Мясников А.С.

Ординальный метод оценки мероприятий государственного оборонного заказа по продлению назначенных сроков службы авиационных средств поражения

Предложен методический подход для сравнительной оценки мероприятий государственного оборонного заказа по продлению назначенных сроков службы авиационных средств поражения, основанный на теории бинарных отношений, позволяющий решать задачу оптимизации содержания государственного оборонного заказа при недостаточном финансировании в целях максимального сохранения запасов авиационных средств поражения.

Введение. Продление назначенных сроков службы (НСС) авиационных средств поражения (АСП) позволяет при отсутствии фактического производства АСП сохранить накопленные в советское время запасы АСП в Военно-воздушных Силах (ВВС). Продление НСС АСП – это исследования состояния АСП в пределах требуемых значений НСС. Работы по продлению НСС изделий военного назначения согласно ГОСТу проводятся на возмездной основе предприятиями промышленности при соответствующем заказе органов военного управления (ОВУ). Особенностью продления НСС АСП является то, что данные работы проводятся, как правило, в пределах одного бюджетного периода (1-3 года), и НСС устанавливаются для всех образцов АСП конкретного типа, а не для отдельного изделия, партии и т.п.

При планировании государственного оборонного заказа (ГОЗ) часто приходится решать задачу распределения выделенного финансирования на военные нужды [13]. Такие задачи относятся к прямым задачам военно-экономического анализа [1; 8]. В настоящей работе рассматривается задача оптимизации плана продления НСС АСП в условиях недостаточного финансирования.

Содержание мероприятий ГОЗ по продлению НСС АСП определяется перечнем работ по продлению НСС АСП – перечнем типов АСП, которым необходимо провести работы по продлению НСС, и требуемыми значениями НСС. Требуемые НСС АСП определяются в ходе проведения специализированных исследований и в данной работе принимаются в качестве исходных данных. Поэтому под планом продления НСС АСП понимается только перечень типов АСП для продления им НСС до требуемых значений.

Задача оптимизации плана продления НСС АСП является многокритериальной (необходимо учитывать различные аспекты: военный, экономический, технический, технологический, экологический и др.) и ресурсоемкой (необходимо рассматривать большое количество АСП, стоящих на вооружении ВВС). При этом авторитетных показателей качества планов продление НСС АСП в настоящее время не разработано, что при программно-целевом планировании недопустимо [3]. Поэтому отсутствует принципиальная возможность поиска оптимального плана продления НСС АСП. В связи с этим возникает необходимость разработать метод оценки мероприятий ГОЗ по продлению НСС АСП.

1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть на вооружении ВВС состоит n типов АСП. Известно:

- количество $N=\left\{N_i\right\}_{i=1}^{n}$ исправных АСП в запасах ВВС, где N_i – количество исправных АСП i-го типа;
- требуемое на мирное и военное время количество АСП $N^{mp}=\left\{N_i^{mp}\right\}_{i=1}^{n}$, где N_i^{mp} – количество требуемых АСП i-го типа;
- НСС АСП $T=\left\{T_i\right\}_{i=1}^{n}$, где T_i – НСС i-го типа АСП;
- требуемые значения НСС АСП $T^{mp}=\left\{T_i^{mp}\right\}_{i=1}^{n}$, где T_i^{mp} – требуемый НСС АСП i-го типа;
- цены работ по продлению НСС АСП $C=\left\{C_i\right\}_{i=1}^{n}$ до T^{mp}, где C_i – стоимость

ВООРУЖЕНИЕ И ЭКОНОМИКА №1(9) 2010 г.

работ по продлению НСС АСП i-го типа до T_i^{mp};

- прогнозируемое количество АСП $\Delta N = \{\Delta N_i\}_{i=1}^n$, которые будут вновь допущены в эксплуатацию при продлении им НСС до T^{mp}, где ΔN_i - количество АСП i-го типа, вновь вводимые в эксплуатацию при продлении НСС до T_i^{mp};
- предельное финансирование работ по продлению НСС АСП $\hat{\Phi}$.

Пусть X – множество планов продления НСС АСП (сочетаний из типов АСП), заданное в дискретном метрическом конечномерном пространстве [11]. $x \in X$ – план продления НСС АСП, задаваемый вектором $x = \{\psi_i^x\}_{i=1}^n$ операторов ψ_i^x выбора типов АСП для продления им НСС:

$$\psi_i^x = \begin{cases} 1, & АСП\ i - го\ типа\ выбрано \\ 0, & АСП\ i - го\ типа\ не\ выбрано \end{cases} \quad (1)$$

Требуется разработать методику M выбора типов АСП для продления им НСС при недостаточном финансировании $\hat{\Phi}$ с целью максимального сохранения запасов АСП для обеспечения заданного уровня боевой готовности:

$$M(X) = \left\{ y \in X \mid \forall x \in X : x\overline{\Re}y \right\}, \quad (2)$$

где $x\Re y$ – бинарное отношение предпочтения одного плана x продления НСС АСП другому y;

$x\overline{\Re}y = \neg(x\Re y)$ – дополнение к отношению $x\Re y$ [15].

Методика $M(X)$ в математической теории принятия решений называется функцией выбора, а набор исходных данных $(N, N^{mp}, T, T^{mp}, C, \hat{\Phi})$ называется **предъявлением** или **ситуацией** [15]. Операция поиска множества $\left\{ y \in X \mid \forall x \in X : x\overline{\Re}y \right\}$ максимальных по $x\Re y$ планов продления НСС АСП называется **оптимизацией по блокировке** или **выбором неулучшаемых по $x\Re y$ элементов X** [15]. Следует отметить, что если планирование продления НСС АСП выполняется в рамках уже запланированной государственной программы вооружения (ГПВ), то в задаче типа (2) следует учитывать только те типы АСП, которые ранее были запланированы в ГПВ для продления им НСС.

Задача оптимизации плана продления НСС АСП относится к задачам дискретного (булева) программирования (комбинаторной оптимизации) [10], является прикладной интерпретацией известной задачи о «рюкзаке» с возможностью единичного выбора предметов [16]: для заданного множества предметов, каждый из которых характеризуется затратами и ценностью, выбрать предметы так, чтобы максимизировать общую ценность при ограничении на суммарные издержки.

2 Обоснование бинарного отношения предпочтения одного плана продления НСС АСП другому

Для выбора оптимального плана продления НСС АСП необходима некоторая мера качества мероприятий ГОЗ по продлению НСС АСП. В теории принятия решений рассматриваются два подхода к измерению качества [15] – *кардинальный* (количественный) и *ординальный* (порядковый). Классический кардинальный подход обязывает сопоставить каждому решению некоторую количественную оценку – значение некоторой функции (показателя качества решения). Однако найти такую функцию, учитывающую все аспекты проблемы выбора, на практике оказывается не всегда возможно. Так, на выбор плана продления НСС АСП влияет совокупность факторов: состояние запасов АСП, выделенное финансирование, экономическая эффективность продления НСС АСП, боевая эффективность АСП в пределах НСС и др. Учесть все факторы (или хотя бы часть из них) в обобщенном показателе качества плана продления НСС АСП достаточно сложно и необъективно, т. к. требует принятия ряда серьезных и спорных допущений.

Ординальный подход не требует количественной оценки каждого решения. Он заключается в сравнении двух решений и выборе из них наиболее предпочтительного. Формализм ординального подхода основан на теории бинарных отношений. Применительно к задаче выбора плана продления НСС АСП реализация порядкового подхода не требует принятия спорных допущений и позволяет учесть большую часть факторов, влияющих на выбор плана продления НСС АСП.

Существует несколько способов задания бинарных отношений [15]. В данной работе бинарные отношения задаются булевыми операциями над упорядоченной парой элементов, как правило, x и y.

Сформулируем математически определение бинарного отношения предпочтения одного плана продления НСС АСП другому с учетом того, что:

- ➢ предельное финансирование является жестким ограничением при решении задачи оптимизации плана продления НСС АСП;
- ➢ необходимо обеспечить максимальную готовность ВВС к ведению боевых действий (в части, касающейся обеспеченности ВВС АСП) в любой момент времени;
- ➢ важнее те типы АСП, эффективность применения которых максимальна;
- ➢ бинарное отношение должно быть способно принять в качестве аргументов любые планы x и y.

Определение 1. **Бинарное отношение $x\Re y$ предпочтения одного плана продления НСС АСП другому** – такое отношение между двумя планами продления НСС АСП x и y, которое выполняется только в том случае, если первый план продления НСС АСП x предпочтительней второго y:

$$x\Re y \Leftrightarrow x\Re_{\Phi} y \vee (x\overline{\Re}_{\Phi} y \wedge y\overline{\Re}_{\Phi} x \wedge \wedge(x\Re_{O} y \vee (x\overline{\Re}_{O} y \wedge y\overline{\Re}_{O} x \wedge x\Re_{Э} y))), \quad (3)$$

где $x\Re_{\Phi} y$ – отношение предпочтения плана x над y по критерию непревышения выделенного финансирования;

$x\Re_{O} y$ – отношение предпочтения плана x над y по критерию минимальной обеспеченности ВВС АСП;

$x\Re_{Э} y$ – отношение предпочтения плана x над y по критерию экономической эффективности продления НСС АСП.

Определение 2. **Бинарным отношением $x\Re_{\Phi} y$ предпочтения плана x над y по критерию непревышения выделенного финансирования** называется такое бинарное отношение, которое выполняется только в том случае, если в плане y превышено предельное финансирование, а в плане x не превышено:

$$x\Re_{\Phi} y \Leftrightarrow \Phi(x) \le \hat{\Phi} \wedge \Phi(y) > \hat{\Phi}, \quad (4)$$

где $\Phi(x)$ – суммарная стоимость работ по продлению НСС АСП, выбранным в плане x продления НСС АСП.

Определение 3. **Бинарное отношение $x\Re_{O} y$ предпочтения плана x над y по критерию минимальной обеспеченности ВВС АСП** – такое бинарное отношение, которое выполняется только в том случае, если минимальная обеспеченность ВВС АСП при выполнении плана x продления НСС АСП больше аналогичного показателя для плана y:

$$x\Re_{O} y \Leftrightarrow \min_{i\in I(x,y)}\left(\frac{N_i+\psi_i^x \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) > \min_{i\in I(x,y)}\left(\frac{N_i+\psi_i^y \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right), \quad (5)$$

где $I(x,y)$ – некоторое множество индексов типов АСП, зависящее от планов x и y продления НСС АСП.

Определение 4. **Бинарное отношение $x\Re_{Э} y$ предпочтения плана x над y по критерию экономической эффективности продления НСС АСП** – такое бинарное отношение, которое выполняется только в том случае, если суммарный экономический эффект от продления НСС АСП в плане x, приходящийся на единицу стоимости работ по продлению НСС АСП, больше аналогичного показателя для плана y:

$$x\Re_Э y \Leftrightarrow \frac{Э(x)}{\Phi(x)} > \frac{Э(y)}{\Phi(y)}, \qquad (6)$$

где $Э(x)$ – суммарный экономический эффект от продления НСС АСП, выбранным в плане x продления НСС АСП.

Определение 5. **Суммарной стоимостью $\Phi(x)$ работ по продлению НСС АСП, выбранным в плане x**, называется отображение множества X планов продления НСС АСП на множество неотрицательных вещественных чисел:

$$\Phi : X \to \{r \in R \mid r \geq 0\}, \qquad (7)$$

которое показывает суммарные затраты на продление НСС АСП, выбранным в плане x продления НСС АСП, и рассчитывается по формуле:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i \cdot \psi_i^x\right). \qquad (8)$$

Определение 6. **Множеством $I(x,y)$** называется множество индексов типов АСП, для которых в планах x и y отличается значение оператора выбора типа АСП $\left(\psi_i^x \neq \psi_i^y\right)$ и продление НСС данного типа АСП позволит увеличить количество исправных АСП $(\Delta N_i > 0)$:

$$I(x,y) = \left\{i \in \{1,\dots,n\} \mid \psi_i^x \neq \psi_i^y \wedge \Delta N_i > 0\right\}. \qquad (9)$$

Определение 7. **Суммарным экономическим эффектом $Э(x)$ от продления НСС АСП, выбранным в плане x**, называется отображение множества X планов продления НСС АСП на множество неотрицательных вещественных чисел:

$$Э : X \to \{r \in R \mid r \geq 0\}, \qquad (10)$$

которое показывает величину сэкономленных государством средств за счет продления НСС АСП и рассчитывается по специальным методикам, например [2; 4; 5].

В отношении $x\Re y$ учтены несколько критериев (правил принятия решений) (рисунок 1):

1) по соотношению суммарной стоимости продления НСС АСП и выделенного финансирования. Данный критерий является ограничением, накладываемым на решения. В то же время, если для заданного предъявления $\left(N, N^{тр}, T, T^{тр}, Ц, C, \hat{\Phi}\right)$ не найдется ни одного плана ГОЗ, удовлетворяющего требованию по предельному финансированию, то будут найдены те планы, которые оптимальны в отношении остальных критериев;

2) по минимальной прогнозируемой обеспеченности ВВС АСП при продлении НСС АСП до заданных значений. Данное правило реализует метод пороговых критериев [9];

3) по экономической эффективности. Данный критерий учитывает как требуемое количество АСП конкретного типа (модификации), так и имеющееся в наличии на складах ВВС. Учитывает количество АСП, которые в результате продления им НСС будут пригодны для эксплуатации. Критерий учитывает стоимость АСП, которая в некотором смысле пропорциональна военному эффекту от применения АСП. Тем самым критерий экономической эффективности устанавливает предпочтение тому плану ГОЗ, при реализации которого государство больше экономит финансовых средств, приходящихся на один рубль, вложенный в работы по продлению НСС АСП.

В условиях отсутствия какой-либо дополнительной информации о мере полезности для ВВС того или иного типа АСП в том или ином количестве использование метода пороговых критериев вполне оправдано. Использование данного подхода означает, что в условиях недостаточных средств лучше понизить количество исправных АСП всех типов (модификаций) пропорционально требуемым количествам образцов, чем поддерживать потребную исправность одного типа АСП в ущерб остальным типам. Такой подход предполагает, что решение поставленных перед ВВС задач каким-либо одним приоритетным типом АСП невозможно без соответствующей поддержки другими менее приоритетными типами АСП. И лучше иметь возможность пусть плохо, но все-таки выполнить задачу, чем вообще не иметь возможности выполнять такую задачу. Наиболее ярко такой подход иллюстрируется следующим примером: при наличии исправных АСП для поражения наземных целей, но при отсутствии исправных патронов для постановки помех и управляемых ракет класса «воздух-воздух» выполнение задачи поражения наземной цели даже не начнется, т.к. при отсутствии защиты самолет не сможет преодолеть зону действия средств ПВО противника.

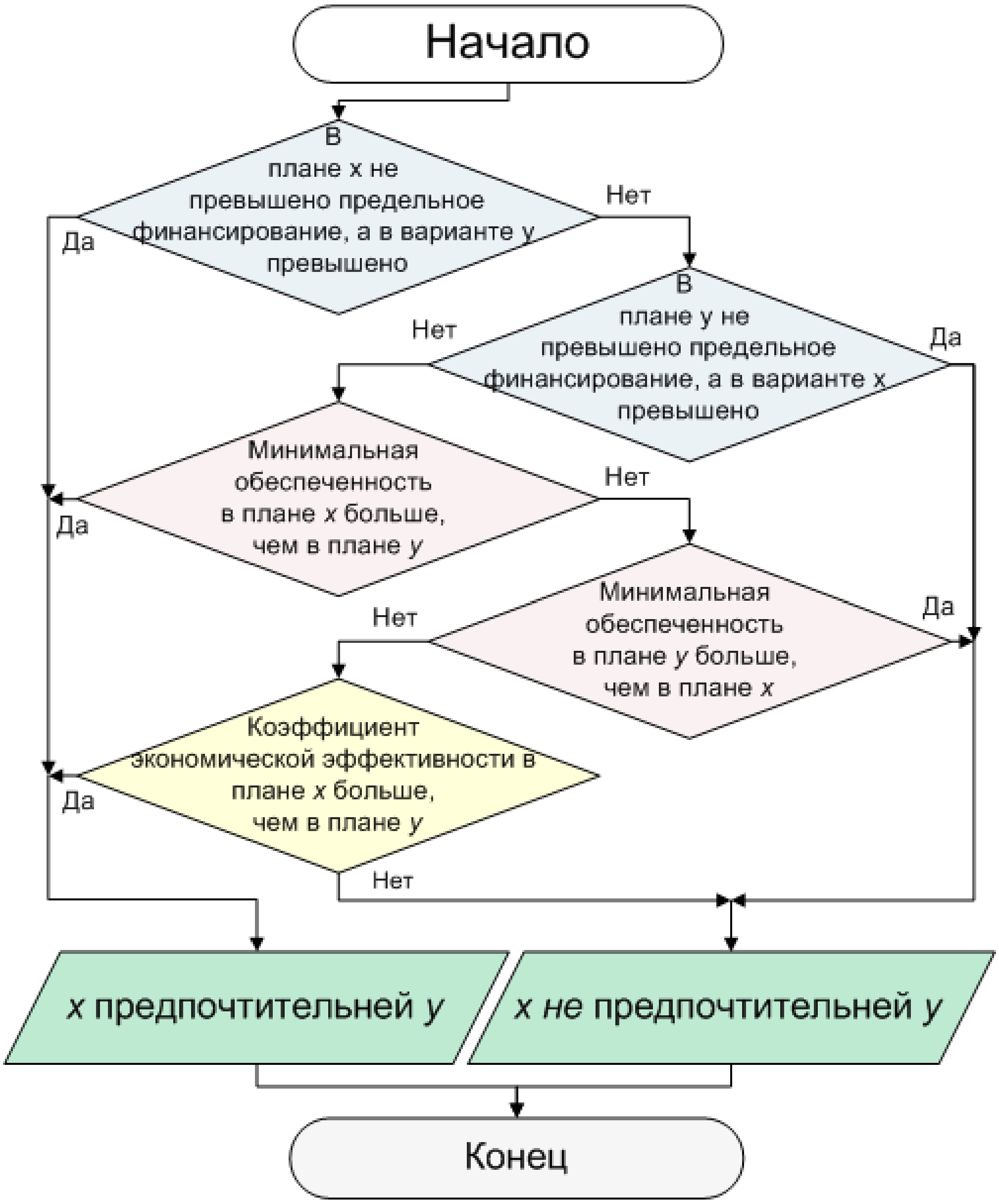

Рисунок 1 – Алгоритм сравнения двух планов продления НСС АСП

Численно проиллюстрировать метод пороговых критериев можно на следующем примере. Пусть для выполнения задач по гарантированному поражению наземных целей в военной операции определенного масштаба группой из 10 штурмовиков необходимо иметь 20 управляемых ракет класса «воздух-поверхность» типа А, а для выполнения задач гарантированного преодоления зон ПВО противника необходимо иметь 20 управляемых ракет класса «воздух-воздух» типа Б. В исправном состоянии имеется 5 ракет типа А и 4 ракеты типа Б. При проведении работ по продлению НСС ракет типа А и Б будут вновь введены в эксплуатацию, соответственно, еще 20 и 6 ракет, но объемы финансирования позволяют провести работы только ракетам типа А или только ракетам типа Б. Какой вариант предпочтительней?

Переведем абсолютные количества управляемых ракет в относительные величины (относительно потребного количества). Так, до проведения работ по продлению НСС ракет исправность ракет типа А составляла 0,25 (20 ракет – 100%, 5 ракет – 25%), а ракет типа Б – 0,2 (20 ракет – 100%, 4 ракеты – 20 %). Если провести работы по продлению НСС ракетам типа А, то исправность по ним достигнет 1,25 (20 ракет – 100%, 5+20=25 ракет – 125%), а по ракетам типа Б останется неизменной. При альтернативном варианте распределения средств исправность ракет типа А останется равной 0,25, а по ракетам типа Б возрастет до 0,5 (20 ракет – 100%, 4+6=10 ракет – 50 %).

С позиции метода пороговых критериев второй вариант финансирования ремонта является более предпочтительным, т.к. «подтягивает» более отстающую компоненту текущего состава АСП к потребному значению, и исправность «недотягивает» до потребных значений по всем типам техники в «более» равных пропорциях.

Из этих рассуждений вытекает формальный критерий качества распределения финансирования работ по продлению НСС АСП: из всех вариантов финансирования лучшим является тот, при котором минимальная исправность (из всех типов АСП) будет максимально возможной.

Рассмотрим, как было бы распределено финансирование при использовании экономического критерия. Пусть стоимость одной ракеты типа А вдвое больше стоимости одной ракеты типа Б, а стоимость работ по продлению НСС ракет типа А превосходит стоимость работ по продлению НСС ракет типа Б всего на 20%. Тогда коэффициент экономической эффективности работ по продлению НСС ракет типа А составит 16,(6) условных единиц (отношение 20 единиц стоимости ракет типа А к 1,2 единицы стоимости работ по продлению НСС ракет типа Б), а у ракет типа Б составит 12 условных единиц (отношение 6·2=12 единиц стоимости ракет типа А к единице стоимости работ по продлению НСС ракет типа Б). С позиций экономической эффективности выгоднее провести работы по продлению НСС ракет типа А, т.к. в этом случае достигается большее значение коэффициента экономической эффективности.

Рассмотрим другой способ оценки экономической эффективности работ по продлению НСС АСП. Для решения поставленной задачи требуется всего 20 ракет типа А. Однако в случае продления НСС ракет типа А в эксплуатации будет 25 ракет. Коэффициент экономической эффективности позволяет сравнить стоимость закупки новых АСП в недостающем количестве и стоимость работ по продлению НСС этому типу АСП. В случае закупок новых АСП в рассматриваемом примере лицо, принимающее решение, будет покупать не 20 ракет, а только недостающие до потребного количества 15 ракет типа А. В этом случае коэффициент экономической эффективности работ по продлению НСС составит:

- для ракет типа А – 12,5 условных единиц (15 ракет типа А к 1,2 стоимости работ по продлению НСС ракет типа Б),
- для ракет типа Б останутся прежние 12 условных единиц.

Для ракет типа А коэффициент экономической эффективности оказался больше. Поэтому провести работы по продлению НСС предпочтительней ракетам типа А, нежели ракетам типа Б.

И первым и вторым способом оценки экономической эффективности в рассматриваемом примере предпочтительней оказался первый вариант распределения средств. В то же время согласно методу пороговых критериев оказался более предпочтительным второй вариант. Экономический критерий устанавливает предпочтение тому варианту, реализация которого позволяет сэкономить больше государственных средств. В то же время метод пороговых критериев требует выбирать тот вариант, при котором минимальная исправность (из всех типов АСП) будет максимально возможной. В этом заключается основное отличие двух известных подходов для принятия решений при планировании ГОЗ.

Метод пороговых критериев имеет один существенный недостаток: если в планах продления НСС АСП x и y наблюдается равная минимальная обеспеченность, например, нулевая, то подход становится нечувствительным к такой ситуации. С этой целью в бинарном отношении $x\Re_O y$ минимальная обеспеченность рассчитывается только среди тех типов АСП $\left(i \in I(x,y)\right)$, для которых состояние обеспеченности будет отличаться при продлении НСС АСП. Это позволяет найти такой план ГОЗ, выполнив который будет создана основа для наиболее быстрого последующего удовлетворения потребностей ВВС в АСП. Тем самым будет соблюдено требование постоянной боевой готовности как на планируемый период выполнения ГОЗ, так и на последующие.

Выдвинутые выше требования к отношению $x\Re y$ соблюдаются, что легко поддается проверке. В то же время отношение $x\Re y$ имеет один очевидный недостаток – субъективность выбранных критериев и очередность проверки их выполнения. Однако, несмотря на это на существующем этапе понимания проблемы данное бинарное отношение учитывает большую часть факторов, влияющих на содержание плана продления НСС АСП. Впервые удалось связать, казалось бы, несвязные показатели качества плана продления НСС АСП: обеспеченность ВВС АСП и экономическую эффективность продления НСС АСП. Также удалось связать частные показатели обеспеченности ВВС АСП, предназначенных для выполнения различных (боевых и специальных) задач в единый показатель с помощью метода пороговых критериев. При этом ограничение на суммарный объем финансирования работ по продлению НСС АСП также учитывается.

3 Проверка существования решения задачи оптимизации с использованием бинарного отношения предпочтения одного плана продления НСС АСП другому

Для успешного решения задачи оптимизации плана продления НСС АСП необходимо знать: возможно ли упорядочить планы продления НСС АСП с помощью бинарного отношения $x\Re y$? Существует всего несколько типов бинарных отношений, с помощью которых можно решать задачу оптимизации по блокировке, например, с помощью отношения слабого, строгого или качественного порядка и др. Какого же типа отношение $x\Re y$? Для ответа на данный вопрос необходимо вспомнить несколько определений и доказать несколько утверждений.

Итак, напомним определения.

Определение 8. **Отношением слабого порядка** называется *асимметричное негатранзитивное* бинарное отношение [15].

Определение 9. **Асимметричность** – такое свойство бинарного отношения, для которого справедливо выражение

$$\forall x,y \in X\left(xPy \Rightarrow y\overline{P}x\right). \qquad (11)$$

Определение 10. **Негатранзитивность** – такое свойство бинарного отношения, для которого справедливо выражение

$$\forall x,y,z \in X\left(x\overline{P}y \wedge y\overline{P}z \Rightarrow x\overline{P}z\right). \qquad (12)$$

Определение 11. **Слабая полнота** – такое свойство бинарного отношения, для которого справедливо выражение

$$\forall x,y \in X, x \neq y\left(xPy \vee yPx\right). \qquad (13)$$

Введем для упрощения также несколько новых определений.

Определение 12. **Бинарное отношение** $x\Re_1 y$ – такое бинарное отношение, которое выполняется только тогда, когда нет предпочтения x над y и y над x по критерию непревышения предельного финансирования и есть предпочтение по критерию минимальной обеспеченности $x\Re_O y$:

$$x\Re_1 y \Leftrightarrow x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge x\Re_O y. \qquad (14)$$

Определение 13. **Бинарное отношение** $x\Re_2 y$ – такое бинарное отношение, которое выполняется только тогда, когда нет предпочтения x над y и y над x ни по критерию непревышения предельного финансирования, ни по критерию минимальной обеспеченности ВВС АСП и есть предпочтение по критерию экономической эффективности $x\Re_O y$:

$$x\Re_2 y \Leftrightarrow x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge \wedge x\overline{\Re}_O y \wedge y\overline{\Re}_O x \wedge x\Re_Э y. \qquad (15)$$

Примем несколько утверждений без подробного доказательства. Эти утверждения позволят доказать принадлежность бинарного отношения $x\Re y$ одному из известных типов бинарных отношений.

Утверждение 1. **Бинарные отношения $x\Re_O y$ и $x\Re_Э y$ являются антирефлексивными, асимметричными, транзитивными, негатранзитивными и ацикличными бинарными отношениями.**

Это утверждение справедливо, т.к. в основе бинарных отношений $x\Re_O y$ и $x\Re_Э y$ лежит типичное отношение слабого порядка (математический символ «<»). Отношения слабого порядка обладают свойствами асимметричности и негатранзитивности по определению и свойствами антирефлексивности, транзитивности и ацикличности, «вытекающими» из свойств асимметричности и негатранзитивности [15].

Утверждение 2. **Бинарное отношение $x\Re y$ эквивалентно следующему выражению:**

$$x\Re y \Leftrightarrow x\Re_Ф y \vee x\Re_1 y \vee x\Re_2 y. \quad (16)$$

Это утверждение несложно доказать, если заменить бинарные отношения $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$ на их математические выражения (определения 12 и 13).

Утверждение 3. **Выполнение бинарного отношения $x\Re_Ф y$ влечет выполнение бинарного отношения $\varPhi(x) < \varPhi(y)$:**

$$x\Re_Ф y \Rightarrow \varPhi(x) < \varPhi(y). \quad (17)$$

Данное утверждение также несложно доказывается. Расположим значения $\varPhi(x)$, $\hat{\varPhi}$ и $\varPhi(y)$ на одной оси вещественных чисел (при условии, что $x\Re_Ф y$ выполняется). Эти значения будут следовать друг за другом так, что $\varPhi(x) \le \hat{\varPhi} < \varPhi(y)$, что влечет в свою очередь выполнение $\varPhi(x) < \varPhi(y)$:

$$\begin{gathered} x\Re_Ф y \Leftrightarrow \varPhi(x) \le \hat{\varPhi} \wedge \varPhi(y) > \hat{\varPhi} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varPhi(x) \le \hat{\varPhi} < \varPhi(y) \Rightarrow \varPhi(x) < \varPhi(y). \end{gathered} \quad (18)$$

Утверждение 4. **Бинарные отношения $x\Re_Ф y$, $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$ являются асимметричными бинарными отношениями:**

$$\begin{gathered} x\Re_Ф y \Rightarrow y\overline{\Re}_Ф x, \\ x\Re_1 y \Rightarrow y\overline{\Re}_2 x, \\ x\Re_2 y \Rightarrow y\overline{\Re}_2 x. \end{gathered} \quad (19)$$

С учетом утверждения 3 отношение $x\Re_Ф y$ может быть заменено на отношение слабого порядка (математический символ «<»), обладающее в свою очередь свойством асимметричности:

$$\begin{gathered} x\Re_Ф y \Rightarrow \varPhi(x) < \varPhi(y) \Rightarrow \neg(\varPhi(y) < \\ < \varPhi(x)) \Leftrightarrow \neg\left(y\Re_Ф x\right) \Leftrightarrow y\overline{\Re}_Ф x. \end{gathered} \quad (20)$$

Для доказательства асимметричности отношений $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$ следует вспомнить известное правило [15]: если бинарное отношение $xP_1 y$ асимметричное, то пересечение отношений $xP_1 y \wedge xP_2 y$ асимметрично при любом $xP_2 y$. В отношении $x\Re_1 y$ используется пересечение асимметричного отношения $x\Re_O y$ (утверждение 1) с другими бинарными отношениями, из чего следует свойство асимметричности отношения $x\Re_1 y$. В отношении $x\Re_2 y$ используется пересечение асимметричного отношения $x\Re_Э y$ (утверждение 1) с другими отношениями, что обуславливает асимметричность отношения $x\Re_2 y$. Поэтому утверждение 4 справедливо.

Утверждение 5. **Выполнение каждого из бинарных отношений $x\Re_Ф y$, $x\Re_1 y$, $x\Re_2 y$, $y\Re_Ф x$, $y\Re_1 x$ и $y\Re_2 x$ влечет невыполнение остальных:**

$$\begin{aligned}
&x\Re_\Phi y \Rightarrow x\overline{\Re}_1 y \wedge x\overline{\Re}_2 y \wedge \\
&\wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge y\overline{\Re}_1 x \wedge y\overline{\Re}_2 x, \\
&x\Re_1 y \Rightarrow x\overline{\Re}_\Phi y \wedge x\overline{\Re}_2 y \wedge \\
&\wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge y\overline{\Re}_1 x \wedge y\overline{\Re}_2 x, \\
&x\Re_2 y \Rightarrow x\overline{\Re}_\Phi y \wedge x\overline{\Re}_1 y \wedge \\
&\wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge y\overline{\Re}_1 x \wedge y\overline{\Re}_2 x.
\end{aligned} \qquad (21)$$

Из определений бинарных отношений $x\Re_1 y$ (определение 12) и $x\Re_2 y$ (определение 13) и утверждения 4 видно, что утверждение 5 выполняется для каждого из отношений $x\Re_\Phi y$, $x\Re_1 y$, $x\Re_2 y$, $y\Re_\Phi x$, $y\Re_1 x$ и $y\Re_2 x$.

Определения 1 - 13 и утверждения 1 - 5 позволяют перейти к идентификации бинарного отношения $x\Re y$. Для определенности будем придерживаться гипотезы о том, что отношение $x\Re y$ является отношением слабого порядка. Докажем несколько лемм, которые позволят доказать выдвинутую гипотезу.

Лемма 1. **Бинарное отношение $x\Re y$ обладает свойством асимметричности $x\Re y \Rightarrow y\overline{\Re} x$.**

Доказательство.

Известно правило [15]: объединение асимметричных отношений $xP_1 y \vee xP_2 y$ асимметрично тогда и только тогда, когда $xP_1 y \wedge yP_2 x \Rightarrow false$. С учетом утверждения 2 отношение $x\Re y$ можно представить в виде объединения отношений $x\Re_\Phi y$, $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$.

Объединение $x\Re_\Phi y \vee x\Re_1 y$ асимметрично, т. к. отношения $x\Re_\Phi y$ и $x\Re_1 y$ асимметричны (утверждение 4) и выражение $\left(x\Re_\Phi y \wedge y\Re_1 x\right)$ ложно в соответствии с утверждением 5. Объединение асимметричных отношений $\left(x\Re_\Phi y \vee x\Re_1 y\right)$ и $x\Re_2 y$ также асимметрично, т. к. выражение $\left(\left(x\Re_\Phi y \vee x\Re_1 y\right) \wedge y\Re_2 x\right)$ ложно в соответствии с утверждением 5. Поэтому отношение $x\Re y$ (объединение отношений $x\Re_\Phi y$, $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$) асимметрично, что и требовалось доказать в лемме 1.

Лемма 2. **Бинарное отношение $x\Re y$ обладает свойством негатранзитивности $\forall x, y, z \in X\left(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z \Rightarrow x\overline{\Re} z\right)$.**

Доказательство.

Проверим гипотезу об истинности выражения $\left(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z\right) \wedge x\overline{\Re}$, раскрыв его с учетом утверждения 2:

$$\begin{aligned}
&(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z) \wedge x\overline{\Re} z \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg\left(x\Re_\Phi y \vee x\Re_1 y \vee x\Re_2 y\right) \wedge \\
&\wedge \neg\left(y\Re_\Phi z \vee y\Re_1 z \vee y\Re_2 z\right) \wedge \\
&\wedge \neg\left(x\Re_\Phi z \vee x\Re_1 z \vee x\Re_2 z\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x\overline{\Re}_\Phi y \wedge x\overline{\Re}_1 y \wedge x\overline{\Re}_2 y \wedge \\
&\wedge y\overline{\Re}_\Phi z \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge \\
&\wedge x\overline{\Re}_\Phi z \wedge x\overline{\Re}_1 z \wedge x\overline{\Re}_2 z \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg(x\Re_\Phi y \vee x\Re_1 y \vee x\Re_2 y \vee \\
&\vee y\Re_\Phi z \vee y\Re_1 z \vee y\Re_2 z \vee \\
&\vee x\Re_\Phi z \vee x\Re_1 z \vee x\Re_2 z) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg((x\Re_\Phi y \vee y\Re_\Phi z \vee x\Re_\Phi z) \vee \\
&\vee (x\Re_1 y \vee y\Re_1 z \vee x\Re_1 z) \vee \\
&\vee (x\Re_2 y \vee y\Re_2 z \vee x\Re_2 z)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \neg\left(x\Re_\Phi y \vee y\Re_\Phi z \vee x\Re_\Phi z\right) \wedge \\
&\wedge \neg\left(x\Re_1 y \vee y\Re_1 z \vee x\Re_1 z\right) \wedge \\
&\wedge \neg\left(x\Re_2 y \vee y\Re_2 z \vee x\Re_2 z\right).
\end{aligned} \qquad (22)$$

Выражения

$$\begin{aligned}
&\left(x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi z \wedge x\overline{\Re}_\Phi z\right), \\
&\left(x\overline{\Re}_1 y \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge x\overline{\Re}_1 z\right), \\
&\left(x\overline{\Re}_2 y \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge x\overline{\Re}_2 z\right)
\end{aligned} \qquad (23)$$

истинные, если бинарные отношения $x\Re_\Phi y$, $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$ негатранзитивны.

Отношение $x\Re_\Phi y$ является негатранзитивным, т.к. согласно утверждению 3 это отношение можно преобразовать к отношению слабого порядка (математический символ «<»), которое в свою очередь обладает свойством негатранзитивности:

$$\begin{gathered}\forall x, y, z \in X\,(x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi z \Rightarrow \\ \Rightarrow x\overline{\Re}_\Phi z) \Leftrightarrow (x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi z \wedge x\overline{\Re}_\Phi z)\end{gathered}. \tag{24}$$

Докажем истинность второго выражения $\left(x\overline{\Re}_1 y \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge x\overline{\Re}_1 z\right)$. Для этого раскроем его согласно определению 12 и утверждения 4:

$$\begin{gathered}\left(x\overline{\Re}_1 y \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge x\overline{\Re}_1 z\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \neg\left(x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge x\Re_O y\right) \wedge \\ \wedge\neg\left(y\overline{\Re}_\Phi z \wedge z\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\Re_O z\right) \wedge \\ \wedge\neg\left(x\overline{\Re}_\Phi z \wedge z\overline{\Re}_\Phi x \wedge x\Re_O z\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x\overline{\overline{\Re}}_\Phi y \vee y\overline{\overline{\Re}}_\Phi x \vee x\overline{\Re}_O y\right) \wedge \\ \wedge\left(y\overline{\overline{\Re}}_\Phi z \vee z\overline{\overline{\Re}}_\Phi y \vee y\overline{\Re}_O z\right) \wedge \\ \wedge\left(x\overline{\overline{\Re}}_\Phi z \vee z\overline{\overline{\Re}}_\Phi x \vee x\overline{\Re}_O z\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x\Re_\Phi y \vee y\Re_\Phi x \vee x\overline{\Re}_O y\right) \wedge \\ \wedge\left(y\Re_\Phi z \vee z\Re_\Phi y \vee y\overline{\Re}_O z\right) \wedge \\ \wedge\left(x\Re_\Phi z \vee z\Re_\Phi x \vee x\overline{\Re}_O z\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x\Re_\Phi y \vee x\overline{\Re}_\Phi y \vee x\overline{\Re}_O y\right) \wedge \\ \wedge\left(y\Re_\Phi z \vee y\overline{\Re}_\Phi z \vee y\overline{\Re}_O z\right) \wedge \\ \wedge\left(x\Re_\Phi z \vee x\overline{\Re}_\Phi z \vee x\overline{\Re}_O z\right).\end{gathered} \tag{25}$$

Каждое из выражений в скобках истинное, т.к. содержит одно из условий, истинных в любом случае:

$$\begin{gathered}\left(x\Re_\Phi y \vee x\overline{\Re}_\Phi y\right) \Rightarrow true, \\ \left(y\Re_\Phi z \vee y\overline{\Re}_\Phi z\right) \Rightarrow true, \\ \left(x\Re_\Phi z \vee x\overline{\Re}_\Phi z\right) \Rightarrow true.\end{gathered} \tag{26}$$

Поэтому выражение $(x\overline{\Re}_1 y \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge \wedge x\overline{\Re}_1 z)$ истинное:

$$\begin{gathered}\left(x\overline{\Re}_1 y \wedge y\overline{\Re}_1 z \wedge x\overline{\Re}_1 z\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(true \vee x\overline{\Re}_O y\right) \wedge \left(true \vee y\overline{\Re}_O z\right) \wedge \\ \wedge\left(true \vee x\overline{\Re}_O z\right) \Rightarrow \left(true\right) \wedge \\ \wedge\left(true\right) \wedge \left(true\right) \Rightarrow true.\end{gathered} \tag{27}$$

Таким образом, бинарное отношение $x\Re_1 y$ также негатранзитивное.

Докажем истинность третьего выражения $\left(x\overline{\Re}_2 y \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge x\overline{\Re}_2 z\right)$. Для этого, как и в предыдущем случае, раскроем его согласно определению 13 и утверждения 4:

$$\begin{gathered}(x\overline{\Re}_2 y \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge x\overline{\Re}_2 z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \neg(x\overline{\Re}_\Phi y \wedge y\overline{\Re}_\Phi x \wedge \\ \wedge x\overline{\Re}_O y \wedge y\overline{\Re}_O x \wedge x\Re_Э y) \wedge \\ \wedge\neg(y\overline{\Re}_\Phi z \wedge z\overline{\Re}_\Phi y \wedge x\overline{\Re}_O y \wedge \\ \wedge y\overline{\Re}_O x \wedge x\Re_Э y) \wedge \neg(x\overline{\Re}_\Phi z \wedge \\ \wedge z\overline{\Re}_\Phi x \wedge x\overline{\Re}_O y \wedge y\overline{\Re}_O x \wedge \\ \wedge x\Re_Э y) \Leftrightarrow (x\Re_\Phi y \vee x\overline{\Re}_\Phi y \vee \\ \vee x\Re_O y \vee x\overline{\Re}_\Phi y \vee x\Re_Э y) \wedge \\ \wedge(y\Re_\Phi z \vee y\overline{\Re}_\Phi z \vee x\Re_O y \vee \\ \vee x\overline{\Re}_O y \vee x\Re_Э y) \wedge (x\Re_\Phi z \vee \\ \vee x\overline{\Re}_\Phi z \vee x\Re_O y \vee x\overline{\Re}_O y \vee x\Re_Э y).\end{gathered} \tag{28}$$

Каждое из выражений в скобках истинное, т.к. содержит одно из условий, истинных в любом случае:

$$\begin{gathered}\left(x\Re_\Phi y \vee x\overline{\Re}_\Phi y\right) \Rightarrow true, \\ \left(y\Re_\Phi z \vee y\overline{\Re}_\Phi z\right) \Rightarrow true, \\ \left(x\Re_\Phi z \vee x\overline{\Re}_\Phi z\right) \Rightarrow true, \\ \left(x\Re_O y \vee x\overline{\Re}_\Phi y\right) \Rightarrow true, \\ \left(x\Re_O y \vee x\overline{\Re}_O y\right) \Rightarrow true, \\ \left(x\Re_O y \vee x\overline{\Re}_O y\right) \Rightarrow true.\end{gathered} \tag{29}$$

Поэтому выражение $(x\overline{\Re}_2 y \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge \wedge x\overline{\Re}_2 z)$ также истинное:

$$\begin{aligned}&\left(x\overline{\Re}_2 y \wedge y\overline{\Re}_2 z \wedge x\overline{\Re}_2 z\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(true \vee true \vee x\Re_Э y\right) \wedge \\ &\wedge \left(true \vee true \vee x\Re_Э y\right) \wedge \\ &\wedge \left(true \vee true \vee x\Re_Э y\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow true \wedge true \wedge true \Rightarrow true.\end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, бинарное отношение $x\Re_2 y$ также негатранзитивное.

Запишем выражение $\left(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z\right) \wedge \wedge x\overline{\Re} z$ с учетом того, что отношения $x\Re_Ф y$, $x\Re_1 y$ и $x\Re_2 y$ являются негатранзитивными:

$$\begin{aligned}&\left(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z\right) \wedge x\overline{\Re} z \Rightarrow \\ &\Rightarrow true \wedge true \wedge true \Rightarrow true,\end{aligned} \quad (31)$$

что доказывает гипотезу об истинности выражения $\left(x\overline{\Re} y \wedge y\overline{\Re} z\right) \wedge x\overline{\Re} z$ и, следовательно, о негатранзитивности бинарного отношения $x\Re y$, что и требовалось доказать в лемме 2.

Лемма 3. **Существуют такие $\forall x, y \in X, x \neq y$, при которых выражение $\left(x\Re y \vee y\Re x\right)$ становится ложным.**

Пусть есть такие $\forall x, y \in X, x \neq y$, при которых:

$$\begin{aligned}&Ф(x) \le \hat{Ф}, Ф(y) \le \hat{Ф}, \\ &\min_{i\in I(x,y)} \left(\frac{N_i + \psi_i^x \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) = \\ &= \min_{i\in I(x,y)} \left(\frac{N_i + \psi_i^y \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right), \\ &\frac{Э(x)}{Ф(x)} = \frac{Э(y)}{Ф(y)}.\end{aligned} \quad (32)$$

Проверим истинность бинарных отношений

$$x\Re_Ф y, y\Re_Ф x, x\Re_1 y, y\Re_1 x, x\Re_2 y, y\Re_2 x$$

для данных (32).

Из определения 2 и выражений (32) следует, что:

$$\begin{aligned}&x\Re_Ф y \Leftrightarrow Ф(x) \le \hat{Ф} \wedge Ф(y) > \\ &> \hat{Ф} \Rightarrow true \wedge false \Rightarrow false,\end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}&y\Re_Ф x \Leftrightarrow Ф(y) \le \hat{Ф} \wedge Ф(x) > \\ &> \hat{Ф} \Rightarrow true \wedge false \Rightarrow false,\end{aligned} \quad (34)$$

то есть отношения $x\Re_Ф y$ и $y\Re_Ф x$ ложны при данных (32).

Из определения 3 и выражений (32) следует, что:

$$\begin{aligned}&x\Re_O y \Leftrightarrow \min_{i\in I(x,y)} \left(\frac{N_i + \psi_i^x \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) > \\ &> \min_{i\in I(x,y)} \left(\frac{N_i + \psi_i^y \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) \Rightarrow false,\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}&y\Re_O x \Leftrightarrow \min_{i\in I(y,x)} \left(\frac{N_i + \psi_i^y \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) > \\ &> \min_{i\in I(y,x)} \left(\frac{N_i + \psi_i^x \Delta N_i}{N_i^{mp}}\right) \Rightarrow false.\end{aligned} \quad (36)$$

Из определения 12, выражений (32) и результатов (33) - (36) следует, что:

$$\begin{aligned}&x\Re_1 y \Leftrightarrow x\overline{\Re}_Ф y \wedge y\overline{\Re}_Ф x \wedge x\Re_O y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \neg\left(false\right) \wedge \neg\left(false\right) \wedge false \Rightarrow \\ &\Rightarrow true \wedge true \wedge false \Rightarrow false,\end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}&y\Re_1 x \Leftrightarrow y\overline{\Re}_Ф x \wedge x\overline{\Re}_Ф y \wedge y\Re_O x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \neg\left(false\right) \wedge \neg\left(false\right) \wedge false \Rightarrow \\ &\Rightarrow true \wedge true \wedge false \Rightarrow false,\end{aligned} \quad (38)$$

то есть отношения $x\Re_1 y$ и $y\Re_1 x$ ложны при данных (32).

Из определения 4 и выражений (32) следует, что:

$$x\Re_Э y \Leftrightarrow \frac{Э(x)}{Ф(x)} > \frac{Э(y)}{Ф(y)} \Rightarrow false, \quad (39)$$

$$y\Re_Э x \Leftrightarrow \frac{Э(y)}{Ф(y)} > \frac{Э(x)}{Ф(x)} \Rightarrow false. \quad (40)$$

Из определения 13, выражений (32) и результатов (33) - (36), (39) и (40) следует, что:

$$\begin{gathered} x\Re_2 y \Leftrightarrow x\overline{\Re}_Ф y \wedge y\overline{\Re}_Ф x \wedge \\ \wedge x\overline{\Re}_О y \wedge y\overline{\Re}_О x \wedge x\Re_Э y \Rightarrow \\ \Rightarrow \neg(false) \wedge \neg(false) \wedge \\ \wedge \neg(false) \wedge \neg(false) \wedge false \Rightarrow \\ \Rightarrow true \wedge true \wedge true \wedge \\ \wedge true \wedge false \Rightarrow false, \end{gathered} \quad (41)$$

$$\begin{gathered} y\Re_2 x \Leftrightarrow y\overline{\Re}_Ф x \wedge x\overline{\Re}_Ф y \wedge \\ \wedge y\overline{\Re}_О x \wedge x\overline{\Re}_О y \wedge y\Re_Э x \Rightarrow \\ \Rightarrow \neg(false) \wedge \neg(false) \wedge \\ \wedge \neg(false) \wedge \neg(false) \wedge \\ \wedge false \Rightarrow true \wedge true \wedge true \wedge \\ \wedge true \wedge false \Rightarrow false, \end{gathered} \quad (42)$$

то есть отношения $x\Re_2 y$ и $y\Re_2 x$ ложны при данных (32).

Из утверждения 2 и результатов (33), (34), (37), (38), (41) и (42) следует, что:

$$\begin{gathered} x\Re y \Leftrightarrow x\Re_Ф y \vee x\Re_1 y \vee \\ \vee x\Re_2 y \Rightarrow false \vee false \vee \\ \vee false \Rightarrow false, \end{gathered} \quad (43)$$

$$\begin{gathered} y\Re x \Leftrightarrow y\Re_Ф x \vee y\Re_1 x \vee \\ \vee y\Re_2 x \Rightarrow false \vee false \vee \\ \vee false \Rightarrow false, \end{gathered} \quad (44)$$

что доказывает лемму 3.

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 1. **Бинарное отношение $x\Re y$ является отношением слабого порядка.**

Доказательство.

Отношения слабого порядка обладают свойствами *асимметричности*, *негатранзитивности* по определению, и свойствами *транзитивности*, *антирефлексивности* и *ацикличности*, которые «вытекают» из свойств асимметричности и негатранзитивности [15, 6]. Данным набором свойств также обладает бинарное отношение *строгого порядка*, которое отличается от отношения слабого порядка наличием свойства *слабой полноты*. Таким образом для доказательства теоремы 1 достаточно доказать наличие у отношения $x\Re y$ свойств асимметричности и негатранзитивности и отсутствие свойства слабой полноты.

Наличие свойства асимметричности доказано в лемме 1, свойства негатранзитивности – в лемме 2. Лемма 3 доказывает отсутствие свойства слабой полноты у бинарного отношения $x\Re y$. Таким образом, наличие у бинарного отношения $x\Re y$ свойств асимметричности и негатранзитивности и отсутствие свойства слабой полноты доказывает теорему 1.

Следует отметить, что в теории бинарных отношений термин «предпочтение» употребляется для бинарных отношений различных типов: строгое упорядочение [14], слабый порядок [12], нестрогий слабый порядок [7] и др. В данной работе принято именовать термином «предпочтение» отношение слабого порядка, что не противоречит, по крайней мере, источнику [12].

Доказательство теоремы 1 подтверждает, что отношение $x\Re y$ позволяет решать задачу оптимизации плана продления НСС АСП. Т. к. отношение $x\Re y$ является отношением слабого порядка, то можно построить граф, разместив на нем все планы $x \in X$ продления НСС АСП [6].

Пример. Рассмотрим следующий пример. Необходимо решить задачу выбора оптимального плана продления НСС АСП для 3 типов АСП (A, B, C) при исходных данных, приведенных в таблице 1. Всего для трех типов АСП существует 2^3=8 планов продления НСС АСП (таблица 2). Упорядочив их с помощью бинарного отношения $x\Re y$, можно построить граф планов продления НСС АСП (рисунок 2). В этом графе каждый элемент нижних слоев соединяется дугой с каждым элементом любого вышележащего слоя. Стрелка на каждой дуге обращена от менее предпочтительного плана к более предпочтительному. В верхней части графа находятся те слои, для элементов которых суммарное финансирование не превысило выделенный лимит денежных средств. В этом графе можно обнаружить 2 смежных слоя, один из которых (верхний) определяет худшие планы ГОЗ, удовлетворяющие критерию предельного финансирования, а второй (нижний) – лучшие планы ГОЗ, не удовлетворяющие критерию предельного финансирования. При этом в рамках множества элементов, удовлетворяющих критерию максимального суммарного финансирования, все элементы упорядочены по критериям минимальной обеспеченности и максимальной экономической эффективности.

Таблица 1 – Исходные данные по типам АСП А, В и С

Тип АСП	N_i, **шт.**	$N_i^{тр}$, **шт.**	C_i, **млн.руб**	$Э_i$, **млн.руб.**	ΔN_i, **шт.**	$\hat{\Phi}$, **млн.руб.**
А	0	100	5	34	50	15
В	35	100	7	14	20	
С	35	100	10	20	20	

Таблица 2 – Планы продления НСС АСП

j	План продления НСС АСП x_j	Типы АСП в плане ГОЗ	$\Phi(x_j)$, млн. руб.	$I(x_j, x_{j+1})$	$\min\limits_{i=I(x_j;x_{j+1})}\left(\frac{N_i+\psi_i^x\Delta N_i}{N_i^{тр}}\right)$, проценты	$\min\limits_{i=\overline{1,3}}\left(\frac{N_i+\psi_i^x\Delta N_i}{N_i^{тр}}\right)$, проценты	$Э(x_j)$, млн. руб.	$\frac{Э(x_j)}{\Phi(x_j)}$
1	$\{1;1;0\}$	А,В	12	$\{2;3\}$	35	35	48	4,0
2	$\{1;0;1\}$	А,С	15	$\{3\}$	35	55	54	3,6
3	$\{1;0;0\}$	А	5	$\{1;3\}$	35	35	34	6,8
4	$\{0;0;1\}$	С	10	$\{2;3\}$	0	35	20	2,0
5	$\{0;1;0\}$	В	7	$\{2\}$	0	55	14	2,0
6	$\{0;0;0\}$	$\varnothing$	0	$\{1;2;3\}$	0	0	0	не опр.
7	$\{1;1;1\}$	А,В,С	22	$\{1\}$	50	50	68	3,1
8	$\{0;1;1\}$	В,С	17	-	0	-	34	2,0

Примечание – множества $I(x_i, x_{i+1})$ и значения обеспеченности $\min\limits_{i=I(x_i;x_{i+1})}\left(\frac{N_i+\psi_i^x\Delta N_i}{N_i^{mp}}\right)$ приведены при сравнении с планом продления НСС АСП нижележащей строки. При этом значение обеспеченности соответствует данным текущей строки

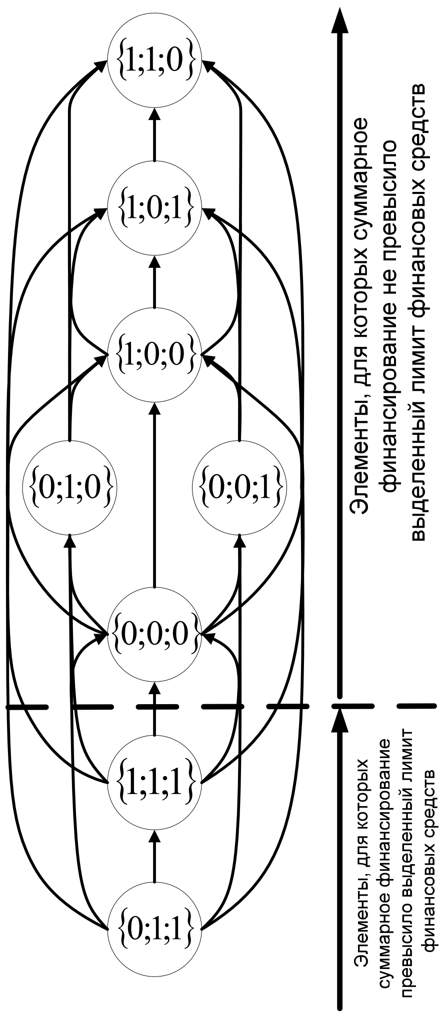

Рисунок 2 – Граф планов продления НСС АСП, упорядоченных бинарным отношением $x\Re y$

Из рисунка 2 и таблицы 2 видно, что максимальным по $x\Re y$ планом ГОЗ на продление НСС оказался план, включающий типы АСП А и В. При этом следующий план ГОЗ (типы АСП А и С) также не превышал предельное финансирование (15 млн.руб.), имел равную максимальному плану обеспеченность (35%), но имел худшее значение коэффициента экономической эффективности (3,6).

Также следует отметить, что были найдены два эквивалентных плана продления АСП: В (x={0;0;1}) и С (x={0;0;1}). Это означает, что между планами продления НСС АСП в одном слое действует отношение эквивалентности.

Определение 14. **Отношением эквивалентности двух планов продления НСС АСП x_1 и x_2 называется бинарное отношение $x_1 \approx x_2$, такое что:**

$$x_1 \approx x_2 \Leftrightarrow x_1 \overline{\Re} x_2 \wedge x_2 \overline{\Re} x_1 . \qquad (45)$$

Из таблицы 2 видно, что эти эквивалентные планы:

- не превышают предельное финансирование;
- при их реализации имеют равное значение минимальной обеспеченности ВВС АСП (0%);
- имеют равные значения коэффициента экономической эффективности продления НСС АСП (2,0).

Оптимальный по бинарному отношению $x\Re y$ план продления НСС АСП имеет суммарную стоимость 12 млн. руб., в то время как выделено 15 млн. руб. (по условию задачи). Это означает, что 3 млн. руб. не будут израсходованы. Посему в существующей методике программно-целевого планирования следует предусмотреть «перенос» неизрасходованной части выделенных денег на следующий бюджетный период для максимального сохранения запасов АСП.

Наличие эквивалентных планов продления НСС АСП допускает множественность оптимальных решений (планов). Выбор конкретного плана продления НСС АСП в этом случае осуществляется лицом, принимающим решение (ЛПР). Такая задача легко решается коллегиально или экспертным опросом в отличие от задачи в первоначальной постановке (выбор из 2^3=8 планов продления НСС АСП). При реальном планировании мероприятий по ГОЗ по продлению НСС АСП приходится рассматривать более 300 типов АСП ($2^{300} = 2{,}037 \cdot 10^{90}$ планов ГОЗ), что не позволяет решать задачу выбора коллегиально или экспертным опросом. Решение задачи с помощью бинарного отношения $x\Re y$ позволяет существенно сократить размерность задачи до приемлемой для экспертов.

На графе рисунка 2 также можно увидеть, что существует две группы планов продления НСС АСП по отношению к выделенному финансированию: не превышающие и превышающие $\hat{\Phi}$. Примечательно, что самый «пустой» план продления НСС АСП

$(\{0;0;0\})$ граничит с самым «полным» планом $(\{1;1;1\})$. При этом самый «пустой» план ГОЗ относится к группе планов, не превышающих выделенного финансирования, а самый «полный» план – к группе планов, превышающих выделенное финансирование.

Выводы

1 В работе предложено бинарное отношение, позволяющее сравнивать два плана государственного оборонного заказа на продление назначенных сроков службы авиационных средств поражения.

2 В предложенном бинарном отношении учтены различные аспекты проблемы выбора оптимального плана государственного оборонного заказа на продление назначенных сроков службы авиационных средств поражения: частные показатели обеспеченности ВВС АСП, экономическую эффективность продления НСС АСП, ограничение на суммарный объем финансирования.

3 Было доказано, что бинарное отношение предпочтения одного плана государственного оборонного заказа на продление назначенных сроков службы авиационных средств поражения другому является отношением слабого порядка.

4 Предложенное бинарное отношение позволяет решать задачу выбора наиболее оптимального плана государственного оборонного заказа на продление назначенных сроков службы авиационных средств поражения. При этом допускается неединственность получаемого решения. Выбор конкретного плана осуществляется лицом, принимающим решение.

5 Разработанное бинарное отношение составляет основу ординального метода оценки мероприятий ГОЗ по продлению НСС АСП.

6 На примере показано, как можно упорядочить планы продления НСС АСП с использованием метода оценки планов продления НСС АСП. Найдено для данных примера конкретное оптимальное решение.

Список использованных источников

1 Жуков Г.П., Викулов С.Ф. Военно-экономический анализ и исследование операций. - М.: Военное издательство – 1987.

2 Кузьмин И.Е., Смолькова И.Н., Дорощенко А.Г., Крутилин А.Г. Выпуск 7141 ВВС. Методика оценки экономической эффективности и целесообразности продления ресурсов, сроков службы и хранения АТ ВН в современных экономических условиях. Под руководством д.т.н., проф. Горшкова В.А. – 2001.

3 Лавринов Г.А. Проблемы развития теории и практики программно-целевого планирования в условиях перехода к трехлетнему ГОЗ, перспективному финансовому планированию и бюджетированию, ориентированному на результат // Вооружение и экономика. 2008, №1(1) с. 5-14.

4 Методика определения остаточной и базовой стоимости вооружения и военной техники, высвобождаемых из наличия Минобороны России. Утв. Минэкономики РФ 24.06.98 г.

5 Методика определения остаточной и базовой стоимости высвобождаемых образцов вооружения, военной техники, запасных частей и комплектующих изделий к ним и высвобождаемого военного имущества ВВС в связи с проводимой реформой в ВС РФ. Утверждена ГК ВВС 29.12.99 г.

6 Милов Н.Т. Теория принятия решений. Лекция 14. Классификация бинарных отношений. – М.: МАДИ – http://www.madi.ru/study/kafedra/asu_new/metod_new/mil/ tpr08_14.shtml (Дата обращения 04.01.2010 г.).

7 Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.

8 Перчун А.Т., Юрков В.А.. Основы военно-экономического анализа. Учебное пособие. - М.: Издательство Московского финансового института – 1987.

9 Романов В.Н. Системный анализ для инженеров. – СПб: СЗГЗТУ – 2006 – 186 с.

10 Сигал И.Х. Задача о рюкзаке: теория и вычислительные алгоритмы. МГУПС (МИИТ), учебное пособие, 1999, Москва. 72 с.

11 Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А.А. Красовского. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.

12 Тангян А.С. Модели социального выбора с конечным и бесконечным числом участников, Препринт ЦЭМИ АН СССР. – М.: 1979.

13 Трофимец В.Я. Развитие инструментальных систем и методов военно-экономического анализа // Вооружение и экономика. 2009. №4(8) с. 29-50.

14 Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.

15 Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. Серия: Теория и методы системного анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 320 с. .

16 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб.пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит. 1986. – 384 с.