Научная статья
УДК 519.2

Методика оптимизации целевых требований в задачах программно-целевого планирования

Александр Иванович Буравлев

Аннотация. В статье разработана методика и алгоритм ее реализации по оптимизации функциональных характеристик и целевых показателей проектов, по критерию «эффективность-стоимость». В основу методики положен метод Лагранжа, связывающий между собой целевую функцию, характеризующую достигаемый эффект со стоимостью необходимых затрат. Метод Лагранжа безукоризненно обоснован математически, однако его практическая реализация наталкивается на определенные трудности, связанные с оценкой неопределенных множителей функции Лагранжа. Автором предложен достаточно простой численный алгоритм, позволяющий решать оптимизационные задачи данным методом. Проверка алгоритма на ряде задач программно-целевого планирования показало его высокую точность и скорость сходимости к искомому решению.

Ключевые слова: оптимизация характеристик проектов по критерию «эффективность-стоимость»; метод оптимизации Лагранжа; методика и численный алгоритм оценивания неопределенных множителей Лагранжа в многопараметрической задаче с малым числом функциональных ограничений

Для цитирования: Буравлев А.И. Методика оптимизации целевых требований в задачах программно-целевого планирования // Вооружение и экономика. 2025. №3(73). С. 62-72.

Original article

Methodology for Target Requirements Optimization in the Tasks of Program-Target Planning

Aleksandr I. Buravlev

Abstract. The article develops a methodology and algorithm for its implementation of the projects performance and targets optimization according to the “efficiency-cost” criterion. The methodology is based on the Lagrange method, which links the objective function that characterizes the achieved effect with the necessary cost input. The Lagrange method is perfectly mathematically justified, but its practical implementation encounters certain difficulties associated with the indefinite multipliers estimation of the Lagrange function. The author proposes a fairly simple numerical algorithm that allows optimization problems solution by usage of this method. The algorithm testing on a number of software-targeted planning tasks showed its high accuracy and rate of convergence to the desired solution.

Keywords: project performance optimization on the efficiency-cost criterion; Lagrange optimization method; estimation methodology and numerical algorithm for indefinite Lagrange multipliers in a multiparametric problem with a small number of functional constraints

For citation: Buravlev A.I. Methodology for Target Requirements Optimization in the Tasks of Program-Target Planning. Vooruzhenie i ekonomika = Armament and Economics. 2025; 73(3): 62-72. (In Russ.).

Большинство задач программно-целевого планирования (ПЦП) связано с поиском экстремума одной выбранной (заданной) целевой функции при ограничениях на другие целевые функции, определяющие область существования исследуемого объекта или процесса [1; 2]. Целевая функция, которую требуется максимизировать или минимизировать, отражает главную цель поставленной задачи. Если эта функция характеризует ожидаемый эффект, то, естественно, она подлежит максимизации при остальных функциональных ограничениях, в том числе и затрат на достижение такого эффекта. В том случае, если целевая функция характеризует затраты на получение заданного эффекта, то, естественно, она подлежит минимизации при выполнении остальных функциональных ограничений. Решения первой и второй задачи в общем случае будут различными. Они могут совпадать только в определенной ситуации, когда их зависимости от параметров обладают определенными свойствами, которые мы рассмотрим ниже.

Сформулируем математическую постановку типовой задачи программно-целевого планирования.

Обозначим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}_n$ – вектор функциональных параметров исследуемого объекта (процесса), принадлежащий n-мерному пространству действительных чисел. На множестве значений вектора $\mathbf{x}$ зададим две функции: $W(\mathbf{x})$ – функцию, отражающую прогнозируемый эффект и функцию $C(\mathbf{x})$, характеризующую потребные затраты ресурсов для его достижения. Шкалы и единицы измерения этих функций могут быть различными. В задачах программно-целевого планирования функция эффекта $W(\mathbf{x})$, как правило, представляет собой логистическую (выпукло-вогнутую) функцию, а функция затрат $\mathrm{C}(\mathbf{x})$ – выпуклую функцию [1; 3].

Выделим из вектора $\mathbf{x}$ подмножество управляемых параметров:

$$(\mathbf{u} = u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}_m \subseteq \mathbf{R}_n,$$

целенаправленное изменение которых приводит к изменению эффекта и затрат. Тогда задача оптимизации целевых требований к параметрам управления объектом (процессом) принимает следующий вид:

$$\text{а) } W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) \Longrightarrow \max;\ \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) \le \hat{\mathrm{C}}; \tag{1}$$

$$\text{б) } \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) \Longrightarrow \min;\ W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) \ge \widehat{\mathrm{W}}, \tag{2}$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\mathbf{u}$ – вектор неуправляемых параметров.

Для решения таких задач широко используется метод Лагранжа [2; 4]. Суть метода состоит в замене целевой функции и ограничения их линейной комбинацией с неопределенным параметром $\lambda > 0$.

Для задачи а) эта комбинация имеет вид:

$$F_1(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) = W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) + \lambda\left[\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})\right] \Longrightarrow \max_{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}_m}. \tag{3}$$

Максимум этой функции зависит не только от управляемых переменных, но и от «невязки» $[\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})]$, взвешенной коэффициентом λ. Если одновременно с изменением вектора переменных $\mathbf{u}$ в направлении увеличения целевой функции $W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$ уменьшать величину «невязки» с определенным коэффициентом $\lambda \ge 0$, то экстремум функции Лагранжа $F_1(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$ будет приближаться к экстремуму $W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$. Таким образом, коэффициент λ выполняет корректирующую роль в процессе поиска экстремума функции с учетом наложенного ограничения. Для выпуклых и дифференцируемых функций критерием нахождения экстремального значения функции Лагранжа является *максимин*:

$$F_1(\mathbf{u}, \lambda|\tilde{\mathbf{x}}) = W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) + \lambda\left[\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})\right] \Longrightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}_m} \min_{\lambda \ge 0}, \tag{4}$$

а оптимальное решение $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$ образует «седловую» точку [4; 5].

Для задачи б) критерием минимума функции Лагранжа является *минимакс*:

$$F_2(\mathbf{u}, \mu|\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) + \mu\left[\widehat{\mathrm{W}} - \mathrm{W}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})\right] \Longrightarrow \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}_m} \max_{\mu \ge 0}. \tag{5}$$

Экстремум функций Лагранжа (4), (5) для гладких функций $W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$, $C(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$ достигает в точках $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$, $(\mathbf{u}^*, \mu^*)$, для которых выполняются следующие условия:

$$dF_1/d\mathbf{u} = dW/d\mathbf{u} - \lambda\, dC/d\mathbf{u} = 0;\ dF_1/d\lambda = \hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) = 0;$$

$$dF_2/d\mathbf{u} = d\mathrm{C}/d\mathbf{u} - \mu\, dW/d\mathbf{u} = 0;\ dF_2/d\mu = \widehat{W} - \mathrm{W}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) = 0.$$

Откуда следуют соотношения:

$$dW/d\mathbf{u} = \lambda\, d\mathrm{C}/d\mathbf{u};\ dW(\mathbf{u})/d\mathrm{C}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u});\ \mathrm{C}(\mathbf{u}) = \hat{\mathrm{C}}. \tag{6}$$

$$d\mathrm{C}/d\mathbf{u} = \mu\, dW/d\mathbf{u};\ d\mathrm{C}(\mathbf{u})/dW(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{u});\ \mathrm{W}(\mathbf{u}) = \widehat{W}. \tag{7}$$

Решение систем нелинейных уравнений (6), (7) определяет точку максимума функции $W(\mathbf{u}|\tilde{x})$ при ограничении функции затрат $\mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}}) \le \hat{\mathrm{C}}$ и точку минимума функции затрат $\mathrm{C}(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$ при ограничении:

$$W(\mathbf{u}|\tilde{x}) \ge \widehat{W}.$$

Сравнивая выражения (6), (7) видим, что неопределенные множители Лагранжа в прямой и обратной задаче связаны обратной зависимостью:

$$\mu(\mathbf{u}) = 1/\lambda(\mathbf{u}).$$

Поскольку $dW/d\mathbf{u} = \mathrm{grad\ W}(\mathbf{u})$, $dC/d\mathbf{u} = \mathrm{grad\ C}(\mathbf{u})$ есть градиенты функций по вектору параметров $\mathbf{u}$, то первые уравнения в системе (6), (7) означают, что в точке экстремума градиенты функции эффекта и затрат коллинеарны (однонаправлены), а их длины пропорциональны коэффициенту $\lambda > 0$. Вторые равенства (6), (7) определяют величину производной функции эффекта $W(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$, от функции затрат $C(\mathbf{u}|\tilde{\mathbf{x}})$ в точке $\mathbf{u}$, причем эта производная положительная. Третье равенство задает граничное значение функции затрат.

Учитывая эти свойства, построим численный алгоритм нахождения точки экстремума функции Лагранжа, используя схему Эйлера для конечных разностей [5][1]:

$$\Delta W(\mathbf{u_n}) = \langle dW/d\mathbf{u_n} \cdot \Delta\mathbf{u_n} \rangle = \lambda\, \Delta C(\mathbf{u_n});\ (n = 1,2, \dots),$$

откуда следует выражение для покомпонентных приращений вектора $\mathbf{u}$:

$$\Delta u_n = \lambda \frac{\Delta C(\mathbf{u_n})}{\partial \mathrm{W}/\partial u_n},$$

где $\Delta \mathrm{u}_n = u_{\mathrm{n}} - u_{n-1}$ – приращение компоненты вектора параметров $\mathbf{u}_n$ на n-м шаге;
$\Delta W(\mathbf{u}_n) = W(\mathbf{u}_n) - W(\mathbf{u}_{n-1})$ – ожидаемое приращение показателя эффекта на этом шаге;
$\Delta C(\mathbf{u}_n) = C(\mathbf{u}_n) - C(\mathbf{u}_{n-1})$ – потребные затраты ресурсов для достижения ожидаемого эффекта.

Числовое значение неопределенного множителя Лагранжа на каждом шаге приближенно определяется выражением [4; 5]:

$$\lambda_n = \frac{\Delta W(\mathbf{u}_n)}{\Delta C(\mathbf{u}_n)} \cong \frac{|\mathrm{grad\ W}(\mathbf{u}_n)|}{|\mathrm{grad\ C}(\mathbf{u}_n)|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\partial \mathrm{W}/\partial u_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\partial \mathrm{C}/\partial u_i)^2}}, \qquad (7)$$

где $|\mathrm{grad\ W}(\mathbf{u}_n)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\partial \mathrm{W}\ /\ \partial u_i)^2}$ – модуль вектора градиента функции $\mathrm{W}(\mathbf{u}_n)$.

В результате получаем следующую систему рекуррентных уравнений для задачи а):

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \varepsilon\lambda_{n-1}\, \Delta \mathrm{C}(\mathbf{u}_{n-1})/\Delta W((\mathbf{u}_{n-1}); \lambda_{n-1} = \mathrm{d}W(\mathbf{u}_{n-1})/\mathrm{dC}(\mathbf{u}_{n-1});\ (n = 1,2, \dots), \qquad (8)$$

где ε>0 величина шага алгоритма, который выбирается из устойчивости алгоритма и точности оценивания вектора параметров $\mathbf{u}_n$ по равенству:

$$\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\mathbf{u}) = 0.$$

Для задачи б) алгоритм поиска минимума система уравнений имеет аналогичную структуру:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \varepsilon\mu_{n-1}\, \Delta \mathrm{W}(\mathbf{u}_{n-1})/\Delta \mathrm{C}(\mathbf{u}_{n-1}); \mu_{n-1} = d\mathrm{C}(\mathbf{u}_{n-1})/d\mathrm{W}(\mathbf{u}_{n-1});\ (n = 1,2, \dots). \qquad (9)$$

Сравнивая выражения для коэффициентов $\lambda(\mathbf{u}_n)$, $\mu(\mathbf{u}_n)$, убеждаемся, что между ними существует обратная зависимость:

$$\mu(\mathbf{u}_n) = 1/\lambda(\mathbf{u}_n).$$

Это соотношение позволяет контролировать правильность вычислительного процесса для прямой и обратной задач. Оно также обеспечивает получение единого решения, как для прямой, так и для обратной задачи.

[1] Выражение $\langle\, dW/d\mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{u} \,\rangle$ представляет собой скалярное произведение векторов.

Проиллюстрируем применение метода Лагранжа на примере оптимизации характеристик поражающего действия артиллерийского снаряда.

Пример 1. Эффективность поражения одиночной малоразмерной цели зависит от радиуса зоны поражения снаряда R_{Π} и точности стрельбы, которая характеризуется средним квадратическим отклонением (СКО) σ его промаха при круговом рассеивании относительно точки прицеливания (центра цели). Для расчета вероятности поражения цели используем известный закон поражения [1; 6] с накоплением ущерба:

$$W = 1 - exp\left(-R_{\Pi}^2/2\sigma^2\right).$$

Увеличение радиуса поражения и уменьшение СКО промаха приводит к увеличению вероятности поражения. Однако для достижения такого эффекта необходимы определенные затраты на увеличение мощности выстрела, массы боевой части снаряда, а также улучшение его баллистических характеристик. В качестве параметра управления целевым показателем W рассмотрим отношение радиуса поражения к величине СКО $u = R_{\Pi}/\sigma$, а в качестве функции затрат нелинейную функцию:

$$\mathrm{C}(u) = c_0 + c_1 u^{\alpha},$$

где c_0, c_1, α – параметры затрат, связанные с технико-технологическими параметрами изделия и процесса его производства. Параметр $\alpha > 0$ характеризует степень роста затрат для применяемых технологий.

Поставим задачу: найти величину $u^* = R_{\Pi}/\sigma$ обеспечивающую максимальную вероятность поражения цели:

$$W(u^*) = \max_{\mathrm{u} > 0}[1 - exp(-u^2/2)]$$

при заданных затратах на производство изделия:

$$\mathrm{C}(u; \propto) = c_0 + c_1 u^{\alpha} \le \hat{\mathrm{C}}.$$

Заметим, что целевая функция $W(u)$ является логистической функцией и на уровне $W(u) = 0{,}5$ распадается на две ветви – выпуклую вниз и выпуклую вверх части функции.

Решим поставленную задачу сначала аналитическим методом. Составим функцию Лагранжа $F_L(u, \lambda) = W(u) + \lambda\left[\hat{\mathrm{C}} - c_0 - c_1 u^{\alpha}\right]$ и найдем ее стационарную точку:

$$dF_L/du = dW(u)/du - \lambda\, dC(u)/du = 0;\ dF_L/d\lambda = \hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(u) = 0.$$

Из равенства $\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(u) = 0$ находим предельное значение параметра:

$$\hat{u} = \left[(\hat{\mathrm{C}} - c_0)/c_1\right]^{1/\alpha}$$

для заданного уровня финансирования $\hat{\mathrm{C}}$.

При этом значении целевая функция:

$$W(\hat{u}) = 1 - exp(-\hat{u}^2/2) = 1 - exp\left(-\left[(\hat{\mathrm{C}} - c_0)/c_1\right]^{2/\alpha}/2\right)$$

принимает максимальное значение.

Далее из равенства $dW(u)/du = \lambda\, d\mathrm{C}(u)/du$ находим требуемое значение неопределенного коэффициента Лагранжа $\lambda = dW(u)/dC(u)$. Технико-экономический смысл коэффициента λ – величина прироста эффективности изделия на единицу стоимости затрат.

Производные целевых функций имеют аналитический вид:

$$dW(u)/du = u\, exp(-u^2/2);\ dC(u)/du = c_1 \alpha u^{\alpha-1}.$$

Коэффициент λ в этом случае будет равен:

$$\lambda(u) = u^2/\propto\cdot [1 - W(u)]/[C(u) - c_0]$$

и в точке $\hat{u}$ он принимает конечное значение.

Заметим, что при $u = 0$, $\lambda(0) = 0$. Далее при увеличении параметра u происходит увеличение $\lambda(u)$ до максимального значения $\lambda(u = 1)$, а затем уменьшение до величины $\lambda(\hat{u})$.

На рисунке 1 показаны графики зависимости показателя эффективности $W(u)$ и связанных с ним относительных затрат $\bar{C}(u, \alpha) = C(u, \alpha)/\hat{C}$ от параметров управления u, α.

Точка пересечения графиков $W(u)$ и $\bar{C}(u, \alpha)$ определяет оптимальное значение параметра $u^*(C; \alpha)$. В соответствии с теорией математического программирования [4; 5] максимальное значение функция $W(u)$ достигает в предельной точке ограничения $\bar{C}(\hat{u}, \alpha)$. Таким образом, предельная точка $\hat{u} = [(\hat{C} - c_0)/c_1]^{1/\alpha}$ является оптимальной точкой исходной задачи.

На рисунке 2 показаны графики изменения неопределенного множителя Лагранжа $\lambda(u, \alpha)$ также в зависимости от параметров управления u, α. Следует отметить, что графики пересекаются в одной точке, соответствующей ограничению по предельным расходам $\hat{C}$ у.е. В данном примере они составляют $\hat{C} = 2{,}0$ у.е.

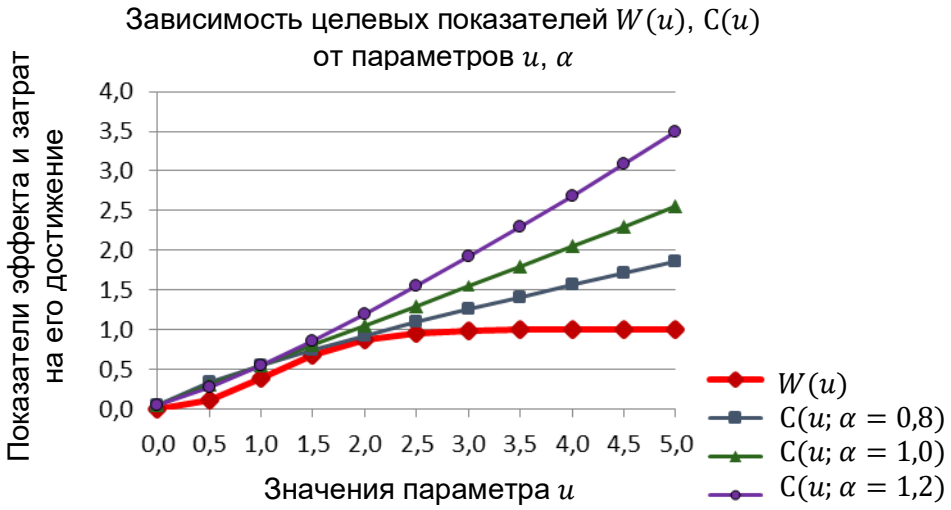

Рисунок 1 – Зависимость показателя эффективности изделия $W(u)$ и расходов на его достижение $\bar{C}(u; \alpha)$ от параметров управления u, α

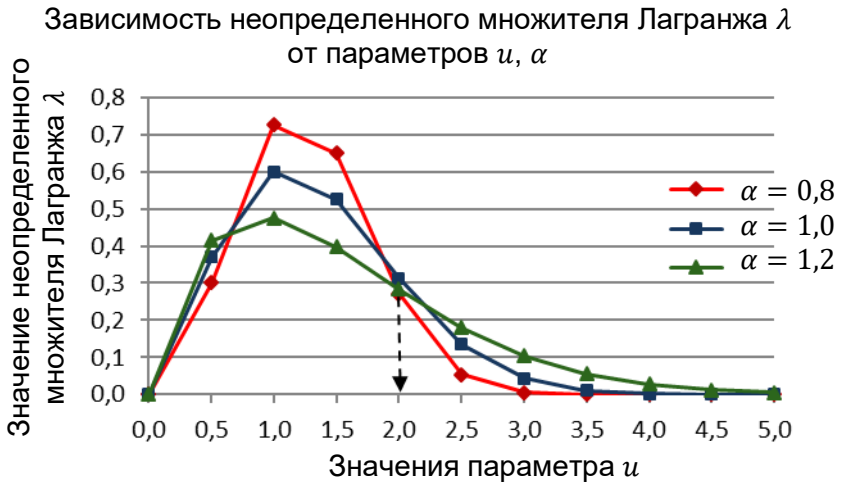

Рисунок 2 – Зависимость неопределенного множителя Лагранжа $\lambda(u, \alpha)$ от параметров управления изделием

Задача упрощается и приобретает более понятный технико-экономический смысл, если в качестве переменной задачи использовать выделяемый бюджет $\hat{C}(u;\alpha)$, который связан с технико-экономическими параметрами разработки и производства изделия. На рисунке 3 показана зависимость выходного показателя $W(\hat{C};\alpha)$ от уровня финансирования проекта.

Оценим максимальную эффективность снаряда $W(\hat{C};\alpha)$ от параметров затрат для следующих исходных данных: $c_0 = 0{,}1$; $c_1 = 1{,}0$; $\propto = 0{,}8; 1{,}0; 1{,}2$; $\hat{C} = 2{,}0$ у.е. (таблица 1).

Из приведенного примера ясно, что первый вариант является более предпочтительным по сравнению с остальными. Он обеспечивает заданную эффективность поражения цели, минимальный расход снарядов и меньшую стоимость.

Теперь решим эту задачу численным методом с применением рекуррентного алгоритма (8). Уравнения алгоритма для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$u_n^* = u_{n-1}^* + \varepsilon \cdot \lambda(u_{n-1}^*)/u_{n-1}^* \cdot [\hat{C} - C(u_{n-1}^*)]/[1 - W(u_{n-1}^*)];$$
$$\lambda(u_n^*) = u_n^*/\alpha \cdot [1 - W(u_n^*)]/[C(u_n^*) - c_0] \qquad (10)$$

с начальными условиями u_0, λ_0.

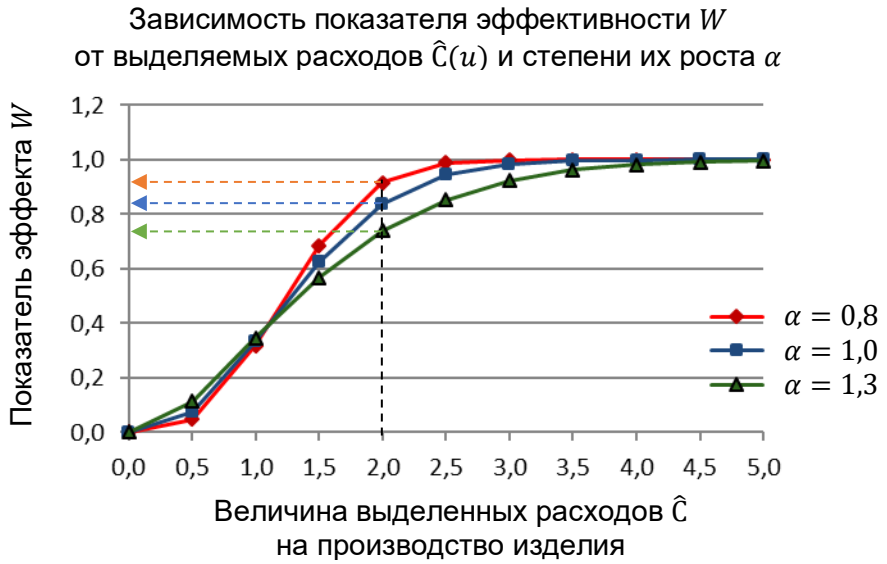

Рисунок 3 – Зависимость показателя эффективности изделия $W(\hat{C};\alpha)$ от выделенных расходов на его производство

Таблица 1 – Данные расчета показателей качества и эффективности изделия

Показатели качества и эффективности изделия	Значение технологического параметра α		
	0,8	1,0	1,2
$\hat{u}(\hat{C};\alpha)$	2,7	1,9	1,6
$W(\hat{C};\alpha)$	0,92	0,84	0,74
Потребный расход снарядов для поражения цели с вероятностью $W_{зад} \geq 0{,}95$	1,2	1,7	2,5

Примечание: Потребный расход снарядов для поражения цели с заданной вероятностью рассчитывается по формуле: $N_c = ln(1 - W_{зад})/ln(1 - W(\hat{u}, \propto)$.

Останов алгоритма осуществляется при достижении неравенства:

$$\hat{C} - C(u_n^*) \le \delta_{зад}$$

с заданной погрешностью на n-м шаге.

В таблице 2 приведены численные значения целевых показателей $W(u^*)$, $C(u^*)$ в процессе поиска экстремального значения для расчетного варианта $\hat{C} = 2{,}0$ у.е.; $\propto = 0{,}8$; $\varepsilon = 1{,}0$.

На рисунке 4 приведены графики изменения этих показателей в процессе работы алгоритма.

Учитывая, что в процессе поиска оценки целевых показателей $W(u_n^*)$, $C(u_n^*)$ сходятся к предельным значениям, то после замены $\lambda(u_n^*)$ ее выражением с учетом приближенного равенства $W(u_n^*) \approx W(u_{n-1}^*)$ получаем приближенный алгоритм поиска:

$$u_n^* = u_{n-1}^*\left[1 + \varepsilon/\alpha \cdot \left[\hat{C} - C(u_{n-1}^*)\right]/[C(u_{n-1}^*) - c_0].\right]; (n = 1{,}2, \dots). \quad (11)$$

На рисунке 5 показаны графики изменения параметра $u^* = R_П/\sigma$, рассчитанные по точному (10) и приближенному (11) уравнениям.

Таблица 2 – Численные значения целевых показателей в процессе поиска экстремума

Значения параметров	Номер шага поиска							
	0	1	2	3	4	5	6	7
u^*	0	0,02	0,67	2,25	2,88	2,91	2,91	2,91
$C(u^*)$	0,10	0,10	0,20	0,88	1,73	1,99	2,00	2,00
$C(u^*)/C$	0,05	0,10	0,44	0,86	0,99	1,00	1,00	1,00
$W(u^*)$	0,00	0,00	0,20	0,92	0,984	0,986	0,986	0,986
$\lambda(u^*)$	0,00	0,01	0,76	0,41	0,12	0,11	0,11	0,11

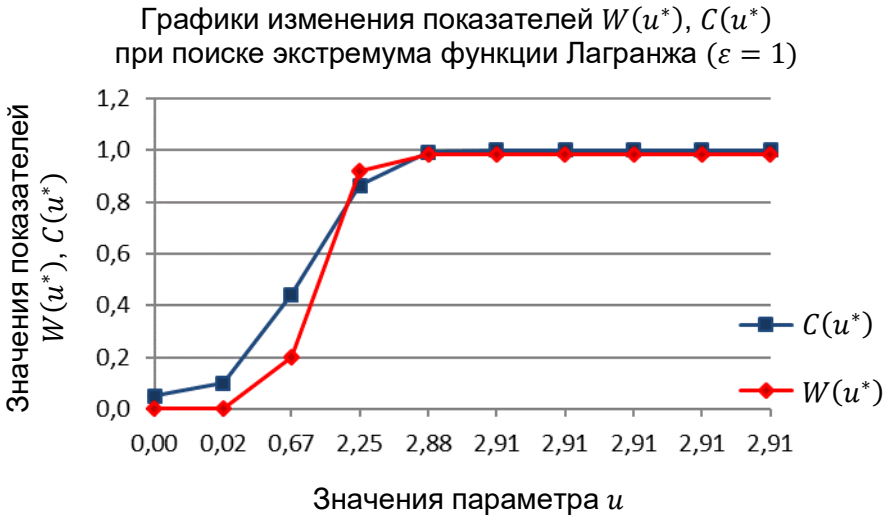

Рисунок 4 – Графики изменения показателей $W(u_n^*)$, $C(u_n^*)/\hat{C}$
при поиске экстремума функции Лагранжа

Рисунок 5 – Графики изменения параметра управления $u^* = R_П/\sigma$ в процессе поиска точным и приближенным методом

Из приведенных таблицы и рисунков видно, что алгоритмы точно находят экстремум функции эффективности при заданных ограничениях на затраты.

Для вектора параметров $\mathbf{u}$ с m переменными каждый параметр может иметь различный вклад в эффективность изделия $u_i = \partial \mathrm{W}/\partial u_i$, а также различные функции затрат $C(u_i)$. Часто удается общие затраты представить как сумму затрат по отдельным или по группам параметров $\mathrm{C}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{m} C(u_i)$ [3]. В этом случае можно воспользоваться рассмотренной выше методикой. В противном случае, исследователю приходится вначале уменьшить размерность факторных переменных путем их свертки в один или несколько агрегированных показателей качества и выразить через них целевые показатели эффекта и затрат для объекта (процесса) в целом.

Для иллюстрации выше сказанного рассмотрим второй пример, когда параметрами оптимизации показателей эффективности изделия являются отдельно радиус поражения боевой части $u_1 = R_П$ и точность стрельбы $u_2 = \sigma$ как независимые параметры.

Пример 2. Показателем эффекта в этом примере также остается вероятность поражения цели, которую необходимо максимизировать:

$$W(u_1, u_2) = 1 - exp(-u_1^2/2u_2^2) \rightarrow \max_{(u_1, u_2)},$$

а общие затраты представляются как сумма затрат по каждому параметру и подлежат ограничению:

$$\mathrm{C}(u_1, u_2) = c_0 + c_1 u_1^{\propto} + c_2/u_2^{\propto} \leq \hat{\mathrm{C}}.$$

Если из бюджета проекта вычесть постоянную составляющую c_0, то остаток бюджета оптимальным образом можно распределить по параметрам изделия:

$$\mathrm{C}(u_1, u_2) = c_1 u_1^{\propto} + c_2/u_2^{\propto} \leq \hat{\mathrm{C}} - c_0 = \check{\mathrm{C}}.$$

В рассматриваемом примере функция Лагранжа имеет вид:

$$F_L(u_1, u_2;\ \lambda) = W(u_1, u_2) + \lambda\left[\check{\mathrm{C}} - c_1 u_1^{\propto} - c_2/u_2^{\propto}\right] \rightarrow \max_{(u_1, u_2; \lambda)},$$

а уравнения для определения ее стационарной точки $(u_1, u_2; \lambda)$ описываются выражениями (9) для каждой компоненты. Коэффициент Лагранжа $\lambda(u_1, u_2)$ в этой задаче зависит от двух параметров и рассчитывается по соотношению модулей градиентов целевых функций (7). Для обеспечения устойчивости численного алгоритма (10) также вводится корректирующий коэффициент $\varepsilon > 0$, который подбирается в процессе его реализации на тестовом примере. Расчетные формулы для параметров $(u_1, u_2; \lambda)$ имеют вид:

$$u_{1n} = u_{1n-1} + \varepsilon\lambda(\boldsymbol{u}_{n-1})/u_{1\,n-1} \cdot \left[\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\boldsymbol{u}_{n-1})\right]/[1 - W(\boldsymbol{u}_{n-1})];$$
$$u_{2n} = u_{n-1} + \varepsilon\lambda(\boldsymbol{u}_{n-1})/u_{2\,n-1} \cdot \left[\hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(\boldsymbol{u}_{n-1})\right]/[1 - W(\boldsymbol{u}_{n-1})];$$

$$\lambda_n = \frac{|\mathrm{grad}\ \mathrm{W}(\mathbf{u}_n)|}{|\mathrm{grad}\ \mathrm{C}(\mathbf{u}_n)|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial u_2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u_2}\right)^2}};\ (n = 1,2,\dots). \qquad (12)$$

В таблице 3 и на рисунках 6, 7 приведены данные расчета параметров изделия $u_1 = R$, $u_2 = \sigma$ и графики изменения показателей эффекта и затрат $W(u_1, u_2)$, $\mathrm{C}(u_1, u_2)$ в процессе поиска оптимального значения параметров для исходных данных $\mathrm{c}_0 = 0{,}1$; $\mathrm{c}_1 = 1{,}0$; $\mathrm{c}_2 = 0{,}2$; $\propto = 0{,}8$.

Из графиков видно, что функции эффекта и затрат имеют общую точку пересечения $u^* = u_1^*/u_2^* = R^*/\sigma^*$, отмеченную стрелкой. Эта точка является оптимальным решением второго примера.

Таблица 3 – Данные расчета параметров изделия

Название параметра	Номер шага поиска									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\mathrm{C}}$	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
$u_1 = R$	0,1	0,12	0,19	0,30	0,46	0,65	0,86	1,10	1,36	1,63
$u_2 = \sigma$	3,00	2,95	2,74	2,42	2,05	1,66	1,30	0,99	0,73	0,54
$u = R/\sigma$	0,03	0,04	0,07	0,13	0,22	0,39	0,66	1,11	1,85	3,03
$W(u_1, u_2)$	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,07	0,20	0,46	0,82	0,99
$\lvert\mathrm{grad}\ \mathrm{W}(u_1, u_2)\rvert$	0,01	0,01	0,03	0,06	0,12	0,25	0,51	0,86	0,77	0,12
$\mathrm{C}(u_1, u_2)$	0,34	0,36	0,45	0,58	0,75	0,94	1,15	1,38	1,64	1,91
$\mathrm{C}(u_1, u_2)/\hat{\mathrm{C}}$	0,17	0,18	0,23	0,29	0,37	0,47	0,57	0,69	0,82	0,95
$\lvert\mathrm{grad}\ \mathrm{C}(u_1, u_2)\rvert$	1,27	1,23	1,12	1,02	0,94	0,88	0,83	0,80	0,80	0,88
$\lambda(u_1, u_2)$	0,01	0,01	0,02	0,05	0,13	0,29	0,62	1,07	0,96	0,14
$\Delta\mathrm{C} = \hat{\mathrm{C}} - \mathrm{C}(U)$	1,66	1,64	1,55	1,42	1,25	1,06	0,85	0,62	0,36	0,09

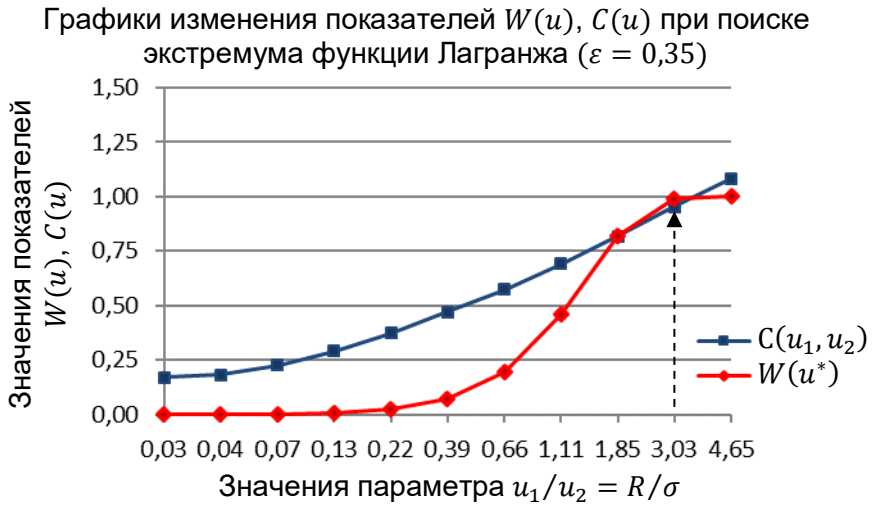

Рисунок 6 – Графики изменения целевых показателей $W(u_1, u_2)$, $\mathrm{C}(u_1, u_2)$ в процессе поиска экстремума функции Лагранжа

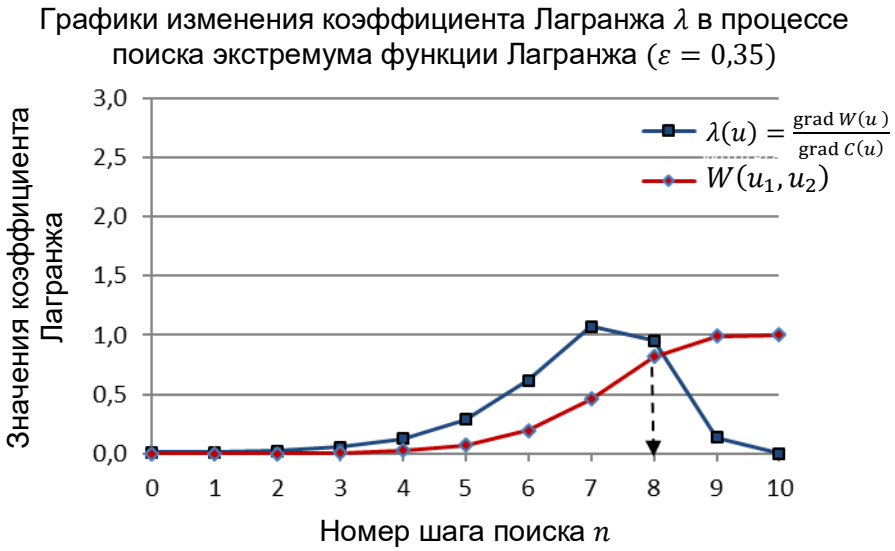

Рисунок 7 – График изменения коэффициента Лагранжа в процессе поиска экстремума

Таблица 4 – Данные расчета оптимальных параметров изделия

Название параметра	Номер шага поиска						
	0	1	2	3	4	5	6
$u_1 = R$	1	1,09	1,23	1,44	1,83	2,77	3,30
$u_2 = \sigma$	5,00	4,54	3,98	3,30	2,39	1,16	0,94
$u = R/\sigma$	0,20	0,24	0,31	0,44	0,77	2,38	3,51
$W(u_1, u_2)$	0,020	0,029	0,046	0,091	0,255	0,941	0,998
$C(u_1, u_2)$	0,50	0,53	0,57	0,64	0,76	1,09	1,25
$\lambda_1(u^*)$	0,16	0,22	0,32	0,54	1,12	0,61	0,04

Сравнивая данные таблиц 2-4 можно увидеть, некоторое несовпадение оптимальных значений параметров оптимизации для первого и второго примеров. Это связано с тем, что в первом примере параметром оптимизации выступает один агрегированный параметр $u = R/\sigma$, а во втором – параметры $u_1 = R$; $u_2 = \sigma$ как независимые по отдельности. Однако значения агрегированного параметра $u^* = R_{\Pi}/\sigma$ достаточно близки друг к другу и находятся в диапазоне $u^* = 2{,}4 \ldots 2{,}5$. Данный факт свидетельствует о верности предлагаемой методики оптимизации с использованием метода Лагранжа.

Проверка рассмотренных выше алгоритмов на задачах с несколькими переменными показали их высокую эффективность при простоте компьютерной реализации.

Рассмотренный подход к оптимизации целевых требований в задачах программно-целевого планирования проверен на многих примерах и показал хорошие результаты при практическом его применении [2; 6]. Для успешного применения данной методики от исследователя требуется определенный навык и культура работы с численными алгоритмами математического программирования.

Список источников

1. Методология программно-целевого планирования развития системы вооружения на современном этапе: монография / Под ред. В.М. Буренка. М.: Граница, 2013. 520 с.
2. Методы военно-научных исследований систем вооружения: военно-научный труд / Под общ. ред. В.М. Буренка. М.: Граница, 2017. 512 с.
3. Буренок В.М., Лавринов Г.А., Подольский А.Г. Оценка стоимостных показателей высокотехнологичной продукции. М.: Граница, 2012. 423 с.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975. 272 с.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
6. Методы оценки эффективности вооружения и военной техники / Под ред. В.М. Буренка. Изд. 2-е доп. М.: Граница, 2022. 264 с.

Информация об авторе

А.И. Буравлев – доктор технических наук, профессор.