эллипсоидами рассеивания, от величин k , представляющих собой отношение величин полуосей эллипсоида рассеивания погрешности оценки координат траектории полета ЛА к соответствующим значениям главных СКО погрешности оценки ТИК координат ЛА. При этом графики построены для различных значений систематических погрешностей оценки координат и с размерами эллипсоида требований к точности ТИК, равными $a=100 м$, $b=70 м$ и $c=45 м$.

Из рисунка 5 видно, что при отсутствии систематических погрешностей оценки координат траектории полета ЛА (график № 1) значение вероятности $P\{\hat{\Delta}\theta_1(k) \subset B_{эл}\}$ имеет максимальное значение при всех рассматриваемых величинах коэффициента k , что объясняется совмещением центра эллипсоида рассеивания погрешности оценки вектора координат траектории полета ЛА с центром эллипсоида требований к точности ТИК. При этом для высокой достоверности сравнения оценок точности ТИК с предъявляемыми к нему требованиями $P\{\hat{\Delta}\theta_1(k) \subset B_{эл}\} \geq 0,9$ необходимо выбирать размеры полуосей эллипсоида требований к точности ТИК из условий, что $a \geq 2,5 \cdot 3\sigma_x^{\oplus}$, $b \geq 2,5 \cdot 3\sigma_y^{\oplus}$, $c \geq 2,5 \cdot 3\sigma_z^{\oplus}$, т. е. пользоваться правилом «трех сигм».

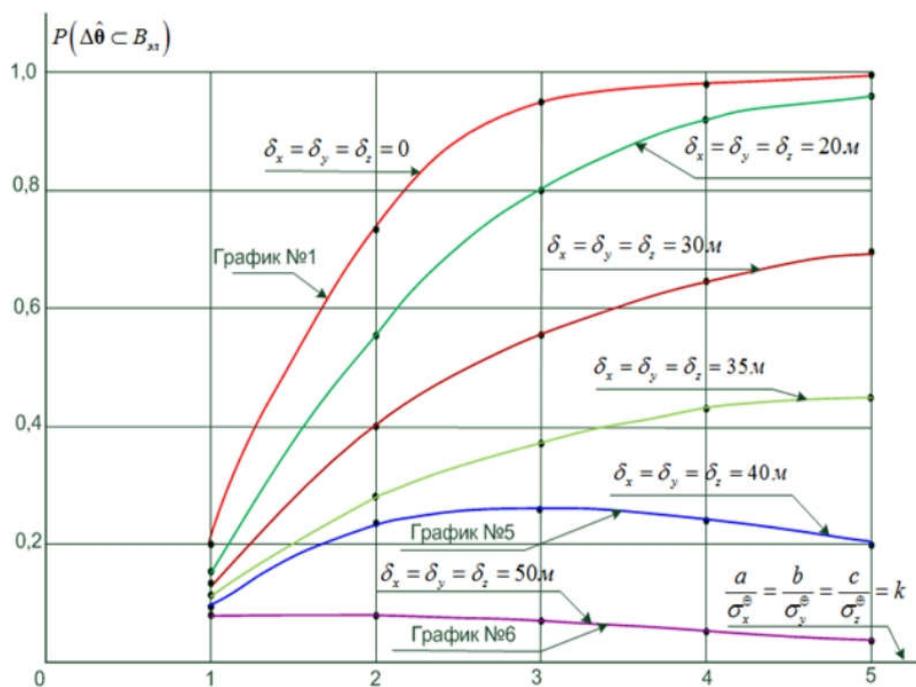


Рисунок 5 – Семейство зависимостей значения вероятности $P\{\hat{\Delta}\theta_1(k) \subset B_{эл}\}$ от значений k для областей требований, представляющих собой по форме эллипсоиды рассеивания погрешности оценки координат траектории полета ЛА

Из приведенных на рисунке графиков видно, что при увеличении значений систематических погрешностей оценки координат траекторий полета ЛА при одних и тех же значениях коэффициента k величина вероятности $P\{\hat{\Delta}\theta_1(k) \subset B_{эл}\}$ уменьшается, что связано с удалением друг от друга центра эллипсоида рассеивания погрешностей оценки вектора координат траектории полета ЛА от центра эллипсоида требований к точности ТИК. При этом в случае приближения значений систематических погрешностей оценки вектора координат траектории полета ЛА к значению самой малой полуоси эллипсоида требований к точности ТИК происходит дополнительное снижение значения вероятности $P\{\hat{\Delta}\theta_1(k) \subset B_{эл}\}$ при величинах коэффициента k более 2...3 (графики № 5 и № 6).

Подобный анализ результатов исследований можно провести при оценке составляющих векторов погрешности оценки скорости и ускорения изменения координат траекторий полета испытываемых ЛА.

Таким образом, проведенные исследования интервального показателя точности траекторного измерительного комплекса позволяют сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса позволяет правильно и с требуемой достоверностью сравнивать априорные оценки

точности этого комплекса с требованиями, которые предъявляются к этому комплексу разработчиками сложных технических систем.

2. При нормальном законе распределения погрешности оценки вектора параметров движения ЛА целесообразно определить в качестве доверительной области требований, предъявляемых к точности ТИК, эллипсоид, центр которого находится в точке истинного положения ЛА в заданный дискретный момент времени $t=k$, а направление осей эллипсоида совпадает с направлением осей полигонной системы координат.

3. Интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса возможно использовать для получения обобщенной оценки погрешности всего вектора параметров движения ЛА путем нахождения значения вероятности попадания оценки такой погрешности в заданную область требований с помощью вычисления девятикратного определенного интеграла в многомерном евклидовом пространстве.

4. Для области требований к точности ТИК, совпадающей по форме с эллипсоидами рассеивания, размеры полуосей эллипсоида требований к точности ТИК целесообразно выбирать, руководствуясь правилом «трех сигм» для получения высокой достоверности сравнения априорно полученных оценок погрешности вектора параметров движения ЛА с предъявляемыми требованиями. При этом значение доверительной вероятности $P\{\Delta \hat{\theta}_1(k) \subset B_{3\sigma}\}$ будет не менее 0,9.

5. Рассмотренный интервальный показатель точности траекторного измерительного комплекса позволяет учитывать не только случайную составляющую погрешности оценки вектора параметров движения ЛА, но и систематическую составляющую погрешности, обусловленную конструктивным несовершенством траекторного измерительного комплекса.

6. Предъявляемые требования к точности ТИК в части случайной составляющей погрешности оценки вектора параметров движения ЛА необходимо сравнивать со значениями главных среднеквадратических отклонений погрешности оценки составляющих вектора параметров движения ЛА, которые можно вычислить по априорно полученным ковариационным матрицам оцененных векторов $\hat{\theta}_1(k)$, $\hat{\theta}_2(k)$ и $\hat{\theta}_3(k)$ на каждый дискретный момент времени $t=k$.

7. При наличии программного обеспечения, позволяющего вычислять значения вероятностей попадания оценок вектора погрешности параметров движения ЛА в доверительные области требований к ТИК, имеющие произвольные формы, интервальный показатель может быть с успехом использован в практике проектирования таких комплексов, а также при разработке предложений по развитию средств траекторных измерений в различные программные документы.

Список использованных источников

1. Жданюк В.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Советское радио, 1978.

2. Буренок В.М., Найденов В.Г., Поляков В.И. Математические методы и модели в теории информационно-измерительных систем. – М.: Машиностроение, 2011.

3. Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных / Под ред. П.А. Агаджанова, В.Е. Дулевича, А.А. Коростелева. – М.: Советское радио, 1969.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Академия, 2003.

5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: КНОРУС, 2010.

6. Мансон Б.М. Maple Power Edition. – М.: Филинь, 1998.