

Д.В. Зайцев, кандидат технических наук,
доцент
М.С. Болдырев

Матричный подход к моделированию боевых действий

Представлен подход к моделированию боевых действий для войскового отделения, имеющего все возможные состояния потерь в ходе выполнения им поставленных боевых задач, основанный на реализации метода параллельного вычисления. Предложены базовые матрицы и операторы, позволяющие получить оценки распределений вероятностей потерь противоборствующих сторон в ходе боевых действий. В качестве примера представлены результаты моделирования конкретного сценария боевых действий. Полученные результаты представляют интерес для проведения оценок боевой эффективности подразделений.

В настоящее время все большую актуальность приобретают математические модели и программно-моделирующие комплексы, с помощью которых возможно получить оценки эффективности новых видов оружия, спрогнозировать исход боя, апробировать новые технологии организации и ведения боевых действий. Адекватная оценка эффективности существующих и перспективных образцов вооружения и военной техники требует знания распределений вероятностей потерь противоборствующих сторон в ходе боестолкновений с их применением. Данная работа является логическим продолжением и развитием подхода к моделированию боевых действий, изложенного в [1] и позволяющего получать оценки распределений вероятностей потерь противоборствующих сторон.

Рассмотрим первичное (низшее) тактическое войсковое формирование – отделение, которое является основной структурной единицей взводов вооруженных сил многих государств [2, с. 181]. В Вооруженных Силах Российской Федерации численность отделения варьируется от 6 до 12 человек в зависимости от решаемых задач¹. В данной работе примем, что численность отделения составляет 9 человек.

Обозначим символом $|p_k\rangle = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$ (единица находится в k -й позиции, $k=0, \dots, 9$) состояние отделения, имеющего k потерь. Предположим, что рассматриваемое войсковое отделение в ходе боевых действий может нести потери с известной вероятностью c_k (например, вероятностью перехода отделения в состояние $|p_k\rangle$ после выполнения им некоторой боевой задачи).

В условиях математического моделирования рассматриваемой ситуации представляется логичным разыграть возможные исходы боевых действий, используя при этом, например, методы имитационного моделирования. При этом для повышения адекватности модели следует реализовывать многочисленные повторные расчеты для получения статистически значимых результатов, что приводит к увеличению времени моделирования и требует значительных аппаратных вычислительных мощностей.

Для решения указанных выше проблем в данной работе предлагается применить метод параллельного вычисления вектора состояния $|X\rangle$, являющегося суперпозицией состояний $|p_k\rangle$:

$$|X\rangle = \sum_{k=0}^9 c_k |p_k\rangle, \quad (1)$$

¹ Командир мотострелкового отделения Сухопутных войск: [сайт]. URL: <https://recrut.mil.ru/career/conscription/post/position/info.htm?id=575%40BasePost> (дата обращения: 01.02.2019).

где c_k – вероятность нахождения отделения в состоянии $|p_k\rangle$, из чего следует, что $\sum_{k=0}^9 c_k = 1$.

Для реализации предлагаемого метода параллельного вычисления воспользуемся математическим аппаратом матричной алгебры.

Начальным состоянием вектора $|X\rangle$ является $|p_0\rangle$. В процессе боевых действий состояние отделения будет изменяться от $|p_0\rangle$ до $|X'\rangle$. Математически это изменение можно записать как результат воздействия на вектор-столбец $|X\rangle$ некоторого оператора, выражаемого матрицей A :

$$|X'\rangle = A \cdot |X\rangle. \quad (2)$$

Описание боевых действий требует в явном виде определения базовых матриц, что позволит корректно описывать эволюцию отделения и тем самым формализовывать боевые действия.

Если потери в отделении отсутствуют (например, отделение совершает марш в пешем порядке или на машинах), то матрица должна сохранять любой вектор $|X\rangle$ без изменений. В аппарате матричной алгебры такой матрицей является единичная матрица E , по диагонали которой расположены 1, а остальные элементы нули.

Можно также построить матрицу, которая переводит вектор $|X\rangle$ в состояние, соответствующее потере l бойцов: $|p_{k+l}\rangle = \Pi_l \cdot |p_k\rangle$. При этом если $k+l > 9$, то итогом такой операции должен быть вектор $|p_9\rangle$.

В матрице Π_l единицы расположены параллельно главной диагонали начиная с элемента $\Pi_{l0}=1$ до пересечения с последней строкой и в последней строке после пересечения, а остальные элементы равны нулю. На рисунке 1 представлен пример матрицы Π_6 .

$$\Pi_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Пример матрицы Π_6

Матрица Π_9 , которая переводит любой вектор в состояние $|p_9\rangle$ (полных потерь), представляет собой матрицу из нулевых элементов, кроме последней строки, элементы которой равны 1.

Далее найдем явный вид матрицы D , описывающей десантирование отделения парашютным способом из самолета, причем будем считать, что для каждого военнослужащего отделения вероятность успешного приземления p . Тогда вероятность перехода вектора $|X\rangle$ после десантирования в состояние $|p_k\rangle$:

$$p(|X\rangle = |p_k\rangle) = C_9^k p^{9-k} (1-p)^k. \quad (3)$$

где $C_9^k = \frac{9!}{k!(9-k)!}$ – биномиальный коэффициент.

Тогда матрица D принимает вид, изображенный на рисунке 2.

$$D = \begin{pmatrix} p^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^1 p^8 (1-p) & p^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^2 p^7 (1-p)^2 & C_8^1 p^7 (1-p) & p^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^3 p^6 (1-p)^3 & C_8^2 p^6 (1-p)^2 & C_7^1 p^6 (1-p) & p^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^4 p^5 (1-p)^4 & C_8^3 p^5 (1-p)^3 & C_7^2 p^5 (1-p)^2 & C_6^1 p^5 (1-p) & p^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^5 p^4 (1-p)^5 & C_8^4 p^4 (1-p)^4 & C_7^3 p^4 (1-p)^3 & C_6^2 p^4 (1-p)^2 & C_5^1 p^4 (1-p) & p^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^6 p^3 (1-p)^6 & C_8^5 p^3 (1-p)^5 & C_7^4 p^3 (1-p)^4 & C_6^3 p^3 (1-p)^3 & C_5^2 p^3 (1-p)^2 & C_4^1 p^3 (1-p) & p^3 & 0 & 0 & 0 \\ C_9^7 p^2 (1-p)^7 & C_8^6 p^2 (1-p)^6 & C_7^5 p^2 (1-p)^5 & C_6^4 p^2 (1-p)^4 & C_5^3 p^2 (1-p)^3 & C_4^2 p^2 (1-p)^2 & C_3^1 p^2 (1-p) & p^2 & 0 & 0 \\ C_9^8 p (1-p)^8 & C_8^7 p (1-p)^7 & C_7^6 p (1-p)^6 & C_6^5 p (1-p)^5 & C_5^4 p (1-p)^4 & C_4^3 p (1-p)^3 & C_3^2 p (1-p)^2 & C_2^1 p (1-p) & p & 0 \\ (1-p)^9 & (1-p)^8 & (1-p)^7 & (1-p)^6 & (1-p)^5 & (1-p)^4 & (1-p)^3 & (1-p)^2 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 2 – Матрица, описывающая десантирование отделения парашютным способом

При умножении такой матрицы на любой вектор состояния $|p_k\rangle$ будет получено новое состояние отделения в соответствии с (2).

Предлагаемый метод параллельного вычисления позволяет моделировать, например, распределение потерь отделения после n десантирований парашютным способом. Для нахождения конечного состояния отделения необходимо n раз умножить матрицу D на вектор начального состояния $|p_0\rangle$:

$$|X\rangle = D \cdot D \cdot \dots \cdot D |p_0\rangle = D^n |p_0\rangle. \tag{4}$$

Отметим, что в ходе практического применения формулы (4) нет необходимости выполнять $n-1$ операций умножения матриц. Переведем число n в двоичную форму и обозначим d – количество цифр в его двоичной записи, z – количество нулей в двоичном представлении числа n . Тогда для вычисления D^n достаточно произвести всего $2(d-1)-z$ вычислений, сначала найдя степени матрицы D , представляющие собой степени числа 2 (D^2, D^4, D^8, \dots), а затем перемножив нужные значения. Даже в «худшем», с точки зрения вычислительной сложности, случае, когда $z=0$ (т. е. $n=2^d-1$), вместо $n-1=2^d-2$ операций умножения матриц нам нужно будет произвести лишь $2d-2$ таких операций. Учитывая, что $d \sim \log_2 n$, при реализации такого подхода количество производимых операций умножения матриц снизится логарифмически.

Например, для вычисления распределения потерь отделения после 10 ($10=1010_2, d=4, z=2$) десантирований парашютным способом для нахождения матрицы D^{10} можно вместо 9 операций в соответствии с (4) ограничиться четырьмя ($2 \cdot (4-1) - 2$), последовательно перемножив две матрицы $D^2 = D \cdot D$, затем их квадраты и четвертые степени ($D^4 = D^2 \cdot D^2, D^8 = D^4 \cdot D^4$) и, наконец, применив соотношение: $D^{10} = D^8 \cdot D^2$. Результаты расчетов распределения потерь после 10 десантирований парашютным способом при вероятности успешного приземления $p=0,85$ представлены на рисунке 3.

Далее найдем матрицу M , описывающую прохождение отделения через минное поле. Пусть отделению необходимо пройти через минное поле, содержащее N мин на траектории движения отделения. Перед отделением через минное поле прошла группа (или машина) разминирования, причем будем считать, что в результате разминирования остается ненулевая вероятность q срабатывания каждой мины. Будем также считать, что отделение проходит через минное поле тактически грамотно: при случайном подрыве мины погибает только один военнослужащий.

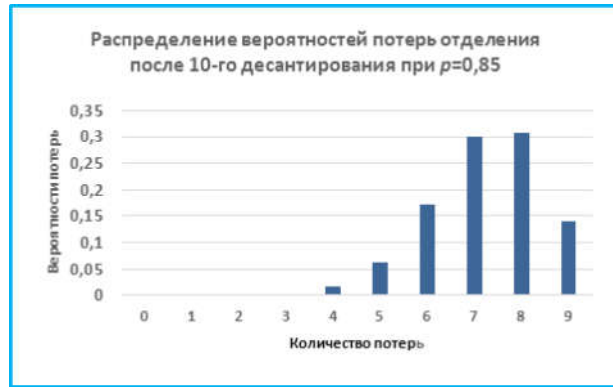


Рисунок 3 – Распределения вероятностей потерь отделения при многократном десантировании парашютным способом

Заметим, что рассматриваемая ситуация подпадает под условие применимости Пуассоновского распределения:

$$p(k) = \frac{(qN)^k}{k!} e^{-qN}.$$

Исходя из этого матрица M будет иметь вид, изображенный на рисунке 4. Отметим, что M и D представляют собой нижние треугольные матрицы.

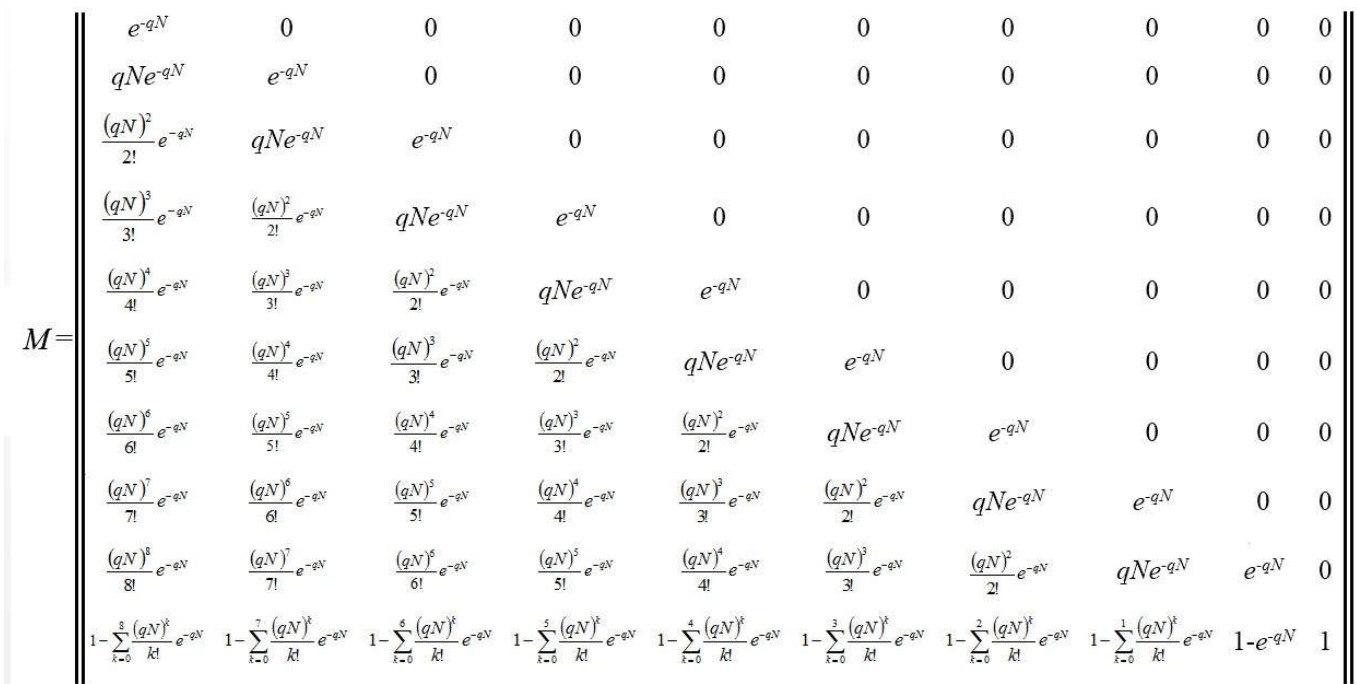


Рисунок 4 – Матрица, описывающая проход отделения через минное поле

Далее найдем матрицу C , описывающую обстрел отделения. В этом примере необходимо рассмотреть два различных случая.

Первый случай, когда противник обстреливает, например, с помощью миномета участок местности, на котором расположено отделение. На рассматриваемый участок местности падают мины с интенсивностью потока Λ за время обстрела $t_{обс}$. Предположим, что отделение расположено на обстреливаемом участке тактически грамотно: каждый взрыв мины может поразить только одного (ближайшего к эпицентру взрыва мины) бойца с вероятностью σ .

Рассматриваемая ситуация также подпадает под условие применимости Пуассоновского распределения:

$$p(k) = \frac{(\sigma \Lambda t_{обс})^k}{k!} e^{-\sigma \Lambda t_{обс}}.$$

Тогда матрица C_1 имеет тот же вид, что и рассмотренная выше матрица M , но вместо qN следует подставить $\sigma \Lambda t_{обс}$.

Второй случай, когда противник обстреливает каждого бойца отделения потоком выстрелов Λ за время обстрела $t_{обс}$, причем каждый выстрел может поразить бойца с вероятностью σ . В этом случае вероятность непоражения бойца за время обстрела в соответствии с Пуассоновским распределением равна $p(0) = e^{-\sigma \Lambda t_{обс}}$, а вероятность поражения хотя бы одним выстрелом $1 - p(0)$.

В этом случае матрица C_2 имеет тот же вид, что и рассмотренная выше матрица D , где вместо p следует подставить $e^{-\sigma \Lambda t_{обс}}$.

Рассмотренные выше случаи применения матриц Π_k, D, M, C_1 и C_2 отвечали ситуациям, когда отделение не могло влиять на внешнее воздействие – параметры p, q, N, σ, Λ являются внешними по отношению к отделению параметрами, которые рассматриваемая система не может изменять. Между тем более интересным и наиболее часто встречающимся случаем является ситуация, когда рассматриваемое отделение ведет активное противодействие противнику, тем самым снижает параметры внешнего воздействия с его стороны.

Такая ситуация авторами уже была подробно рассмотрена в работах [1, 3]. Ввиду того, что представленная статья является продолжением и развитием исследований [1, 3], ниже приведем полученные в них основные результаты.

Рассмотрим боевые действия двух противоборствующих сторон $A = \{1, \dots, N_A^0\}$ и $B = \{1, \dots, N_B^0\}$, которые до начала боя включают в свой состав N_A^0 и N_B^0 боевых единиц соответственно. Каждая сторона формирует потоки выстрелов в направлении друг друга, $\sum_i q_i \mu_i$ – поток выстрелов стороны А и $\sum_j p_j \nu_j$ – поток выстрелов стороны В (суммирование ведется по боеспособным боевым единицам сторон), μ_i, ν_j и q_i, p_j – скорострельности оружия и вероятности поражения противником i -й боевой единицы стороны А и j -й боевой единицы стороны В, соответственно. Одним выстрелом уничтожается не более одной боевой единицы противника.

Бой описывается графом дискретных состояний и непрерывного времени (рисунок 5). Начальному моменту времени боя соответствует состояние S_{00} графа (рисунок 5), которое является исходным. Вероятность нахождения рассматриваемой системы в каждом состоянии S_{ij} обозначается P_{ij} . Интенсивность перехода из состояния S_{ij} в состояние S_{i+1j} (поражение одной единицы стороны А) происходит под действием потока выстрелов стороны В $\sum_{l=1}^{N_B^0-j} p_l \nu_l$, соответственно интенсивность перехода из состояния S_{ij} в состояние S_{i+1j} (поражение одной единицы стороны В) происходит под действием потока выстрелов стороны А $\sum_{k=1}^{N_A^0-i} q_k \mu_k$. Вероятность

p_{ij} перехода из состояния S_{ij} в состояние S_{ij+1} равна отношению интенсивности перехода из состояния S_{ij} в состояние S_{ij+1} к суммарной интенсивности переходов из состояния S_{ij} :

$$p_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{N_B^0-j} p_l v_l}{\sum_{k=1}^{N_A^0-i} q_k \mu_k + \sum_{l=1}^{N_B^0-j} p_l v_l}.$$

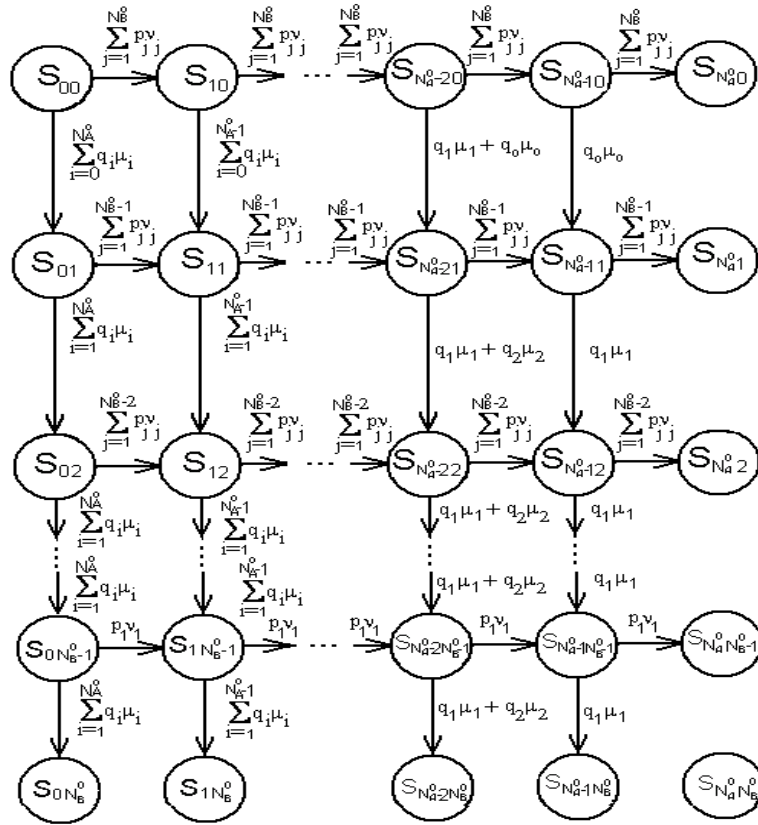


Рисунок 5 – Граф модели боевых действий в условиях военного конфликта низкой интенсивности (дискретные состояния и непрерывное время)

Вероятность перехода из состояния S_{ij} в состояние S_{ij+1} равна $1 - p_{ij}$.

В работах [1, 3] предложен метод «волны вероятности» (по аналогии с расчетом оптического излучения на основе метода Гюйгенса-Френеля), показывающий что для расчета вероятности P_{ij} необходимо просуммировать вероятности переходов P_{i-1j} и $1 - P_{ij-1}$ из соседних состояний S_{i-1j} и S_{ij-1} с соответствующими весами p_{i-1j} и p_{ij-1} :

$$P_{ij} = p_{i-1j} P_{i-1j} + (1 - p_{ij-1}) P_{ij-1}. \tag{5}$$

Применение метода «волны вероятности» требует четкого описания сценариев для каждой из сторон, строго устанавливающих последовательность ведения огня по боевым единицам противника. Если предположить, что боевые действия ведутся организованным образом, когда противоборствующие стороны стремятся в первую очередь уничтожить приоритетные цели, например, головную и замыкающую машины колонны, гранатометчиков, пулеметчиков и т. п., тогда конечные распределения потерь наполняются конкретным содержанием. Например, конечное состояние $S_{1N_B^0}$ соответствует ситуации, когда все боевые единицы стороны В уничтожены, при этом сторона А потеряла первую приоритетную боевую единицу, состояние $S_{2N_B^0}$ соответствует уничтожению

всех боевых единиц стороны В, при этом сторона А потеряла первую и вторую приоритетные боевые единицы. Аналогичным образом – для остальных конечных состояний графа.

Учет нестационарности хода боя, то есть изменения параметров боевых единиц в ходе конфликта, также возможно осуществить в рамках рассматриваемой модели боя. Заметим, что переходы между состояниями определяются интенсивностями потоков прицельных выстрелов противоборствующих сторон, единицей измерения которых являются $\frac{1}{\text{сек}}$. То есть граф модели боя

(рисунок 5) фактически содержит шкалу времени. Тогда имеется принципиальная возможность каждому состоянию графа рисунка 5 поставить в соответствие конкретный момент времени хода боевых действий и оценивать количество, расположение и боеспособность боевых единиц сторон на этот момент времени, а затем в графе рисунка 5 между каждыми соседними состояниями записывать суммарную интенсивность потоков выстрелов боеспособных единиц сторон, исходя из полученной оценки расположения боевых единиц сторон на данный момент времени боя.

Учет начального распределения вероятностей потерь может понадобиться в задачах, когда необходимо оценить потери подразделения, которое последовательно выполняет боевые задачи по уничтожению различных групп противника. В случае наличия начального распределения вероятностей потерь стороны А – P_{0i} и стороны В – P_{0j} , где $i=0, \dots, N_A^0$, $j=0, \dots, N_B^0$ метод «волны вероятности» (5) следует модифицировать следующим образом.

В предположении независимости начальных потерь противоборствующих сторон (например, из-за ведения предварительных боев не друг с другом, а с другими подразделениями противника) необходимо осуществить «запуск волны вероятности» из каждого состояния S_{ij} с соответствующим весом $P_{0i}P_{0j}$, а затем сложить эти волны, что эквивалентно следующему итерационному выражению:

$$P_{ij} = P_{0i}P_{0j} + p_{i-1j}P_{i-1j} + (1 - p_{ij-1})P_{ij-1}. \quad (6)$$

Матричный подход к моделированию боевых действий заключается в следующем. Для каждого отделения $|p_{j0}\rangle$ (которые объединяются во взвода, взвода в роты и т. д.) прописывается последовательность матриц и графов в соответствии с возлагаемыми на отделение задачами. В этом случае за один проход алгоритма возможно реализовать расчет распределений вероятностей потерь противоборствующих сторон.

Возможности предлагаемого матричного подхода к моделированию боевых действий можно продемонстрировать на сценарии захвата диверсионной разведывательной группой (ДРГ) охраняемого объекта в ходе рейдовых действий [4, 5]. Данный сценарий разработан на основе тактической задачи № 3 из Армейского сборника [6]. Сценарий представляет собой последовательность элементов (эпизодов):

1. ДРГ в количестве 11 человек осуществила десантирование парашютным способом и сбор на площадке приземления № 1 (рисунок 6). Вероятность успешного приземления для каждого диверсанта $p=0,95$.

2. ДРГ выдвигается к заданному рубежу развертывания без потерь.

3. На подходе к заданному рубежу перед фронтом обнаружено минное поле, на котором гарантированно погибает один диверсанта.

4. ДРГ проходит минное поле со средним числом 20 мин на траектории движения с вероятностью обнаружения и разминирования 0,95 (вероятность подрыва каждого бойца 0,05).

5. На рубеже атаки ДРГ вступает в бой с силами охраны объекта в количестве 8 бойцов. Боевые скорострельности бойцов сил охраны и десантников составляют 1 выстрел за 10 с. Вероятность поражения целей бойцами ДРГ и силами охраны объекта составляет 0,7 и 0,6 соответственно.

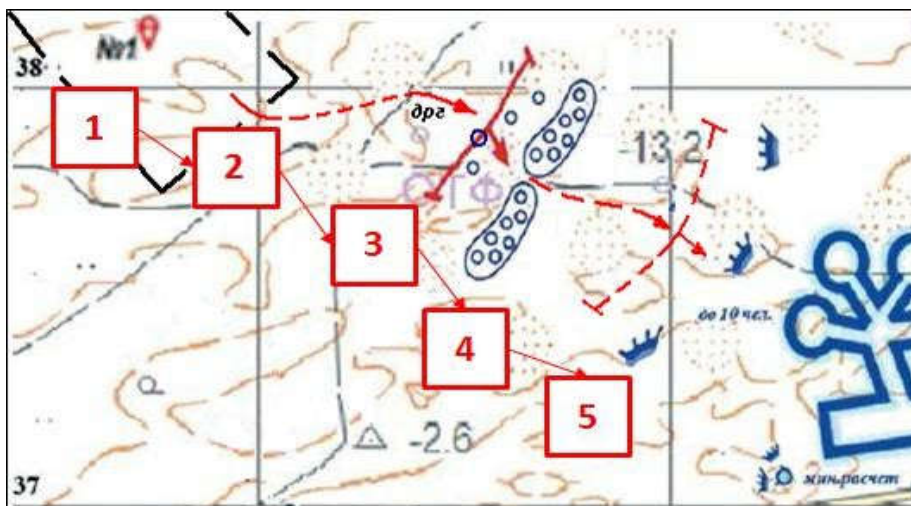


Рисунок 6 – Схема сценария захвата объекта силами ДРГ

Распределение потерь ДРГ после выполнения каждого элемента сценария представлено на рисунке 7.

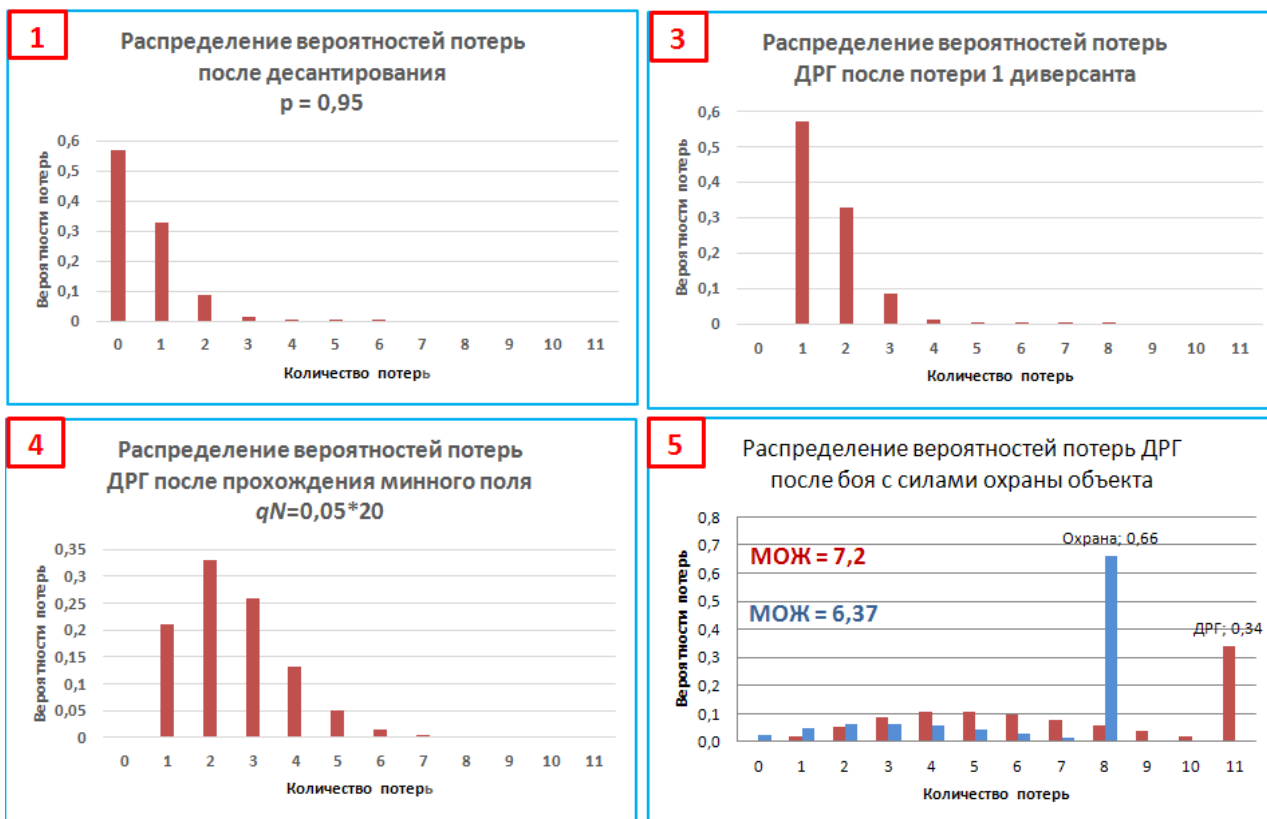


Рисунок 7 – Распределения вероятностей потерь сторон на элементах заданного сценария

Анализ полученных распределений потерь сторон позволяет получить оценки вероятностей выполнения поставленной боевой задачи для каждой из противоборствующих сторон, а также оценки среднего числа потерь сторон при условии выполнения боевой задачи. В представленном сценарии вероятность гибели всей ДРГ составляет $p=0,34$, вероятность уничтожения сил охраны составляет $p=0,66$; математическое ожидание потерь составляет для ДРГ – 7,2, т. е. выживет 3,8 (≈ 4) из 11 человек, для сил охраны – 6,37 (выживет 1,63 (≈ 2) из 8 человек).

Таким образом, анализ результатов моделирования показывает, что при заданных исходных параметрах вероятность уничтожения сил охраны (т. е. вероятность успешного выполнения задачи захвата объекта) ДРГ выше, чем вероятность уничтожения ДРГ силами охраны.

На основе анализа результатов моделирования различных боевых ситуаций может приниматься решение о формировании групп нападения или защиты объектов, а также для планирования, организации и прогнозирования операций.

При данном подходе к моделированию боевых действий вопрос об адекватности модели переносится на адекватность исходных данных и конкретизацию последовательности выполнения боевых задач.

Заключение

На полученные в данной работе результаты возможно посмотреть и с другой точки зрения. В работе [1] были изложены аргументы, позволяющие обосновать некоторые сходства в подходах к анализу физических систем и макросистем, в том числе боевых действий. С таких позиций предлагаемый матричный подход к моделированию боевых действий вызывает ассоциации с матричной квантовой механикой Гейзенберга. Вектор $|X\rangle$ (1) с определенной долей условности может рассматриваться как аналог квантово-механического вектора состояний, а его координаты – как вероятности всевозможных состояний отделения. При попытке измерения вектора $|X\rangle$ происходит его редукция в одно из них. При этом, как в известном парадоксе «кота Шрёдингера», допускается нахождение макрообъекта в суперпозиции его состояний.

Список использованных источников

1. Зайцев Д.В., Сосков Д.Ю., Салов В.Е. Принципы построения математических моделей боя в условиях военных конфликтов низкой интенсивности // Вооружение и экономика. – 2016. – № 3 (36).
2. Военная энциклопедия: В 8 томах / Пред. гл. ред. комис. С.Б. Иванов. – Т. 6. – М.: Воениздат, 2002. – 639 с.
3. Зайцев Д.В. Моделирование боя на основе теории сетей массового обслуживания // Стратегическая стабильность. – 2007. – № 4 (41).
4. Боевой устав воздушно-десантных войск. Часть 3. Взвод, отделение. – М., 1983.
5. Боевой устав воздушно-десантных войск. Часть 2. Батальон, рота. – М., 1984.
6. Конкурсное задание на лучшее решение тактических задач среди офицеров воздушно-десантных войск ВС РФ // Армейский сборник. – 2018. – № 4.