Научная статья
УДК 358.1

Об эффективности поражения групповой цели, состоящей из элементарных целей двух типов

Вячеслав Семенович Лугавов, Валентина Дмитриевна Лугавова

Аннотация. В работе рассматривается применение средств поражения по рассредоточенной групповой цели, представляющей совокупность элементарных (одиночных, малоразмерных) целей двух типов. Предполагается, что средства поражения применяются без перенацеливания, независимо, в одинаковых условиях, а среднее необходимое число попаданий в каждую элементарную цель равно единице. В качестве оценки эффективности применения средств поражения принимается математическое ожидание числа пораженных элементарных целей. В работе исследуется оптимальное распределение средств поражения по элементарным целям, при котором это математическое ожидание достигает максимума.

Ключевые слова: элементарная цель; рассредоточенная групповая цель; эффективность поражения групповой цели

Для цитирования: Лугавов В.С., Лугавова В.Д. Об эффективности поражения групповой цели, состоящей из элементарных целей двух типов // Вооружение и экономика. 2024. №2(68). С. 72-75.

Original article

On the Destruction Effectiveness of the Group Elementary Target of Two Types

Viacheslav S. Lugavov, Valentina D. Lugavova

Abstract. The paper examines the use of weapons against a dispersed group target, which is a set of elementary (single, small-sized) targets of two types. It is assumed that the weapons are used without retargeting, independently, under the same conditions, and the average of required hit number on each elementary target is equal to one. The mathematical expectation of the hit number on elementary targets is taken as an assessment of the weapons use effectiveness. The paper examines the optimal distribution of weapons by elementary targets, at which this mathematical expectation reaches a maximum.

Keywords: elementary goal; dispersed group goal; effectiveness of defeating a group target

For citation: Lugavov V.S., Lugavova V.D. On the Destruction Effectiveness of the Group Elementary Target of Two Types // Armament and Economics. 2024. No.2(68). P. 72-75.

В данной работе продолжено изучение рассмотренных в работах [1-5] вопросов оптимального распределения средств поражения.

Рассмотрим применение N средств поражения (СП) по рассредоточенной групповой цели, представляющей собой совокупность N_1 элементарных целей первого и N_2 элементарных целей второго типа (для удобства будем называть эти совокупности также первой и второй групповыми целями). Будем предполагать, что СП применяются без перенацеливания, независимо, в одинаковых условиях, а среднее необходимое число попаданий в каждую элементарную цель равно единице. Обозначим через p_1 (p_2) – вероятность поражения одной элементарной цели первого (второго) типа при применении по ней одного СП. В качестве оценки эффективности применения СП примем математическое ожидание числа пораженных элементарных целей в составе групповой цели.

Занумеруем все элементарные цели первого типа от 1 до N_1 и второго от $N_1 + 1$ до $N_1 + N_2$. Далее k-й элементарной цели $(k = 1, 2, \dots, N_1 + N_2)$ поставим в соответствие случайную величину $X_k(n)$, $n = 0, 1, \dots$, принимающую значение 1, если при применении n СП по k-й цели она окажется пораженной, и 0, если она окажется непораженной $(X_k(0) = 0)$. Тогда общее число пораженных целей (обозначим его X) будет равно:

$$X = \sum_{k=1}^{N_1+N_2} X_k(n_k),$$

где $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \cdots, n_{N_1+N_2} \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{N_1+N_2} n_k = N$;

и, следовательно, выполнено:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{N_1} P(X_k(n_k) = 1) + \sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2} P(X_k(n_k) = 1),$$

где $\sum_{k=1}^{N_1+N_2} n_k = N$.

Число $M(X)$ зависит от распределения СП по элементарным целям, т.е. от набора $(n_1, n_2, \dots, n_{N_1+N_2})$, причем от перестановки любых чисел этого набора, расположенных на первых N_1 местах, а также от перестановки любых чисел этого набора, расположенных на местах от $N_1 + 1$ до $N_1 + N_2$, математическое ожидание $M(X)$ не изменится.

Положим $n_1 + n_2 + \dots + n_{N_1} = t$ – число средств поражения, примененных по первой групповой цели, тогда по второй групповой цели будет применено $(N - t)$ оставшихся СП. При заданном значении t максимальное математическое ожидание числа пораженных элементарных целей в составе 1-й групповой цели (обозначим его $M_1(t)$) определяется по формуле (2) [5]:

$$M_1(t) = N_1 \left(1 - (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]} \left(1 - p_1 \left\{\frac{t}{N_1}\right\}\right)\right).$$

Здесь для произвольного числа a используется представление $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$, $\{a\}$ – соответственно целая и дробная части числа a. Аналогично, максимальное математическое ожидание числа пораженных элементарных целей в составе 2-й групповой цели при применении по ней $(N - t)$ оставшихся СП (обозначим его $M_2(N - t)$) определяется равенством:

$$M_2(N - t) = N_2 \left(1 - (1 - p_2)^{\left[\frac{N-t}{N_2}\right]} \left(1 - p_2 \left\{\frac{N-t}{N_2}\right\}\right)\right).$$

Отметим, что при заданных значениях t и N максимальные математические ожидания $M_1(t)$ и $M_2(N - t)$ определяются только наборами p_1, N_1 и соответственно p_2, N_2. Поэтому максимальное математические ожидание $M(t,N - t)$ пораженных целей в составе рассматриваемой групповой цели при применении t СП по первой групповой цели и $(N - t)$ оставшихся СП по второй групповой цели будет равно сумме максимальных математических ожиданий $M_1(t)$ и $M_2(N - t)$, то есть:

$$M(t,N - t) = M_1(t) + M_2(N - t).$$

Найдем при каком значении t $(0 \le t \le N)$ функция $M(t, N - t)$ достигает максимальное значение. Для этого рассмотрим приращение $(0 \le t \le N - 1)$:

$$\Delta(t,N) = M(t + 1,N - t - 1) - M(t,N - t) = M_1(t + 1) - M_1(t) + M_2(N - t - 1) - M_2(N - t). \quad (1)$$

Пусть $\left[\frac{t+1}{N_1}\right] = \left[\frac{t}{N_1}\right]$. Тогда $\left\{\frac{t+1}{N_1}\right\} = \left\{\frac{t}{N_1}\right\} + \frac{1}{N_1}$ и:

$$M_1(t + 1) - M_1(t) = N_1 \left(1 - (1 - p_1)^{\left[\frac{t+1}{N_1}\right]} \left(1 - p_1 \left\{\frac{t + 1}{N_1}\right\}\right)\right) - N_1 \left(1 - (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]} \left(1 - p_1 \left\{\frac{t}{N_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -N_1 (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]} \left(1 - p_1 \left\{\frac{t}{N_1}\right\} - p_1 \frac{1}{N_1} - 1 + p_1 \left\{\frac{t}{N_1}\right\}\right) = p_1 (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]}.$$

Если $\left[\frac{t+1}{N_1}\right] = \left[\frac{t}{N_1}\right] + 1$, то $\left\{\frac{t+1}{N_1}\right\} = 0$, $\left\{\frac{t}{N_1}\right\} = 1 - \frac{1}{N_1}$ и:

$$M_1(t + 1) - M_1(t) = N_1 \left(1 - (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]+1}\right) - N_1 \left(1 - (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]} \left(1 - p_1 \left(1 - \frac{1}{N_1}\right)\right)\right) =$$

$$= N_1 (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]} (-1 + p_1 + 1 - p_1 + p_1 \frac{1}{N_1}) = p_1 (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]}.$$

Таким образом:

$$M_1(t + 1) - M_1(t) = p_1 (1 - p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]}. \quad (2)$$

Для нахождения разности $M_2(N-t-1)-M_2(N-t)$, входящей в (1), отметим, что $M_2(t)$ получается из $M_1(t)$ заменой N_1 на N_2, p_1 на p_2. Поэтому:

$$M_2(N-t-1)-M_2(N-t)=-(M_2(N-t)-M_2(N-t-1))=-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-t-1}{N_2}\right]}. \quad (3)$$

В силу (1)-(3) окончательно получим:

$$\Delta(t,N)=p_1(1-p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]}-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-t-1}{N_2}\right]}.$$

Функция $\Delta(t,N)$ не возрастает, так как при $s>0$ выполнено:

$$\Delta(t+s,N)-\Delta(t,N)=\left(p_1(1-p_1)^{\left[\frac{t+s}{N_1}\right]}-p_1(1-p_1)^{\left[\frac{t}{N_1}\right]}\right)+\left(p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-t-1}{N_2}\right]}-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-t-s-1}{N_2}\right]}\right)\le 0,$$

в силу убывания показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$.

Отсюда, в частности, вытекает свойство:
(С1): если $\Delta(t,N)\le 0$ при некотором значении t, то и $\Delta(t+s,N)\le 0$ при $s>0$,
а также, если $\Delta(t,N)\ge 0$ при некотором значении t, то и $\Delta(t-s,N)\ge 0$ при $s>0$.

Из равенства $M(t,N-t)=M(0,N)+\Delta(0,N)+\Delta(1,N)+\dots+\Delta(t-1,N)$ и вышеприведенного свойства (С1) последовательности $\Delta(0,N),\Delta(1,N),\cdots,\Delta(N-1,N)$ вытекает, что максимум математических ожиданий $M(t,N-t)$, $t=0,\dots,N$ достигается в точке $\alpha=min(\,0\le r\le N-1:\Delta(r,N)\le 0)$, где $min(\emptyset)=N$. Итак:

$$\alpha=min\left(\,0\le r\le N-1: p_1(1-p_1)^{\left[\frac{r}{N_1}\right]}-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-r-1}{N_2}\right]}\le 0\right).$$

Таким образом, максимальное математическое ожидание числа пораженных элементарных целей в составе групповой цели достигается при применении α средств поражения по элементарным целям первого типа и $(N-\alpha)$ оставшихся средств поражения по целям второго типа. При этом распределение СП по элементарным целям первого типа определяется (см. [5]) равенствами:

$$n_1=n_2=\dots=n_{N_1\left\{\frac{\alpha}{N_1}\right\}}=\left[\frac{\alpha}{N_1}\right]+1;\ n_{N_1\left\{\frac{\alpha}{N_1}\right\}+1}=n_{N_1\left\{\frac{\alpha}{N_1}\right\}+2}=\dots=n_{N_1}=\left[\frac{\alpha}{N_1}\right]. \quad (4)$$

Распределение $(N-\alpha)$ оставшихся средств поражения по целям второго типа определяется аналогично:

$$n_{N_1+1}=n_{N_1+2}=\dots=n_{N_1+N_2\left\{\frac{N-\alpha}{N_2}\right\}}=\left[\frac{N-\alpha}{N_2}\right]+1;$$
$$n_{N_1+N_2\left\{\frac{N-\alpha}{N_2}\right\}+1}=n_{N_1+N_2\left\{\frac{N-\alpha}{N_2}\right\}+2}=\dots=n_{N_1+N_2}=\left[\frac{N-\alpha}{N_2}\right]. \quad (5)$$

Отметим следующее свойство числа α:
(С2): хотя бы одно из чисел $\left[\frac{\alpha}{N_1}\right]$, $\left[\frac{N-\alpha}{N_2}\right]$ является целым.

Действительно, при $\alpha=0$ и $\alpha=N$ свойство (С2) выполняется. Допустим, что $0<\alpha<N$ и указанные числа не являются целыми. Тогда $\left[\frac{\alpha}{N_1}\right]=\left[\frac{\alpha-1}{N_1}\right]$ и $\left[\frac{N-\alpha}{N_2}\right]=\left[\frac{N-\alpha-1}{N_2}\right]$. Следовательно, $p_1(1-p_1)^{\left[\frac{\alpha-1}{N_1}\right]}-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-(\alpha-1)-1}{N_2}\right]}=p_1(1-p_1)^{\left[\frac{\alpha}{N_1}\right]}-p_2(1-p_2)^{\left[\frac{N-\alpha-1}{N_2}\right]}\le 0$, что противоречит определению α.

Пример. В состав групповой цели входят 20 элементарных целей первого типа с вероятностью поражения $0{,}2$ каждой и 12 элементарных целей второго типа с вероятностью поражения $0{,}5$ каждой. По цели применено 50 средств поражения. Найти оптимальное распределение СП и соответствующее ему математическое ожидание числа пораженных целей.

Решение. По условию $N = 50$; $\mathrm{N}_1 = 20$, $\mathrm{p}_1 = 0{,}2$; $\mathrm{N}_2 = 12$, $\mathrm{p}_2 = 0{,}5$. В силу свойства (С2) оптимальное число примененных средств поражения α по целям первого типа должно совпадать с одним из чисел: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 14$, $\alpha_4 = 20$, $\alpha_5 = 26$, $\alpha_6 = 38$, $\alpha_7 = 40$, $\alpha_8 = 50$.
Напомним, что $\alpha = min(\, 0 \le r \le N - 1 \colon \Delta(r,N) \le 0)$, где $\Delta(r,N) = p_1(1 - p_1)^{\left[\frac{r}{N_1}\right]} - p_2(1 - p_2)^{\left[\frac{N-r-1}{N_2}\right]}$.
В условиях настоящего примера $(N = 50)$ выполняется $\Delta(r,N) = 0{,}2 \cdot (0{,}8)^{\left[\frac{r}{20}\right]} - 0{,}5 \cdot (0{,}5)^{\left[\frac{49-r}{12}\right]}$.
Подставим в это соотношение, например, $r = \alpha_5 = 26$.
Получим $\Delta(26{,}50) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 < 0$.
Из свойства (С1) последовательности $\Delta(r,N)$ следует, что $\Delta(r{,}50) < 0$ при $r = a_6, r = a_7, r = a_8$.
Найдем значение $\Delta(a_4{,}50) = \Delta(20{,}50)$.
Имеем $\Delta(20{,}50) = 0{,}2 - 0{,}5 \cdot (0{,}5)^2 > 0$.
Таким образом, $\alpha = 26$.
Отсюда вытекает, что оптимальное распределение СП определяется набором (см. (4), (5)) $(n_1, n_2, \dots, n_{32})$, где $n_1 = n_2 = \cdots = n_6 = 2$, $n_7 = n_8 = \cdots = n_{20} = 1$, $n_{21} = n_{22} = \cdots = n_{32} = 2$.
Математическое ожидание числа пораженных целей, определяемых оптимальным распределением, равно:

$$\mathrm{M}(26{,}24) = M_1(26) + \mathrm{M}_2(24) = 20 \cdot \big(1 - 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3)\big) + 12 \cdot\ 0{,}75 = 4{,}96 + 9 = 13{,}96.$$

Список источников

1. Колмогоров А.Н. Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1945. Т.12. С. 7-25.
2. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 388 с.
3. Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М.: Советское радио, 1968. 464 с.
4. Буравлев А.И. Об оценке влияния системы управления огнем на эффективность поражения целей // Вооружение и экономика. 2012. №1(17). С. 25-29.
5. Лугавов В.С., Лугавова В.Д. Об эффективности поражения групповой цели // Вооружение и экономика. 2023. №4(66). С. 38-41.

Информация об авторах

В.С. Лугавов – кандидат физико-математических наук, доцент;
В.Д. Лугавова – доцент.