

Научная статья
УДК 623.1/.7

Эффекты неопределенности при оценке превосходства сторон в моделях Осипова-Ланчестера

Александр Сергеевич Уланов, Виталий Владимирович Завадский,
Ярослав Борисович Зайченко

Аннотация. Приведено понятие свойства нетранзитивности отношений, дан ретроспективный обзор постановки проблемы нетранзитивности в различных парадигмах и областях науки. Исследовано влияние нетранзитивности стохастических входных параметров ланчестерской модели двусторонних боевых действий на транзитивность выходных параметров при различных распределениях случайной величины. Показана применимость полученных результатов для прогнозов динамики изменения количества вооружения и военной техники противоборствующих сторон в ходе боевых действий.

Ключевые слова: нетранзитивность; ланчестерская модель; случайная величина; боевые действия; моделирование

Для цитирования: Уланов А.С., Завадский В.В., Зайченко Я.Б. Эффекты неопределенности при оценке превосходства сторон в моделях Осипова-Ланчестера // Вооружение и экономика. 2024. №4(70). С. 43-51.

Original article

Effects of Uncertainty in the Course of Parties Superiority Assessment in Osipov-Lanchester Models

Aleksandr S. Ulanov, Vitalii V. Zavadskii, Iaroslav B. Zaichenko

Abstract. The concept of relations nontransitivity property is presented, and a retrospective review of the nontransitivity problem statement in different paradigms and fields of science is given. The influence of stochastic input parameters non-transitivity of the Lanchester bilateral combat operation model on the output parameters transitivity under random variable different distributions is studied. The applicability of the obtained results for forecasting the dynamics of changes in the number of armaments and military equipment of the warring parties in the course of combat operations is shown.

Keywords: non-transitivity; Lanchester model; random variable; combat operations; modeling

For citation: Ulanov A.S., Zavadskii V.V., Zaichenko Ia.B. Effects of Uncertainty in the Course of Parties Superiority Assessment in Osipov-Lanchester Models. Vooruzhenie i ekonomika = Armament and Economics. 2024;70(4): 43-51. (In Russ.).

Важное значение при принятии решения на тот или иной вариант боевых действий отводится определению соотношения сил сторон посредством прогнозирования количества вооружения и военной техники (ВВТ), которыми будут располагать стороны в заданные моменты времени с учетом боевых повреждений, отказов, восстановления ВВТ и поступления ВВТ из резервов. Косвенным образом это определяет и требования к начальному количеству ВВТ, и требования к производительности ремонтных органов, и требования к размеру резервов ВВТ на базах хранения. Очевидно, что динамика изменения количества ВВТ у сторон в ходе боевых действий носит принципиально стохастический характер. Одной из основных математических моделей, применяемых для моделирования процесса изменения количества ВВТ, является система уравнений Ланчестера. Однако, сравнение нескольких стохастических систем/процессов по некоторому показателю, заданному величиной, носящей случайный характер, является не такой тривиальной задачей, как принято думать. Как показано в [1-4], три и более случайные величины (показателя) могут находиться между собой в отношении нетранзитивности, что создает эффекты неопределенности.

В теории и практике различные виды отношений превосходства между объектами часто обладают свойством транзитивности: если A превосходит B и B превосходит C , то A превосходит C . Это имеет место, например, если каждый объект можно охарактеризовать действительным числом и сравнение объектов сводится к сравнению этих чисел.

В случае невозможности прямого сопоставления нескольких объектов (величин) с помощью сравнения какой-либо их числовой характеристики (например, когда она не наблюдаема либо сложно измеряема или ее невозможно задать) прибегают к попарным

сравнениям, определив некое правило, согласно которому в любой паре величин определяется превосходство или равенство. Однако, при таком подходе порой возникает эффект нетранзитивности: величины оказываются последовательно попарно упорядочены, но в совокупности не подчинены никакому отношению порядка, а их отношения образуют замкнутый круг. Так, например, в классической игре «Камень, ножницы, бумага...» камень превосходит («побеждает») ножницы, ножницы превосходят бумагу, но при этом бумага превосходит камень, а не наоборот. Таким образом, отношение между стратегиями в этой игре нетранзитивно и не существует оптимальной чистой стратегии.

Наиболее часто нетранзитивность отношений встречается в системах со стохастическими (случайными) параметрами, однако нетранзитивные наборы позиций существуют даже в шахматах – детерминированной игре с полной информацией. Это означает, что шахматную позицию нельзя описать каким-то одним числом (функцией от позиции), по которому она лучше или хуже других, и, как следствие, основанные на этой идее шахматные программы имеют ограниченные возможности [1]. Специалистами отмечается, что нетранзитивность часто имеет контринтуитивный характер и может затруднять принятие правильных решений о выборе [2].

Первоначально проблема нетранзитивности в приложении к точным и инженерным наукам была поставлена в середине XX века С.Трыбулой в связи с задачей из теории прочности. При парных сравнениях железных брусков с трех заводов может сложиться парадоксальная ситуация, когда бруски с первого завода «хуже» брусков со второго завода, бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого. Тема нетранзитивности стохастического предшествования приобрела популярность на примере так называемых нетранзитивных костей (кости Эфрона). Имеются в виду наборы игральные кости (кубиков), на грани которых нанесены числа таким образом, чтобы создать нетранзитивные отношения соответствующих случайных величин. Это означает, что в любой паре следующих друг за другом костей число, выпавшее на первой кости, чаще оказывается больше числа, выпавшего на второй кости. Нетранзитивные кости были популяризованы в 1970-х гг. М.Гарднером [3]. Однако при этом произошло сужение темы до дискретных случайных величин с конечным числом значений, а также сложилось не слишком серьезное отношение со стороны специалистов, зачастую относящих эту тему к игровой математике. Интерес к проблеме, в том числе среди российских специалистов, вновь обозначился лишь в XXI веке. Описание множества примеров нетранзитивности из различных сфер человеческой жизни, которые по своей сути являются довольно парадоксальными и могут затруднить принятие правильных решений, можно найти в серии публикаций А.Поддьякова¹. Обзор математических приложений нетранзитивности можно найти в работах А.Лебедева [5-7]. Проблема нетранзитивности обнаруживается в теории кооперативных игр, многокритериальных задачах индивидуального выбора, задачах векторной оптимизации, многоагентной логики, оптимизации бинарных опросников, задачах теории прочности, теории голосования (парадокс Кондорсе, теорема Эрроу о диктатуре). Обширный список литературы и результаты недавних исследований можно найти в [5; 8].

С точки зрения теории вероятностей нетранзитивные отношения между случайными величинами возникают в значении «чаще оказываться больше». Далее в статье явление нетранзитивности рассматривается в вероятностно-статистическом аспекте. Будем полагать, что существует три независимые случайные величины (триплет) X, Y, Z . Отношение между ними нетранзитивно, если выполняется условие:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &> 0,5, \\ P(Y > Z) &> 0,5, \\ P(Z > X) &> 0,5, \end{aligned}$$

где $P()$ – вероятность наступления события.

¹ См.: Поддьяков А.Н. Нетранзитивность – кладезь для изобретателей // Троицкий вариант. Наука. 2017. №242. С. 14; см. также: [2], [4].

Таким образом, под нетранзитивностью будем понимать ситуацию, когда:

$$p_{XYZ} = \min\{P(X > Y), P(Y > Z), P(Z > X)\} > 0,5.$$

Далее будем использовать p_{XYZ} как показатель «силы» нетранзитивности ситуации.

Несмотря на то что в последнее десятилетие эффекты нетранзитивности вызывают большой интерес исследователей, на многие теоретические вопросы ответы ещё не даны. Актуальность изучения эффектов нетранзитивности в аспекте военного и военно-технического приложения была обоснована авторами в [9]. В частности, была выдвинута гипотеза о том, что если в ланчестерской модели двусторонних боевых действий начальные условия или интенсивности процессов перехода между состояниями для сравниваемых вариантов группировок либо сценариев их применения связаны нетранзитивными отношениями, то эти отношения перейдут и на выходные параметры модели.

Ланчестерская математическая модель (уравнения Осипова – Ланчестера) в настоящее время широко применяется для моделирования и прогноза хода и исхода боевых действий. В 1916 году Ф.Ланчестер разработал достаточно простой метод для описания динамики численности двух сторон в вооруженном противоборстве. Под единицей численности сторон может пониматься организационная единица (воинское подразделение), единица ВВТ или отдельный боец. Дальнейшее развитие метода привело к появлению соответствующего инструментария, среди которого наиболее часто встречаются линейная модель 1-го рода (или «честного боя») и квадратичная модель.

Под линейной моделью 1-го рода понимают математическую модель взаимодействия двух противоборствующих сторон, которая в наиболее общем виде может быть представлена как система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon_1(t)x(t) - \varepsilon_2(t)y(t) + f_1(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_3(t)y(t) - \varepsilon_4(t)x(t) + f_2(t),$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$,

где $x(t)$ и $y(t)$ – численность сторон в момент времени t ;

$\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_3(t)$ – параметры, характеризующие интенсивность уменьшения численности сторон в связи с небоевыми потерями (дезертирство, болезни, отказы ВВТ);

$\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_4(t)$ – параметры, характеризующие интенсивность уменьшения численности сторон в связи с боевым воздействием противоборствующей стороны;

$f_1(t)$ и $f_2(t)$ – параметры, характеризующие изменение численности сторон в связи с пополнениями и переброской сил.

В зависимости от конкретной моделируемой ситуации отдельные параметры указанной системы уравнений могут отсутствовать (быть нулевыми). Как правило, при моделировании параметры уравнений принимаются постоянными или выражаются аналитической функцией. Однако в реальных условиях все параметры системы могут быть определены лишь приближенно и содержат неопределенность, связанную с влиянием различных факторов. То же касается и начальных условий (исходной численности сторон). Чтобы учесть эту неопределенность, параметры уравнений могут быть заданы случайными величинами, дискретными либо непрерывными.

Для изучения выдвинутой в [9] гипотезы в среде *Mathcad 15* было проведено имитационно-аналитическое моделирование. Сравнялось три условных сценария S_i , где $i = 1, 2, 3$ – порядковый номер сценария вооруженного противоборства сторон X и Y (три системы дифференциальных уравнений), различающихся величиной одного или нескольких параметров (далее – *параметром различия* (Π_p)). Поиск решения выполнялся численным методом Рунге – Кутты с постоянным шагом. Динамика противоборства рассматривалась на интервале времени t от 0 до 20 с дискретностью $\Delta t = 0,1$. В качестве *параметра сравнения* (Π_c) была выбрана величина $x(t)$, характеризующая численность стороны X для

условного $t = 12$ (рисунок 1). Π_p представлял собой случайную величину, возможные значения которой для рассматриваемых сценариев находились в нетранзитивном отношении. Рассматривалось несколько вариантов задания параметров уравнений. Для каждого варианта выполнялось от ста до трехсот прогонов модели.

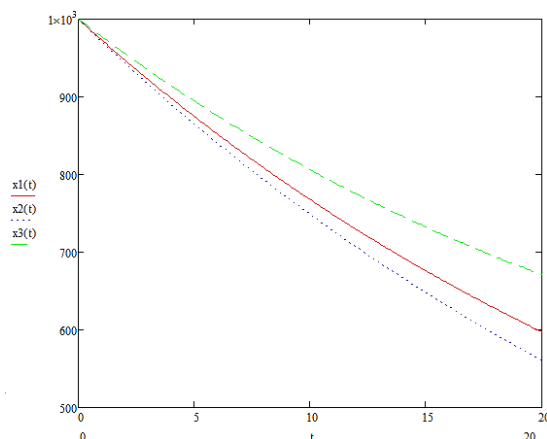


Рисунок 1 – Графики изменения численность стороны X от времени t

Вариант 1. Простейший случай, в котором параметры $\varepsilon_1^i(t)$, $\varepsilon_3^i(t)$, $f_1^i(t)$ и $f_2^i(t)$ имеют нулевые значения, $\varepsilon_4^i(t) = 0,02$. Параметр различия $\varepsilon_2^i(t)$ является дискретной случайной величиной, значение которой для каждого C_i определяется один раз в начале цикла решения. Реалистичной трактовкой данного подхода может быть, например, ситуация, когда в составе стороны X до начала конфликта к трехсменному боевому дежурству привлекаются образцы вооружения с различными характеристиками, либо отличающиеся качеством настроек, либо боевые расчеты с различным уровнем подготовки. Кроме того, в аспекте обсуждения реализма можно отметить, что дискретные распределения приближаются распределениями фазового типа (распределение, построенное путем свертки или смеси нескольких показательных распределений, отражающих результатов нескольких взаимосвязанных пуассоновских процессов), используемыми в теории массового обслуживания, а значит, свойства дискретных распределений переходят и на них [7].

Для задания значений Π_p использован триплет нетранзитивных случайных величин (T_1), равновероятно принимающих следующие значения [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^1(t) &= 0,03; 0,04; 0,08; \\ \varepsilon_2^2(t) &= 0,01; 0,05; 0,09; \\ \varepsilon_2^3(t) &= 0,02; 0,06; 0,07. \end{aligned}$$

При этом $P(\varepsilon_2^2(t) > \varepsilon_2^1(t)) = P(\varepsilon_2^3(t) > \varepsilon_2^2(t)) = P(\varepsilon_2^1(t) > \varepsilon_2^3(t)) = 5/9$, а средние равны 0,5. Триплет с равными средними выбран с целью исключения в случае нетранзитивности Π_c возможности их сопоставления (выбора лучшего сценария) по среднему значению. Для рассматриваемого редуцированного варианта системы уравнений известно аналитическое решение, однако с целью обеспечения единообразности подхода ко всем рассматриваемым ситуациям для их корректного сопоставления, был использован метод численного решения.

Равновероятная случайная выборка значений из триплета для рассматриваемого варианта и далее реализовывалась на основе встроенной в *Mathcad* функции *runif* (возвращает случайное число, имеющее равномерное распределение на заданном интервале). В результате был поручен триплет значений Π_c , аналитически (из предположения равновероятного распределения) имеющий тот же показатель нетранзитивности $p = 5/9$, что и Π_p , но обратной направленности превосходства (объясняется тем, что большее значение ε_2^i приводит к меньшему значению x_i). Имитационно было получено:

$$P(x_1 > x_2) = 0,58;$$

$$P(x_2 > x_2) = 0,58;$$

$$P(x_3 > x_2) = 0,56.$$

При этом отклонение друг от друга средних не превысило 0,9%, что может быть объяснено погрешностью, проистекающей из особенностей алгоритма численного решения.

Таким образом, было показано, что при указанных условиях, нетранзитивный триплет дискретных случайных значений Π_p с равными средними порождает на выходе модели нетранзитивный триплет Π_c с равными средними и приблизительно такой же силы нетранзитивности, но обратной направленности превосходства.

Вариант 2. Также для сравнения был использован другой триплет (T_2), с равными средними и равными дисперсиями [7], причем значения случайных величин неравновероятны (таблица 1). Показатель нетранзитивности равен 0,60365. Равенство дисперсий при равенстве средних ещё более затруднит выбор наилучшего сценария при нетранзитивности Π_c .

Таблица 1

Случайная величина	Значения случайной величины	Вероятность, с которой принимаются значения
ε_2^1	0,0230049	0,37044
	0,0500000	0,62956
ε_2^2	0,0300000	0,62956
	0,0569951	0,37044
ε_2^3	0,0108494	0,10000
	0,0400000	0,80000
	0,0691506	0,10000

Имитационно было получено:

$$P(x_1 > x_2) = 0,60;$$

$$P(x_2 > x_2) = 0,56;$$

$$P(x_3 > x_2) = 0,60.$$

Таким образом, получен нетранзитивный триплет Π_c обратной направленностью превосходства относительно Π_p . При этом отклонение друг от друга средних составило не более 0,4%, дисперсий – не более 1,3%, что говорит о сохранении свойств триплета Π_p в триплете Π_c .

Вариант 3. В вариант 1 были добавлены следующие показатели: $\varepsilon_1^i(t) = 0,01$; $\varepsilon_3^i(t) = 0,02$; $f_1^i(t) = 10$ и $f_2^i(t) = 20$. Имитационно получено:

$$P(x_1 > x_2) = 0,525;$$

$$P(x_2 > x_2) = 0,565;$$

$$P(x_3 > x_2) = 0,535.$$

Таким образом, нетранзитивность варианта 1 сохранена, но показатель нетранзитивности снизился («размыт» дополнительными параметрами уравнений).

Вариант 4. В варианте 3 показатель ε_2^i принят равным 0,02, а триплет T_1 применен к показателю $f_1^i(t)$. Имитационно получено:

$$P(x_1 < x_2) = 0,570;$$

$$P(x_2 < x_2) = 0,525;$$

$$P(x_3 < x_2) = 0,565.$$

Таким образом, нетранзитивность Π_c сохранена, и направление превосходства совпадает с Π_p .

Вариант 5. В варианте 3 показатель ε_2^i принят равным 0,02, а триплет T_1 применен к начальному условию $x_i(0)$. Имитационно получено:

$$\begin{aligned} P(x_1 < x_2) &= 0,54; \\ P(x_2 < x_2) &= 0,56; \\ P(x_3 < x_2) &= 0,58. \end{aligned}$$

Таким образом, нетранзитивность Π_c сохранена, и направление превосходства совпадает с Π_p .

Вариант 6. В систему уравнений по варианту 3 были введены два показателя, представленных нетранзитивными случайными величинами. Показателю ε_2^i присваиваются значения триплета T_1 , а ε_4^i – триплета T_2 (показатели имеют сходный для сторон X и Y смысл). Рассмотрено два случая: 1) направление превосходства показателей ε_2^i и ε_4^i совпадает; 2) разнонаправленное превосходство (направленность превосходства ε_2^i противоположна нумерации сценариев). В первом случае показатель нетранзитивности $t = 12$ составил 0,54, а направление превосходства было противоположно таковому у входного триплета. Во втором случае показатель нетранзитивности также составил 0,54, а направление превосходства совпадало с ε_2^i , т.е. триплет T_2 с большим показателем нетранзитивности определил и свойства Π_c . Необходимо отметить, что для данной совокупности условий графики решения уравнений пересекаются (рисунок 2), поэтому при иных значениях t показатель нетранзитивности Π_c может принимать иные значения либо нетранзитивность Π_c может отсутствовать вовсе.

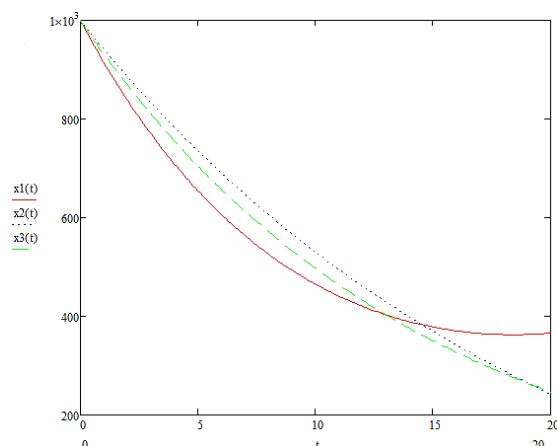


Рисунок 2 – Графики изменения численности стороны X

Также моделирование было повторено для условия, когда ε_4^i представлена триплетом случайных величин T_3 с равновероятными значениями, равными средними и показателем нетранзитивности равным $5/9$ [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^1(t) &= 0,02; 0,04; 0,09; \\ \varepsilon_3^2(t) &= 0,01; 0,06; 0,08; \\ \varepsilon_3^3(t) &= 0,03; 0,05; 0,07. \end{aligned}$$

Результаты моделирования аналогичны первому случаю, рассмотренному в данном варианте, а показатель нетранзитивности Π_c составил 0,53. Однако при разнонаправленном превосходстве T_2 и T_3 нетранзитивность Π_c получена не была – смешение триплетов привело к транзитивности результатов.

Вариант 7. Триплеты T_1 и T_2 были последовательно применены к парам параметров $\varepsilon_1^i - \varepsilon_2^i$ и $\varepsilon_2^i - \varepsilon_3^i$ (параметры в каждой паре различны по своему содержанию). Во всем спектре рассмотренных в вариантах 1-6 ситуаций транзитивность Π_c получена не была. Композиция триплетов в данных параметрах системы уравнений приводит к транзитивным решениям.

Вариант 8. Ситуации из вариантов 1-6 были промоделированы при условии, что величина соответствующего Π_p выбирается не однократно (до численного решения системы уравнений), а разыгрывается на каждом шаге для каждого $\Delta t = 0,1$. Ни в одном из рассмотренных случаев нетранзитивность Π_c отмечена не была, решения уравнений стремятся к детерминированному результату. Это объясняется тем, что при многократном розыгрыше значение случайной величины стремится к её среднему, а незначительные флуктуации решений между прогонами модели объясняются дисперсией случайной величины.

Для случая двух случайных величин среди параметров уравнения был дополнительно проверен другой подход к оценке результатов, основанный на понимании значения «чаще оказываться больше». Сравнение Π_c^i производилось на каждом шаге Δt , а результаты учитывались нарастающим итогом. Такой подход может быть интерпретирован как оценка, в каком из сценариев численность X в произвольно выбранный момент времени чаще окажется выше (чем в других моделируемых сценариях). Однако и при таком подходе к оценке результатов решения системы уравнений нетранзитивность Π_c выявлена не была.

Вариант 9. Рассмотрена ситуация, когда Π_p представлен непрерывной случайной величиной, значение которой определяется однократно (до численного решения системы уравнений). Представляется, что этот подход наиболее точно описывает реальные ситуации, в которых, как было указано ранее, все параметры системы уравнений определяются приближенно и всегда содержат неопределенность, связанную с влиянием различных внешних фактов.

За основу был взят вариант 3, в котором $\varepsilon_2^i(t)$ представлена триплетом, в котором ξ_k имеют нормальное распределение со средними $k + 1$ и дисперсией $\sigma = 0,3$ [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^1(t) &= \begin{cases} \xi_1 & \text{с вероятностью } 0,618, \\ \xi_4 & \text{с вероятностью } 0,382; \end{cases} \\ \varepsilon_2^2(t) &= \{\xi_2\}; \\ \varepsilon_2^3(t) &= \begin{cases} \xi_0 & \text{с вероятностью } 0,382, \\ \xi_3 & \text{с вероятностью } 0,618. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом $P(\varepsilon_2^2(t) > \varepsilon_2^1(t)) = P(\varepsilon_2^3(t) > \varepsilon_2^2(t)) = P(\varepsilon_2^1(t) > \varepsilon_2^3(t)) = 0,62$ [6]. По результатам моделирования для $t = 12$ получено:

$$\begin{aligned} P(x_1 > x_2) &= 0,61; \\ P(x_2 > x_2) &= 0,60; \\ P(x_3 > x_2) &= 0,61. \end{aligned}$$

Таким образом, Π_c сохранил показатель нетранзитивности Π_p и имеет противоположную направленность превосходства.

Вариант 10. Случайные величины $\varepsilon_2^i(t)$ имеют показательное распределение со средними μ^k , при этом $\lambda = \frac{1}{\mu^k}$, а μ выбрано равным 10 [6]. Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{cases} 0,1 & \text{с вероятностью } 0,625, \\ 0,0001 & \text{с вероятностью } 0,375; \end{cases} \\ \lambda^2 &= \{0,01\}; \\ \lambda^3 &= \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 0,375, \\ 0,001 & \text{с вероятностью } 0,625. \end{cases} \end{aligned}$$

Показатель нетранзитивности данного триплета составляет 0,57 [6]. По результатам моделирования для $t = 12$ получено:

$$\begin{aligned} P(x_1 > x_2) &= 0,65; \\ P(x_2 > x_2) &= 0,56; \\ P(x_3 > x_2) &= 0,56. \end{aligned}$$

Таким образом, Π_c сохранил показатель нетранзитивности Π_p и имеет противоположную направленность превосходства.

Вариант 11. Случайные величины $\varepsilon_2^i(t)$ имеют полиномиальное распределение с плотностью [11]:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_2^1) &\approx 7,891x^2 - 15,888x^3 + 8,997x^4; \\ F(\varepsilon_2^2) &\approx 0,427x^2 + 3,146x^3 - 2,573x^4; \\ F(\varepsilon_2^3) &\approx 3,034x - 9,315x^2 + 11,458x^3 - 4,1764x^4. \end{aligned}$$

Показатель нетранзитивности данного триплета составляет 0,5350 [11]. Результаты моделирования аналогичны вариантам 9 и 10. Данный случай особенно актуален, поскольку любое распределение может быть аппроксимировано многочленом [11].

Вариант 12. Значение непрерывных случайных величин $\varepsilon_2^i(t)$, имеющих описанные выше распределения, определялось на каждом шаге решения системы уравнений. Аналогично ситуациям с дискретными случайными величинами нетранзитивность Π_c получена не была.

Таким образом, гипотеза о том, что нетранзитивность параметров уравнений ланчестерской модели переходит на нетранзитивность результатов их решения подтвердилась для ряда ситуаций. Данные эффекты *могут* возникать в случае, когда один или более параметров системы уравнений являются стохастическими и заданы дискретными либо непрерывными случайными величинами, находящимися между собой в нетранзитивном отношении. В связи с этим, анализируя результаты решения системы дифференциальных уравнений Осипова-Ланчестера, нельзя априорно руководствоваться традиционной для логики сравнения и принятия решений аксиомой транзитивности отношений: если A превосходит B и B превосходит C , то A превосходит C – необходимо попарное сравнение. Так, например, для дискретных величин теоретический предел параметра нетранзитивности составляет 0,75. Для проверки транзитивности результатов решения уравнений, когда они представляют собой дискретные случайные величины, а множество их значений невелико, может использоваться алгоритм, приведенный в [10].

Необходимо отметить, что в данном исследовании не ставились вопросы об определении области значений Π_p , при которых проявляется нетранзитивность Π_c , и о том, какое распределение имеет Π_c в зависимости от распределения Π_p . Также остается открытым вопрос, может ли возникать нетранзитивность решений системы ланчестерских уравнений для случая, когда их параметры транзитивны (математиками уже доказано, что цепочки из транзитивных случайных событий могут быть нетранзитивны между собой). Это темы для будущих исследований.

В настоящей работе методом имитационно-аналитического моделирования была исследована и подтверждена гипотеза о переходе нетранзитивности параметров уравнений ланчестерской модели на результаты их решения. Данные эффекты возникают в случае, когда один или более параметров системы уравнений являются стохастическими и заданы нетранзитивными случайными величинами. Дальнейшим направлением исследованием может стать поиск случаев нетранзитивности решений при транзитивности стохастических параметров модели.

Применительно к прогнозу соотношения количества вооружения у противоборствующих сторон в свете приведенных результатов исследования можно сделать вывод о том, что в общем случае при использовании для оценки динамики изменения количества вооружения математического аппарата Ланчестера невозможно сделать однозначный вывод о предпочтительности той или иной схемы применения вооружений между тремя и более вариантами на основании вероятности превышения к заданному моменту времени количества вооружений по одному из вариантов применения над аналогичным количеством при другом варианте применения.

Список источников

1. Поддьяков А.Н. Нетранзитивные по выигрышности позиции белых и черных в шахматах // Математическая теория игр и ее приложения. 2022. Т.4. №3. С. 75-100.
2. Поддьяков А.Н. Нетранзитивность превосходства при взаимодействиях: междисциплинарный анализ // Управление большими системами: сб. трудов. 2007. №16. С. 171-182.
3. Gardner M. Mathematical Games. The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference. Scientific American. 1970;223(6): 110-114.
4. Поддьяков А.Н. Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // Вопросы психологии. 2019. №2. С. 3-16.
5. Лебедев А.В. Проблема нетранзитивности для трех непрерывных случайных величин // Автоматика и телемеханика. 2019. №6. С. 91-103.
6. Лебедев А.В. Нетранзитивные триплеты непрерывных случайных величин и их приложения // Информатика и ее применения. 2019. Т.13. №3. С. 20-26.
7. Горбунова А.В., Лебедев А.В. Эффекты стохастической нетранзитивности в системах массового обслуживания // Управление большими системами: сб. трудов. 2020. №85. С. 23-50.
8. Gorbunova A.V., Lebedev A.V. Nontransitivity of tuples of random, variables with polynomial density and its effects in Bayesian models. Mathematics and Computers in Simulation. 2022;202: 181-192.
9. Уланов А.С., Завадский В.В., Зайченко Я.Б. Эффекты неоднозначности отношения превосходства при оценках сил противоборствующих сторон // Военная мысль. 2024. №1. С. 45-58.
10. Якушева А.Н. Нетранзитивные кости с равными средними и дисперсиями// Математическая теория игр и ее приложения. 2022. Т.14. №3. С. 101-120.
11. Горбунова А.В., Лебедев А.В. Нижние оценки нетранзитивности для трех и четырех случайных величин с полиномиальной плотностью на единичном отрезке // Современные проблемы физико-математических наук: материалы VI Всерос. науч.-практ. конф. (г. Орел, 2020, 04-05 декабря). Орел: ОГУ, 2020. С. 154-161.

Информация об авторах

А.С. Уланов – кандидат технических наук, SPIN код автора 7873-6665.
В.В. Завадский – кандидат технических наук.
Я.Б. Зайченко – кандидат технических наук.