УДК 519.852

А.И. БУРАВЛЕВ, доктор технических наук, профессор

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье рассмотрена задача линейного программирования с несколькими переменными и единственным функциональным ограничением. Такая модель используется в ряде прикладных оптимизационных задач (о рюкзаке, портфеле инвестиций, потребительской корзине и т.д.). Оптимальное решение такой задачи содержит ненулевое значение только одной переменной, что не всегда удовлетворяет потребностям практики. В статье рассмотрен подход получения условно оптимального решения для нескольких переменных на основании оценки их приоритетов по соотношению градиентов целевых функций. Показано, что, безусловно, оптимальное решение является предельным для условно оптимального решения при абсолютном приоритете одной переменной. Данный подход применен также для решения вероятностной задачи планирования, когда коэффициенты целевых функций являются случайными величинами с известным математическим ожиданием и дисперсией.

Ключевые слова: задача линейного программирования с одним функциональным ограничением, оптимальное и условно оптимальное решения, градиенты целевых функций и метод оценки их приоритетов, алгоритм получения условно оптимального решения.

В практических задачах часто возникает задача планирования, которая формулируется следующим образом. Имеется набор n продуктов, для производства которых требуются определенные затраты ресурсов c_i, а реализация их на рынке приносит доход p_i, $(i = \overline{1,n})$ от единицы продукта. Требуется определить объем производства этих продуктов $x_i \geq 0$, обеспечивающий минимум суммарных издержек для получения заданного дохода $P_{зад}$:

$$C(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min_{x_i};$$
$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq P_{зад}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{x} = \left(x_i, i = \overline{1,n}\right)$ – вектор численностей производимых продуктов.

Это простейшая задача линейного программирования, в которой имеется только одно ограничение, связывающее переменные задачи.

К такого рода задаче относятся задачи «о рюкзаке», «потребительской корзине», «портфеле инвестиций» и т.д. [1-3]. Такая же задача возникает на этапе предварительного планирования производства, когда еще не известны какие-либо другие ограничения.

1. Оптимальное решение задачи

В соответствии с теорией линейного программирования решение задачи (1) имеет следующий вид [1; 2]:

$$x_i^* = \left\{ \begin{matrix} \frac{P_{зад}}{p_i}, & \frac{p_i}{c_i} = \underset{j=\overline{1,m}}{max} \left(\frac{p_j}{c_j} \right) \\ 0, & \frac{p_i}{c_i} < \underset{j=\overline{1,m}}{max} \left(\frac{p_j}{c_j} \right) \end{matrix} \right\}, \tag{2}$$

т.е. в перечень продуктов для производства включается только один продукт с максимальным отношением «доход – затраты».

Это решение достаточно просто получается для случая двух видов продуктов ($n = 2$). Целевая функция и функциональное ограничение в этом случае имеют вид:

$$C(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min_{x_{1_1}, x_2},$$

$$P(\boldsymbol{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \geq P_{зад}.$$

Выразим из второго неравенства переменную $x_1 \geq \frac{P_{зад}}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} x_2$ и подставим ее в целевую функцию

$$C(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \frac{c_1}{p_1} P_{зад} + \left(c_2 - \frac{c_1 p_2}{p_1} \right) x_2$$

Из полученного выражения видно, что если $c_2 p_1 > c_1 p_2$ или $\frac{p_1}{c_1} > \frac{p_2}{c_2}$, то минимум $C(\boldsymbol{x})$ достигается при $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{P_{зад}}{p_1}$ и составляет

$$C(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i{}^* = \frac{c_1}{p_1} P_{зад} = \frac{P_{зад}}{\underset{j=\overline{1,m}}{max} \left[\frac{p_j}{c_j} \right]}. \tag{3}$$

Поменяв местами переменные x_1, x_2, получаем тот же результат.

Методом индукции можно получить решение (2) для числа переменных $n > 2$.

Для обратной задачи:

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max_{i=\overline{1,m}};$$

$$C(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C_{зад} \quad (4)$$

оптимальное решение имеет вид

$$x_i^* = \begin{cases} \frac{C_{зад}}{c_i}, & \frac{p_i}{c_i} = \max_{j=\overline{1,m}}\left(\frac{p_j}{c_j}\right) \\ 0, & \frac{p_i}{c_i} < \max_{j=\overline{1,m}}\left(\frac{p_j}{c_j}\right) \end{cases} \quad (5)$$

и его можно получить, проведя аналогичные выше рассуждения.

Для $n = 2$ задача оптимизации имеет вид:

$$P(\boldsymbol{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \max_{x_1, x_2},$$

$$C(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq C_{зад}.$$

Выразим из второго неравенства переменную $x_1 \leq \frac{C_{зад}}{c_1} - \frac{c_2}{c_1} x_2$ и подставим ее в целевую функцию

$$P(\boldsymbol{x}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{p_1}{c_1} C_{зад} + \left(p_2 - \frac{c_2 p_1}{c_1}\right) x_2.$$

Если $c_1 p_2 < c_2 p_1$ или $\frac{p_1}{c_1} > \frac{p_2}{c_2}$, то целевая функция достигает максимума при $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{C_{зад}}{c_1}$ и составляет

$$P(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i{}^* = \frac{p_1}{c_1} C_{зад} = P_{зад} \max_{j=\overline{1,m}} \left[\frac{p_j}{c_j}\right]. \quad (6)$$

Следует заметить, что отношение $\frac{p_1}{c_1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_i}}{\frac{\partial C}{\partial x_i}} = g_i$ есть отношение компонент градиентов функции дохода $P(\boldsymbol{x})$ и затрат $C(\boldsymbol{x})$, которое характеризует величину получаемой доходности от реализации продукта на единицу производственных затрат, т.е. является показателем экономической *эффективности* продукта.

Решения прямой и обратной задачи планирования совпадают или находятся в пропорциональной зависимости, когда выполняется следующее соотношение:

$$\frac{P_{зад}}{C_{зад}} = k \max\left(\frac{p_i}{c_i}\right); \; k > 1. \quad (7)$$

2. Условно оптимальные решения задачи

На практике оптимальное решение задачи планирования, в котором используется только один продукт, может оказаться не всегда приемлемым. Например, в какой-то момент времени может уменьшиться спрос на данный продукт и его производство в таких объемах окажется нерентабельным. В этом случае нужно переходить к производству другого вида продукта, что приведет к росту издержек, либо просто будет невозможным по производственно-технологическим или финансовым возможностям производителя.

В этом случае более рациональным является производство не одного, а нескольких видов продуктов в рамках производственно-технологических возможностей. При этом возникает задача об оптимизации некоторого набора $m < n$ продуктов, удовлетворяющих требованиям задачи (1) или (4). Такие задачи известны как задачи о «рюкзаке», «потребительской корзине», «портфеле инвестиций» и пр. [1-3].

Рассмотрим следующий вариант решения исходной задачи.

Объем производства каждого вида продукта будем определять *пропорционально* его эффективности от максимально возможного объема его производства, который определяется величиной $\frac{P_{зад}}{p_i}$ для прямой задачи и величиной $\frac{C_{зад}}{c_i}$ для обратной задачи.

В силу линейности задачи затраты на производство любого типа продукта будут пропорциональны ожидаемому доходу

$$C_i = c_i x_i{}^* = \lambda P_{зад},$$

откуда следует потребный объем продукции

$$x_i^* = \lambda \frac{P_{зад}}{c_i}; \; (i = \overline{1, m}), \tag{8}$$

где $\lambda > 0$ – нормирующий множитель.

Его мы находим из ограничения $P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \, x_i^* = P_{зад}$:

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{c_i}}.$$

В результате потребный объем производства x_i^* будет определяться следующим выражением:

$$x_i^* = \frac{P_{зад}}{c_i \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{c_i}} = \alpha_i \frac{P_{зад}}{p_i}. \tag{9}$$

Здесь $\alpha_i = \frac{\frac{p_i}{c_i}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{c_i}}$ – коэффициент, характеризующий долю i-го продукта от максимально допустимого его объема $\frac{P_{зад}}{p_i}$. Величина этой доли будет тем больше, чем выше эффективность продукта $g_i = \frac{p_1}{c_1}$. Таким образом, показатель α задает приоритет объемов производства продукции для заданной номенклатуры.

Выражение (9) отражает принцип *пропорционального* распределения, широко применяемого в теории и практике управления организационными системами [3].

При подстановке величины x_i^* в функцию затрат для прямой задачи получаем выражение:

$$C(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^* = \frac{mP_{зад}}{\sum_{i=1}^{m} g_i}. \qquad (10)$$

Покажем, что распределение объемов производства (9) обеспечивает минимальную сумму издержек при заданных долевых коэффициентах α_i, $(i = \overline{1,m})$ продуктов в наборе. Предположим, что относительные долевые объемы образуют следующую последовательность приоритетов производства продукции:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_m;\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \qquad (11)$$

Изменим произвольным образом объемы первого и последнего продукта, уменьшив объем первого и увеличив объем последнего продукта на величину $\delta > 0$, оставив объемы остальных продуктов без изменения:

$$\alpha_1' = \alpha_1 - \delta;\ \alpha_i' = \alpha_i;\ \alpha_m' = \alpha_m + \delta.$$

При таком изменении долевых коэффициентов условие их нормировки не нарушается. Найдем суммарные затраты для новых объемов продуктов

$$C(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^* = P_{зад} \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i'}{g_i}$$

и сравним их с выражением (9). Для оптимального распределения должно выполняться

$$\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} g_i} < \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i'}{g_i}. \qquad (12)$$

Преобразуем это неравенство к виду:

$$m < \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i^{'}\sum_{i=1}^{m} g_i}{g_i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i^{'}}{\alpha_i}\right) = m + \delta\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{\alpha_1}\right).$$

По предположению $\alpha_1 \geq \alpha_m$. Тогда $\frac{1}{\alpha_m} \geq \frac{1}{\alpha_1}$, откуда следует справедливость неравенства (12). Рассмотрев любые пары долевых показателей продуктов из набора m, приходим к такому же результату.

Изменим последовательность приоритетов в (11) на противоположную

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_m \; ; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \tag{13}$$

и положим $\alpha_1^{'} = \alpha_1 + \delta$; $\alpha_i^{'} = \alpha_i$; $\alpha_m^{'} = \alpha_m - \delta$.

Проверим выполнение неравенства (12):

$$m < \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i^{'}\sum_{i=1}^{m} g_i}{g_i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i^{'}}{\alpha_i}\right) = m + \delta\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_m}\right).$$

Поскольку $\alpha_1 \leq \alpha_m$, то $\frac{1}{\alpha_1} \geq \frac{1}{\alpha_m}$ и неравенство (12) также выполняется.

Таким образом, распределение объемов производства продуктов по критерию их доходности (9), обеспечивает минимальную сумму издержек, что дает право назвать такое распределение *условно* оптимальным. При этом оптимальное распределение (2) можно называть *безусловно* оптимальным распределением.

Сравнение выражения для функции затрат (10) с выражением (3) для безусловного оптимального решения показывает их структурную идентичность. Поскольку $\underset{i=1,n}{\underline{max}}(g_i) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i}{m}$, то суммарная стоимость издержек для условно оптимального распределения (10) будет выше, чем для безусловного оптимального распределения, что отвечает принципу оптимальности.

Однако у распределения (9) имеется одно преимущество – оно позволяет последовательно включать в план производства продукты пропорционально их коэффициенту вклада (приоритету) α_i с учетом возможных изменений себестоимости, цены продаж и требуемых значений рентабельности производства, что делает план производства более гибким и адаптируемым к изменениям рыночной конъюнктуры.

Для обратной задачи используем по аналогии с (9) следующее распределение объемов производства продукции:

$$x_i^* = \alpha_i \frac{C_{зад}}{c_i}, \tag{14}$$

которое удовлетворяет ограничению $C(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i^* = C_{зад}$ и обеспечивает максимальное значение дохода

$$P(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} p_i\, x_i^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{c_i} \alpha_i C_{зад} \to \max_{\alpha_i}. \qquad (15)$$

Покажем это, для чего найдем величину дохода при изменении показателей α_i согласно схеме (11) и сравним его с выражением (15):

$$\Delta P = P(\boldsymbol{\alpha}') - P(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{c_i} (\alpha_i' - \alpha_i) C_{зад} = C_{зад} \left(\frac{p_1}{c_1} - \frac{p_m}{c_m} \right) \delta.$$

Поскольку $\alpha_1 \le \alpha_m$, то $\frac{p_1}{c_1} \le \frac{p_m}{c_m}$ и значит $\Delta P \le 0$. Аналогичный результат получим и для схемы (13).

Покажем далее, что условно оптимальное решение (9) при неограниченном росте доходности одного из продуктов приводит к сходимости к безусловно оптимальному решению (2) или (4).

Выделим из набора продуктов продукт с максимальной доходностью:

$$i = \arg\left\{ \max_{j=1,\mathrm{m}} g_j \right\}$$

и рассмотрим выражение для долевого коэффициента объема производства продукции

$$\alpha_j = \frac{g_j}{g_{max\,i}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1} \frac{g_j}{g_{max\,i}}\right)}; \ (j = \overline{1, m-1}).$$

Нетрудно увидеть, что при неограниченном возрастании $g_{max\,i}$ отношение $\frac{g_j}{g_{max\,i}}$ стремится к нулю, а коэффициент $\alpha_i \to 1$. В результате приходим к безусловно оптимальному распределению продуктов (2) или (4).

Таким образом, условно оптимальное распределение (9), (14) позволяет получать широкий спектр распределений продуктов вплоть до безусловно оптимального.

Дополнительным требованием к рассмотренной выше задаче может выступать наличие в плане производства (в рюкзаке, потребительской корзине, портфеле инвестиций) минимально необходимого объема некоторых продуктов:

$$x_s \ge b_s;\ x_r \ge b_r;\ \dots;\ x_l \ge b_l, \qquad (16)$$

где $b_s, b_r, \dots, b_l$ – минимально необходимые объемы продуктов $s, r, \dots, l$ -го типов.

В этом случае оптимальным планом для прямой задачи будет включение указанных продуктов в требуемых объемах $b_s, b_r, \dots, b_l$, расчет величины получаемого дохода [2]

$$P(b_s, b_r, \dots, b_l) = p_s b_s + p_r b_r + \dots + p_l b_l$$

и ожидаемого остатка $\varDelta P = P_{зад} - P(b_s, b_r, ..., b_l)$.

По величине остатка далее рассчитываются объемы производства остальных типов продуктов с использованием формулы (9).

В обратной задаче для минимально необходимого объема заданных продуктов рассчитываются издержки

$$C(b_s, b_r, ..., b_l) = c_s b_s + c_r b_r + ... + c_l b_l$$

и остаток бюджета $\varDelta C = C_{зад} - C(b_s, b_r, ..., b_l)$.

По остатку бюджета далее с использованием формулы (14) рассчитываются объемы производства для остальных продуктов.

3. Условно оптимальное решение задачи при случайной доходности продукции и издержках ее производства

В практических задачах показатели доходности продукции p_i и издержки производства c_i могут претерпевать случайные изменения вследствие колебания цен и спроса на продукцию, производственных и непроизводственных затрат, влияющих на себестоимость продукции. В этом случае при формировании плана производства необходимо учитывать не только величину ожидаемой доходности, но и возможность ее получения.

С учетом сказанного прямая задача состоит в минимизации средних затрат

$$\overline{C}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i x_i \to \min_{x_i}$$

при вероятности получения дохода не менее $P_{зад}$ с вероятностью d

$$Pr(P(x) \geq P_{зад}) = d^1, \tag{17}$$

а в обратной задаче – максимизации среднего дохода

$$\overline{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \overline{p}_i x_i \to \max_{x_i}$$

при затратах, не превышающих установленный бюджет с заданной вероятностью

$$Pr(C(x) \leq C_{зад}) = d. \tag{18}$$

Рассмотрим методику решения прямой задачи в предположении, что случайные изменения показателей доходности независимы и харак-

[1] Здесь символ Pr означает вероятность (probability – *англ.*) некоторого события.

теризуются своими средними значениями $\overline{p}_i$ и средними квадратическими отклонениями (СКО) σ_{p_i}. Сделаем предположение о приближенном нормальном распределении случайного отклонения суммарной доходности продуктов от своего среднего значения. Данное предположение основано на известных теоремах теории вероятностей о распределении сумм независимых случайных величин[2].

При сделанном выше допущении вероятность выполнения условия (17) определяется по следующей формуле:

$$d = 1 - \Phi\left(\frac{P_{зад} - \overline{P}}{\sigma_P}\right), \tag{19}$$

где $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – функция нормального распределения вероятностей; $\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_{p_i}^2 x_i^2}$ – СКО суммарной доходности продукции.

Обозначим $z_{1-d} = \Phi^{-1}(1-d)$ – квантиль функции нормального распределения на уровне d. Из равенства $\frac{P_{зад} - \overline{P}}{\sigma_P} = z_{1-d}$ получаем уравнение, связывающее заданный уровень доходности с его наиболее вероятным значением, полученным из условия (17):

$$P_{зад} = \overline{P}(\boldsymbol{x}^*) + z_{1-d}\sigma_P(\boldsymbol{x}^*). \tag{20}$$

Для нахождения вероятностной оценки переменной x_i^*, $(i = \overline{1,m})$ необходимо совместное решение уравнений (9), (20), которое реализуется итерационным алгоритмом следующего вида:

$$x_i^*(\tau) = x_i^*(\tau - 1) + \varepsilon\alpha_i \frac{\left[P_{зад} - \overline{P}(\boldsymbol{x}^*(\tau-1)) + z_{1-d}\sigma_P(\boldsymbol{x}^*(\tau-1))\right]}{\overline{p}_i}, \tag{21}$$

где τ – шаг итерации; $0 < \varepsilon < 1$- параметр, регулирующий скорость сходимости алгоритма; $\alpha_i = \frac{\frac{\overline{p}_i}{c_i}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{p}_i}{c_i}}$ – долевой коэффициент распределения объема продукции.

Для обратной задачи вероятность выполнения бюджетного ограничения (18) определяется выражением:

$$d = \Phi\left(\frac{C_{зад} - \overline{C}}{\sigma_C}\right).$$

[2] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник. Изд. 8 доп. М.: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.

Отсюда получаем выражение для величины бюджетного ограничения:

$$C_{зад} = \overline{C}(\boldsymbol{x}^*) + z_d \sigma_C(\boldsymbol{x}^*). \qquad (22)$$

Решение обратной задачи, как и прямой, осуществляется с использованием итерационного алгоритма:

$$x_i^*(\tau) = x_i^*(\tau-1) + \varepsilon \alpha_i \frac{\left[C_{зад} - \overline{C}(\boldsymbol{x}^*(\tau-1)) + z_{1-d}\sigma_C(\boldsymbol{x}^*(\tau-1)\right]}{\overline{c}_i}. \qquad (23)$$

Рассмотрим следующий иллюстративный пример. В таблице 1 заданы основные характеристики трех видов продукции.

Таблица 1 – Основные характеристики трех видов продукции

Виды продуктов	1	2	3
Средняя доходность продукта p, у.е.	1,8	1,1	1,5
СКО доходности продукта σ_P, у.е.	0,5	0,2	0,3
Стоимость затрат на производство единицы продукта c, у.е.	1,95	1,5	2,52
СКО стоимости затрат на производство единицы продукта σ_c	0,2	0,3	0,5
Показатель эффективности продукта $g = \frac{p}{c}$	0,92	0,73	0,60
Долевой коэффициент объема производства продукта α	0,41	0,33	0,26

Для надежности выполнения ограничений $d = 0{,}9$ получены следующие распределения оптимальных объемов продукции:

а) для прямой задачи $P_{зад} = 120$ ед.; $z_{1-d} = 0{,}54$

- при детерминированной доходности

$x_1^* = 27$; $x_2^* = 35$; $x_3^* = 21$ ед.; $x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* = 83$ ед.; $C(x^*) = 175{,}7$ ед.

- при случайной доходности

$x_1^* = 25$; $x_2^* = 33$; $x_3^* = 20$ ед.; $x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* = 80$ ед.; $C(x^*) = 163{,}3$ ед.

б) для обратной задачи $C_{зад} = 175{,}7$ у.е.; $z_d = 1{,}29$

- при детерминированных затратах

$x_1^* = 34$; $x_2^* = 33$; $x_3^* = 18$ ед.; $x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* = 85$ ед.; $P(x^*) = 124{,}3$ ед.

- при случайных затратах

$x_1^* = 33$; $x_2^* = 34$; $x_3^* = 17$ ед.; $x^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* = 84$ ед.; $P(x^*) = 123{,}6$ ед.

Из приведенных расчетов видно, что учет случайных изменений коэффициентов целевых функций приводит к некоторому уменьшению объемов производства продукции. Это уменьшение тем больше, чем больше СКО случайных колебаний доходности и себестоимости продукции.

На рисунке 1 приведены графики, отражающие динамику итерационного процесса поиска решения.

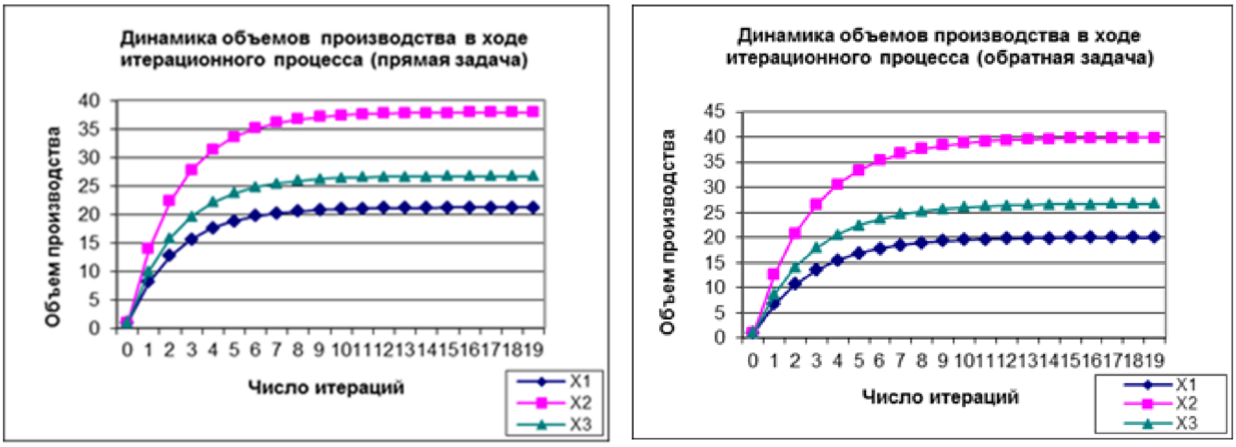

Рисунок 1 – Динамика объемов производства в ходе итерационного процесса (прямая и обратная задачи)

Как видно из рисунка 1, алгоритм обеспечивает достаточно быструю сходимость итерационного процесса к стационарному решению. Достоинством данного алгоритма является простота его численной реализации.

Рассмотренная задача линейного программирования и методика ее решения могут быть использованы в задачах планирования производства товарной продукции в условиях неопределенности о динамике изменений ее себестоимости, цены и объемов продаж и возникающих при этом дополнительных ограничений.

Список использованных источников

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 513 с.
3. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. М.: Физматлит, 2007. 583 с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
5. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 237 с.