УДК 623.4

А.И. БУРАВЛЕВ, доктор технических наук, профессор
А.А. НЕСТЕРОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТИПАЖА И ЧИСЛЕННОСТИ ПАРКА ВООРУЖЕНИЯ И ВОЕННОЙ ТЕХНИКИ ПО КРИТЕРИЮ «ЭФФЕКТ – ЗАТРАТЫ» С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЯ К ЕГО СОВРЕМЕННОСТИ

В статье рассматривается итерационный алгоритм решения оптимизационной задачи программно-целевого планирования, основанный на использовании градиентного метода поиска экстремума целевой функции. Авторы предлагают использовать численный градиентный метод вместо классических способов решения задач линейного программирования типа «задачи о рюкзаке», «портфеле инвестиций», «потребительской корзине», «загрузки производства» и т.д. в связи с тем, что коэффициенты целевых функций зависят от переменных задачи, которые изменяются в процессе поиска решений.

***Ключевые слова**: оптимизация; военно-технический уровень; градиентный метод.*

Одной из ключевых задач программно-целевого планирования является формирование парка вооружения и военной техники (ВВТ) в составе Вооруженных Сил РФ, обеспечивающего, с одной стороны, успешное решение задач, а с другой – расходование минимальных или выделенных для этого ассигнований. При этом также желательно, чтобы парк содержал в своем составе образцы ВВТ современного уровня, позволяющие решать боевые задачи с минимальным расходом боевых средств.

Рассмотрим математическую постановку и решение данной задачи.

Имеется исходная номенклатура ВВТ, включающая n типов образцов ВВТ, на основе которой формируется потребный парк ВВТ. Каждый образец ВВТ i-го типа характеризуется показателем военно-технического уровня p_i, представляющим собой мультипликативную свертку основных ТТХ, имеющих определенный уровень значимости. Показатель p_i рассчитывается относительно некоторого базового (эталонного) образца ВВТ [1]:

$$p_i = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\Pi_{ij}}{\Pi_j^{Э}}\right)^{\alpha_j}, \qquad (1)$$

где: $\Pi_{ij}, \Pi_j^{\text{э}}$, $(j = \overline{1,m})$ – значение j-й характеристики сравниваемого образца i-го типа и эталонного образца ВВТ;
α_i – нормирующий коэффициент, характеризующий значимость j-й характеристики образцов ВВТ, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

По военно-техническому уровню все образцы ВВТ принято подразделять на три класса[1]:

перспективные образцы, для которых $p \geq 1{,}2$;

современные образцы, для которых $0{,}8 < p < 1{,}2$;

устаревшие образцы, для которых $p \leq 0{,}8$.

Границы, разделяющие ВВТ на классы, могут изменяться с учетом военно-технических и военно-экономических требований.

В качестве обобщенной характеристики парка ВВТ рассмотрим его *потенциал,* учитывающий численность парка, номенклатуру образцов ВВТ и их военно-технический уровень, представленный в виде аддитивной функции следующего вида [1]:

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i N_i, \tag{2}$$

где: N_i – численность образцов ВВТ i-го типа в составе парка;
p_i – показатель военно-технического уровня образца ВВТ i-го типа.

Затраты на формирование парка ВВТ зависят от объема закупки ВВТ, себестоимости единичного образца ВВТ с определенным военно-техническим уровнем, установленной нормы прибыльности закупок [1].

Цена закупки единичного образца ВВТ i-го типа может быть рассчитана по формуле [2]:

$$\bar{c}_i = k\left(\frac{c_{0i}}{N_i} + c_{1i}\right), \tag{3}$$

где c_{0i}, c_{1i} – стоимость условно постоянных и условно переменных затрат при производстве образца ВВТ i-го типа;
N_i – численность образцов ВВТ i-го типа в составе парка;
k – нормативный коэффициент прибыльности продукции военного назначения, $k > 1$.

Тогда суммарные затраты на формирование парка ВВТ составят:

$$C = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i N_i. \tag{4}$$

[1] Методика определения уровня совершенства вооружения, военной и специальной техники (утв. замминистра обороны Российской Федерации 15 декабря 2015 г.).

Поставим задачу: определить потребную численность парка образцов ВВТ N, обеспечивающих заданный военно-технический потенциал при минимальной стоимости затрат на его формирование:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i N_i \geq P_{\text{зад}};$$
$$\text{C} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\text{c}}_i N_i \to \min_{N_i}. \quad (5)$$

Это так называемая прямая задача планирования, в которой приоритетом выступает достижение заданного военно-технического потенциала.

Возможна постановка обратной задачи планирования: определить потребную численность парка образцов ВВТ N, обеспечивающих максимальный военно-технический потенциал при заданной стоимости затрат на его формирование:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i N_i \to \max_{N_i};$$
$$\text{C} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\text{c}}_i N_i \leq \text{C}_{\text{зад}}. \quad (6)$$

В этой задаче достигаемый максимум потенциала может не гарантировать достижение заданного уровня потенциал $P_{зад}$.

Для получения одинакового решения прямой и обратной задачи необходимо согласование параметров $P_{\text{зад}}$, $\text{C}_{\text{зад}}$.

Сформулированные прямая и обратная задачи по виду относятся к задачам линейного программирования типа «задача о рюкзаке», «портфеле инвестиций», «потребительской корзине», «загрузки производства» и пр. [3; 4].

Однако в отличие от классических в рассматриваемой задаче коэффициенты целевых функций $\overline{p}_i$, $\overline{\text{c}}_i$ зависят от переменных задачи N_i, $i = \overline{1, N}$, которые изменяются в процессе поиска решений.

Поэтому для решения данной задачи применим итерационный алгоритм, основанный на градиентном методе поиска экстремума целевой функции[2].

Введем показатель $g_i = \frac{\overline{p}_i}{\overline{c}_i}$, характеризующий эффективность образца ВВТ по критерию «эффект-затраты». Он представляет собой отношение компонент вектора градиента $\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{N}}$ функции потенциала $P(\boldsymbol{N})$ и вектора градиента $\frac{\partial \text{C}}{\partial \boldsymbol{N}}$ функции стоимости $\text{C}(\boldsymbol{N})$. Векторы градиентов $\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{N}}$

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: учеб. пособие. 2-е изд. М.: Наука, 1988. – 552 с.

и $\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{N}}$ характеризуют чувствительность изменения целевых функций при изменении вектора численностей $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ на единицу.

Пусть в некоторый момент времени состав парка характеризуется численностью $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ образцов ВВТ. Стоимость закупки данной численности ВВТ составляет $\text{C}(\boldsymbol{N})$. Обозначим $\Delta\text{C} = \text{C}_{\text{зад}} - \text{C}(\boldsymbol{N})$ и предположим, что $\text{C}_{\text{зад}} > \text{C}(\boldsymbol{N})$. Тогда ΔC – это остаток бюджета для последующих закупок. Будем распределять этот остаток на закупку ΔN_i образцов ВВТ пропорционально ожидаемому приросту потенциала парка ВВТ $\Delta P_i = \overline{p}_i \Delta N_i$ с коэффициентом $g_i = \frac{\overline{p}_i}{\overline{c}_i}$:

$$\Delta P_i = \overline{p}_i \Delta N_i = \lambda g_i \Delta \text{C}; \; (i = \overline{1, n}), \tag{7}$$

где $\lambda > 0$ – нормирующий множитель.

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \Delta P$ есть величина суммарного приращения потенциала парка, находим выражение для неопределенного множителя λ:

$$\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta C \sum_{i=1}^{n} g_i}.$$

После подстановки λ в выражение (7), получаем:

$$\Delta P_i = \overline{p}_i \Delta N_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \Delta P = \gamma_i \Delta P, \tag{8}$$

где $\gamma_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}$; $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$ – коэффициент распределения ожидаемого прироста потенциала парка ВВТ по его составляющим.

Полученное распределение реализует принцип *пропорционального* распределения ресурсов по критерию «эффект-затраты», который широко применяется в теории и практике управления сложными организационными системами [5].

Из (8) получаем непосредственное выражение для расчета приращения ΔN_i, которое имеет вид:

$$\Delta N_i^* = \gamma_i \frac{\Delta P}{\overline{p}_i}. \tag{9}$$

Здесь следует отметить связь полученного решения с классическим решением задачи линейного программирования с постоянными коэффициентами $\overline{p}_i, \overline{c_i}$ при одном функциональном ограничении. Оптимальное решение такой задачи содержит только одну ненулевую компоненту вектора переменных $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$, для которой достигается максимум отношения $\frac{\overline{p}_i}{\overline{c}_i} = \max\limits_{1 \le j \le m} \left(\frac{\overline{p}_j}{\overline{c}_j}\right)$ [3]:

$$N_i^* = \begin{Bmatrix} \frac{P_{\text{зад}}}{p_i}, & \frac{\overline{p}_i}{\overline{c}_i} = \max\limits_{j=\overline{1,m}} \left(\frac{\overline{p}_j}{\overline{c}_j}\right) \\ 0 & \frac{\overline{p}_i}{\overline{c}_i} < \max\limits_{j=\overline{1,m}} \left(\frac{\overline{p}_j}{\overline{c}_j}\right) \end{Bmatrix}.$$

При этом распределении достигается минимум затрат $\mathrm{C}(\mathbf{N}) = \frac{P_{\text{зад}}}{\max\limits_{1 \le j \le m}\left(\frac{\overline{p}_j}{\overline{c}_j}\right)}$ в прямой задаче и максимум потенциала $P(\mathbf{N}) = C_{\text{зад}} \max\limits_{1 \le j \le m} \left(\frac{\overline{p}_j}{\overline{c}_j}\right)$ в обратной задаче планирования.

В рассматриваемой задаче с заданным типажом образов ВВТ и переменными коэффициентами распределение (9) является условно оптимальным относительно весовых коэффициентов γ_i, $(i = \overline{1,n})$. Эта оптимальность достигается использованием градиентов целевых функций, обеспечивающих достижение локального экстремума целевых функций. Для выпуклых целевых функций локальный экстремум совпадает с глобальным экстремумом и реализуется в граничной точке области допустимых решений[3].

Итерационный алгоритм поиска оптимального решения для прямой задачи имеет вид:

$$N_i^*(\tau) = N_i^*(\tau - 1) + \varepsilon \gamma_i \frac{[P_{\text{зад}} - P(\mathbf{N}^*(\tau - 1))]}{\overline{p}_i}, \tag{10}$$

для обратной задачи:

$$N_i^*(\tau) = N_i^*(\tau - 1) + \varepsilon \gamma_i \frac{[\mathrm{C}_{\text{зад}} - \mathrm{C}(\mathbf{N}^*(\tau - 1))]}{\overline{c}_i}, \tag{11}$$

где: $\tau = 1, 2, \ldots$ – номер итерации;
$\varepsilon > 0$ – коэффициент, регулирующий скорость сходимости алгоритма.

Дополним исходную постановку задачи требованием, чтобы в составе парка находились образцы ВВТ с уровнем современности не ниже заданного $\overline{p}_{\text{зад}}$:

$$\overline{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i N_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} \ge \overline{p}_{\text{зад}}. \tag{12}$$

В этом случае образцы ВВТ, имеющие показатель военно-технического уровня ниже заданного, должны выводиться из парка и замещаться другими образцами с более высоким военно-техническим уровнем.

[3] Васильев Ф.П. *Указ. соч.*

Итерационные алгоритмы для прямой и обратной задачи принимают следующий вид:

$$N_i^*(\tau) = \begin{cases} N_i^*(\tau-1) + \varepsilon\gamma_i \frac{[P_{зад} - P(\mathbf{N}^*(\tau-1))]}{\overline{p}_i}, & \overline{p}_i \geq \overline{p}_{зад} \\ max\left[N_i^*(\tau-1)\left(1+\varepsilon(p_i - \overline{p}_{зад})\right); 0\right], & \overline{p}_i < \overline{p}_{зад} \end{cases}, \quad (13)$$

$$N_i^*(\tau) = \begin{cases} N_i^*(\tau-1) + \varepsilon\gamma_i \frac{[C_{зад} - C(\mathbf{N}^*(\tau-1))]}{\overline{c}_i}, & \overline{p}_i \geq \overline{p}_{зад} \\ max\left[N_i^*(\tau-1)\left(1+\varepsilon(p_i - \overline{p}_{зад})\right); 0\right], & \overline{p}_i < \overline{p}_{зад} \end{cases}. \quad (14)$$

Рассмотрим иллюстративный пример решения прямой задачи оптимизации структуры и численности парка ВВТ для исходных данных, представленных в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные прямой задачи оптимизации структуры и численности парка ВВТ

Тип ВВТ, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Потенциал образца ВВТ p_i	0,813	0,850	0,894	0,896	0,900	0,900	0,904	0,955	0,955
Цена закупки образца ВВТ c_i	67	70	70	72	74	74	80	82	85
Начальная численность ВВТ N_i	114	341	484	656	202	4	19	31	0
Показатель эффективности закупок образца ВВТ $g_i = \frac{p_i}{c_i}$	0,012	0,012	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,012	0,011
Доля ВВТ в парке $\gamma_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$	0,063	0,063	0,067	0,065	0,064	0,064	0,059	0,061	0,059
Тип ВВТ, i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Потенциал образца ВВТ p_i	0,977	0,992	1,022	1,022	1,023	1,026	1,039	1,073	1,237
Цена закупки образца ВВТ c_i	90	91	100	102	103	110	130	135	200
Начальная численность ВВТ N_i	92	815	132	14	0	42	15	0	0
Показатель эффективности закупок образца ВВТ $g_i = \frac{p_i}{c_i}$	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,009	0,008	0,008	0,006
Доля ВВТ в парке $\gamma_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$	0,057	0,057	0,053	0,052	0,052	0,049	0,042	0,042	0,032

Требуемый суммарный потенциал парка ВВТ $P_{зад} = 4500$ ед.

На рисунке 1 показаны графики итерационного процесса при поиске оптимальной численности для восемнадцати типов образцов ВВТ, а на рисунке 2 – при дополнительном требовании об уровне современности образцов ВВТ не ниже $\overline{p}_{зад} = 0{,}82$. Среднее значение показателя ВТУ для парка ВВТ приведено на рисунке 3.

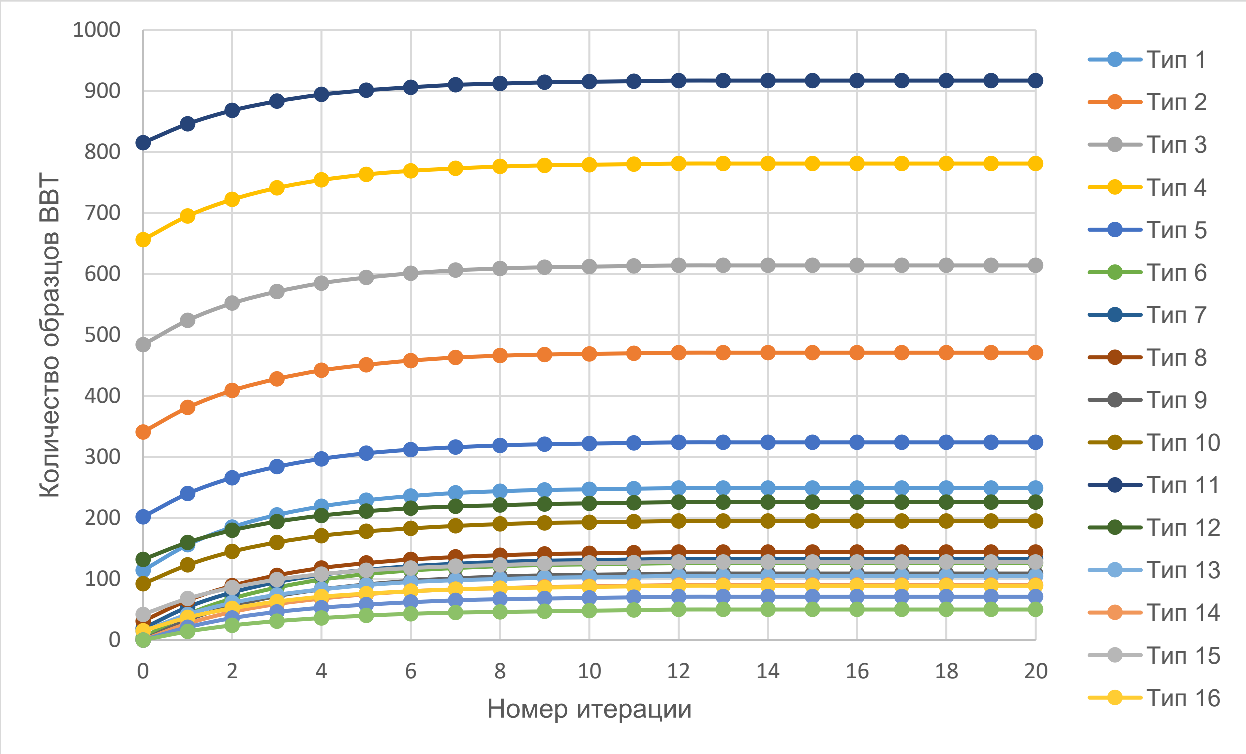

Рисунок 1 – Динамика численности образцов ВВТ в парке (1 вариант)

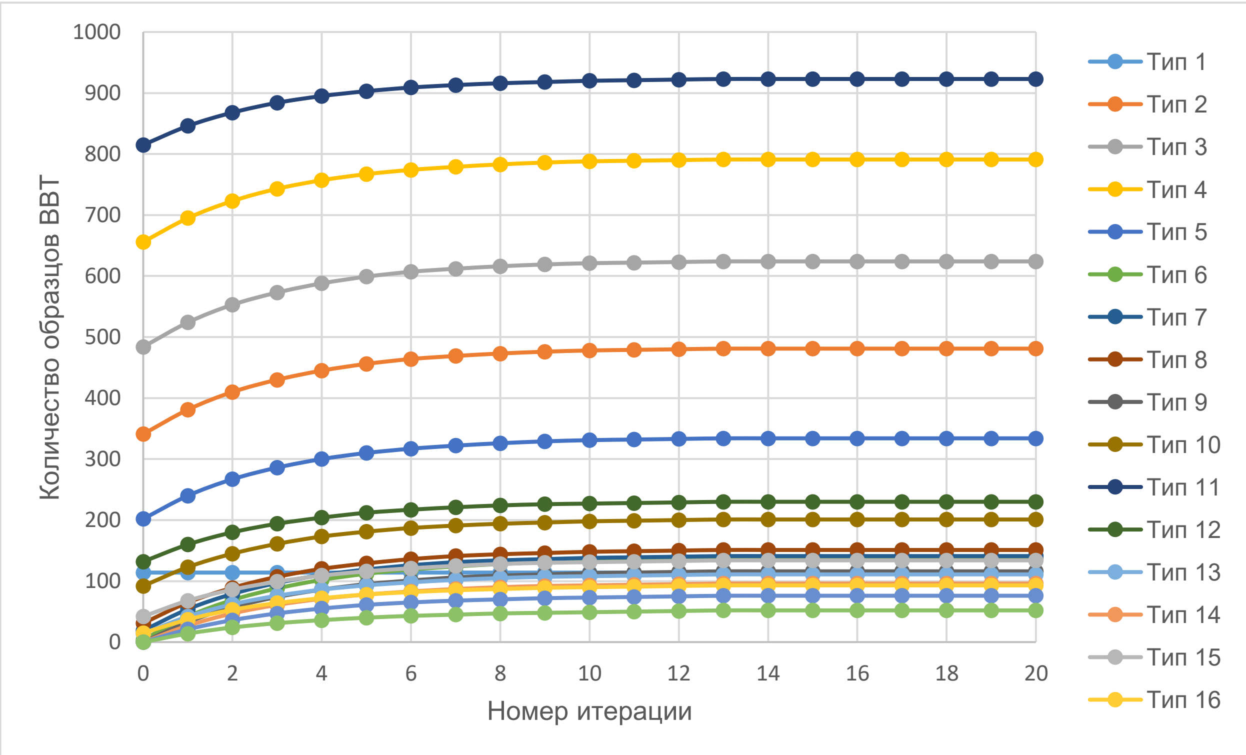

Рисунок 2 – Динамика численности образцов ВВТ в парке (2 вариант)

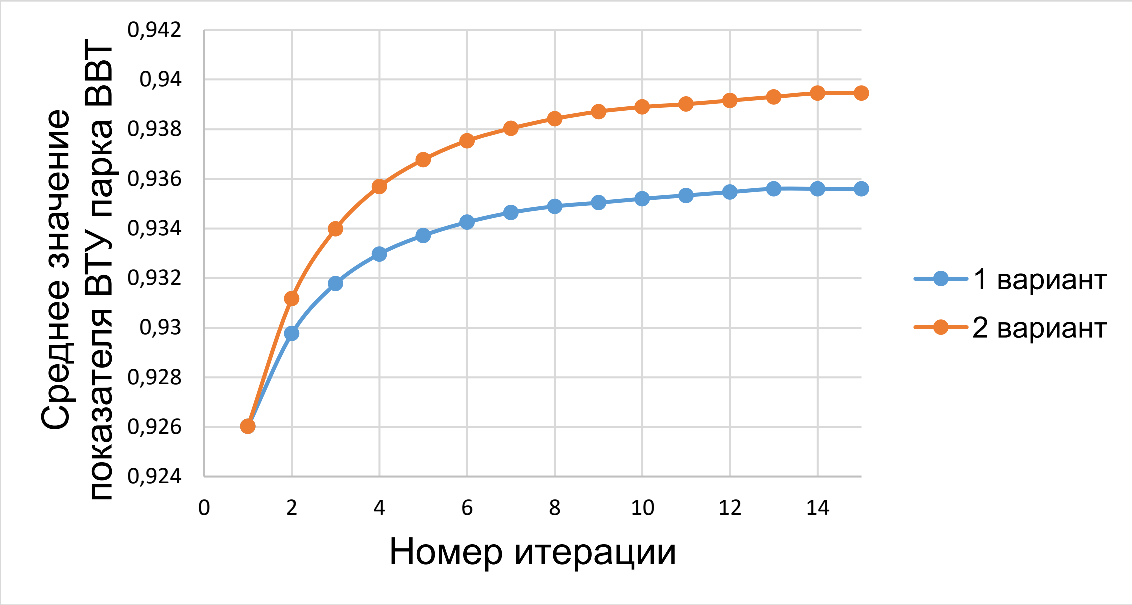

Рисунок 3 – Динамика среднего значения показателя военно-технического уровня парка ВВТ

Из приведенных рисунков видно, что алгоритм обеспечивает достаточно быструю сходимость к стационарному решению.

Для первого варианта в состав парка включаются все типы ВВТ – см. таблицу 2. Эта численность обеспечивает требуемый потенциал парка $P = 4511{,}5 > P_{\text{зад}}$ ед. при стоимости затрат на его формирование $\mathrm{C}(\boldsymbol{N}) = 167121$ у.е. Среднее значение военно-технического потенциала парка ВВТ составляет $\overline{p} = 0{,}935$ (рисунок 3).

Для второго варианта, где требуется обеспечить уровень современности парка ВВТ со средним значением военно-технического потенциала не ниже $\overline{p}_{\text{зад}} = 0{,}82$ в парке остаются также все типы ВВТ, но в ином количестве (см. таблицу 2).

Таблица 2 – Численность i-го ВВТ

1 вариант																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
249	471	614	781	324	126	133	144	109	195	917	226	105	90	128	89	71	50
2 вариант																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
114	481	624	791	334	136	141	151	116	201	923	230	111	96	134	93	76	52

Эта численность также обеспечивает требуемый потенциал парка $P = 4513{,}1 > P_{\text{зад}}$ ед. при стоимости затрат на его формирование $\mathrm{C}(\boldsymbol{N}) = 168456$ у.е. Среднее значение военно-технического потенциала парка ВВТ составляет $\overline{p} = 0{,}939$ (рисунок 3).

Из данного примеры следует, что оба варианта очень близки, однако, при практически одинаковых значениях среднего и суммарного потенциала парка ВВТ, первый вариант требует меньших затрат на его реализацию и, следовательно, более предпочтителен.

Список использованных источников

1. Методы военно-научных исследований систем вооружения. Военно-теоретический труд / Под общ. ред. В.М. Буренка. М.: Граница, 2017. – 512 с.
2. Буравлев А.И. Повышение рентабельности предприятий как основа стратегического управления оборонно-промышленным комплексом // Вооружение и экономика. 2018. №4(46). – С. 80-86.
3. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969. – 424 с.
4. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. – 519 с.
5. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами: монография. М.: МПСУ, 2005. – 584 с.